

# Stabilität und Stabilisierung nichtlinearer Systeme

Lars Grüne  
Fachbereich Mathematik  
Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Postfach 111932  
60054 Frankfurt am Main, Germany  
[gruene@math.uni-frankfurt.de](mailto:gruene@math.uni-frankfurt.de)  
[www.math.uni-frankfurt.de/~gruene](http://www.math.uni-frankfurt.de/~gruene)

Vorlesungsskript  
Sommersemester 2002



# Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen einer gleichnamigen Vorlesung entstanden, die ich im Sommersemester 2002 am Fachbereich Mathematik der J.W. Goethe-Universität Frankfurt gehalten habe. Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern dieser Vorlesung für ihre Anregungen bedanken, die zur Verbesserung dieses Textes beigetragen haben.

Da sich die Vorlesung an Studentinnen und Studenten ab dem 4. Semester richtete, wurde im Allgemeinen auf eine elementare Darstellung des Stoffes Wert gelegt. In einigen Passagen dieses Skriptes wurden die Bücher [1, 2, 3] — auch ohne besonderen Hinweis im Text — benutzt. Die elementare Darstellung des Stoffes sowie die recht knappe Zeit in einer zweistündigen Vorlesung haben dabei dazu geführt, dass nicht alle Themen in der ihnen gebührenden Tiefe betrachtet werden konnten. Dies gilt insbesondere für einige Beweise, die leider nur skizziert werden konnten. Aus diesem Grunde ist das vorliegende Skript eher als Themensammlung und Anregung zu verstehen, für ein Selbststudium des Stoffes aber nur bedingt geeignet.

Eine elektronische Version dieses Skripts sowie Lösungen einiger ausgewählter Übungsaufgaben sind unter [www.math.uni-frankfurt.de/~numerik/lehre/gruene/nlstab02/](http://www.math.uni-frankfurt.de/~numerik/lehre/gruene/nlstab02/) im WWW erhältlich.

Frankfurt am Main, September 2002

LARS GRÜNE



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>1 Kontrollsysteme</b>	<b>1</b>
1.1 Definition . . . . .	1
1.2 Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . . .	2
<b>2 Stabilität gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>7</b>
2.1 Vergleichsfunktionen . . . . .	7
2.2 Stabilität . . . . .	8
2.3 Beispiele . . . . .	9
<b>3 Ljapunov-Funktionen</b>	<b>13</b>
3.1 Definition und äquivalente Formulierungen . . . . .	13
3.2 Ljapunov-Funktion $\Rightarrow$ Stabilität . . . . .	15
3.3 Stabilität $\Rightarrow$ Ljapunov-Funktion . . . . .	17
<b>4 Kontrollierbarkeit und Stabilisierbarkeit</b>	<b>25</b>
4.1 Asymptotische Kontrollierbarkeit . . . . .	25
4.2 Feedback-Stabilisierbarkeit . . . . .	27
<b>5 Kontroll-Ljapunov-Funktionen</b>	<b>31</b>
5.1 Definition und äquivalente Formulierungen . . . . .	31
5.2 Ljapunov-Funktion $\Leftrightarrow$ asymptotische Kontrollierbarkeit . . . . .	32
<b>6 Eine explizite Formel für stabilisierende Feedbacks</b>	<b>35</b>
6.1 Feedbacks und Kontroll-Lyapunov-Funktionen . . . . .	35
6.2 Eine Feedback-Formel . . . . .	36

<b>7</b>	<b>Eine notwendige Bedingung für Feedbacks</b>	<b>41</b>
7.1	Brocketts Bedingung . . . . .	41
7.2	Beispiel: Artstein's Kreise . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Sampling</b>	<b>45</b>
8.1	Sampling-Lösungen . . . . .	45
8.2	Stabilität und Sampling . . . . .	46
8.3	Sampling und Ljapunov-Funktionen . . . . .	47
8.4	Existenz von Sampling-Ljapunov-Funktionen . . . . .	49
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>52</b>
	<b>Index</b>	<b>54</b>

# Kapitel 1

## Kontrollsysteme

In diesem Kapitel wollen wir die grundlegenden Systeme definieren, mit denen wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen wollen. Wenngleich sich der erste Teil der Vorlesung sich mit unkontrollierten gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen wird, werden wir gleich den Begriff des Kontrollsystems einführen, da die unkontrollierten Gleichungen als Spezialfall der Kontrollsysteme aufgefasst werden können.

Der Ausdruck „Kontrollsystem“ hat sich im deutschen Sprachgebrauch hierfür inzwischen etabliert, wenngleich er eine eher schlechte, oder zumindest missverständliche Übersetzung des englischen Ausdrucks „control system“ darstellt. Eine korrektere Übersetzung wäre „gesteuertes System“ oder „Steuersystem“, da es hier um Kontrolle im Sinne von Einflussnahme und nicht im Sinne von Überwachung geht. Wir wollen hier aber bei der geläufigen Bezeichnung bleiben.

### 1.1 Definition

**Definition 1.1** Ein *Kontrollsystem* im  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , ist gegeben durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1.1)$$

wobei  $f : \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein *parameterabhängiges stetiges Vektorfeld* ist.

Die Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  heißt *Kontrollwertebereich*, und definiert die Werte, die  $u(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$  annehmen darf.

Mit dem Symbol  $\mathcal{U}$  bezeichnen wir den *Raum der zulässigen Kontrollfunktionen*, also

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U \mid u \text{ zulässig}\}.$$

Was „zulässig“ im mathematischen Sinne bedeutet, werden wir im folgenden Abschnitt genauer festlegen.  $\square$

Einige Beispiele für Kontrollsysteme werden wir im Laufe der Vorlesung kennen lernen.

**Bemerkung 1.2** Statt „ $\frac{d}{dt}x(t)$ “ werden wir oft kurz „ $\dot{x}(t)$ “ schreiben.  $\square$

Wir werden uns nun damit beschäftigen, welche Wahl des Kontrollfunktionsraumes  $\mathcal{U}$  sinnvoll ist. Zwei Kriterien spielen dabei eine Rolle: Zum einen wollen wir eine hinreichend große Menge an Funktionen zulassen, zum anderen wollen wir eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die Lösungen von (1.1) erhalten.

## 1.2 Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass z.B. die Wahl  $\mathcal{U} = C(\mathbb{R}, U)$  (also die Menge aller stetigen Funktionen mit Werten in  $U$ ), zusammen mit der Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  in  $x$  einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz erlaubt. Stetige Kontrollfunktionen sind für viele Anwendungen allerdings eine zu einschränkende Klasse, da man bereits für sehr einfache Probleme nachweisen kann, dass die zur Stabilisierung nötigen Steuerstrategien unstetig in  $t$  sind. Wir werden deshalb eine größere Klasse von Kontrollfunktionen zulassen. Wir erinnern an einige Definitionen.

**Definition 1.3** Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall.

(i) Eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *stückweise konstant*, falls eine Zerlegung von  $I$  in endlich viele Teilintervalle  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  existiert, so dass  $g$  auf  $I_j$  konstant ist für alle  $j = 1, \dots, n$ .

(ii) Eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt (*Lebesgue-*) *messbar*, falls eine Folge von stückweise konstanten Funktionen  $g_i : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , existiert mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) = g(x)$  für fast alle<sup>1</sup>  $x \in I$ .

(iii) Eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt (*Lebesgue-*) *messbar*, falls für jedes abgeschlossene Teilintervall  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  die Einschränkung  $g|_I$  messbar im Sinne von (ii) ist.

(iv) Eine messbare Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *lokal essentiell beschränkt*, falls für jedes kompakte Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  eine Konstante  $C > 0$  existiert, so dass  $\|g(t)\| \leq C$  ist für fast alle  $x \in I$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass die Wahl messbarer Kontrollfunktionen einen sinnvollen Lösungsbegriff für (1.1) liefert.

**Satz 1.4 (Satz von Caratheodory)** Betrachte ein Kontrollsystem mit folgenden Eigenschaften:

i) Der Raum der Kontrollfunktionen ist gegeben durch

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U \mid u \text{ ist messbar und lokal essentiell beschränkt}\}.$$

ii) Das Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist stetig.

---

<sup>1</sup>d.h., für alle  $x$  aus einer Menge  $J \subseteq I$  mit der Eigenschaft, dass  $I \setminus J$  eine Lebesgue-Nullmenge ist



iii) Für jedes  $R > 0$  existiert eine Konstante  $M_R > 0$ , so dass die Abschätzung

$$\|f(x, u)\| \leq M_R$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und alle  $u \in U$  mit  $\|x\| \leq R$  und  $\|u\| \leq R$  erfüllt ist.

iv) Für jedes  $R > 0$  existiert eine Konstante  $L_R > 0$ , so dass die Abschätzung

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq L_R \|x_1 - x_2\|$$

für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  und alle  $u \in U$  mit  $\|x_1\| \leq R$ ,  $\|x_2\| \leq R$  und  $\|u\| \leq R$  erfüllt ist.

Dann gibt es für jeden Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und jede Kontrollfunktion  $u \in \mathcal{U}$  ein maximales Intervall der Form  $J = (\tau_{\min}, \tau_{\max}) \subset \mathbb{R}$  mit  $\tau_{\max} > 0 > \tau_{\min}$  ( $\tau_{\max} = \infty$  und  $\tau_{\min} = -\infty$  ist möglich), auf dem eine absolut stetige Funktion  $x(t)$  existiert, die die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (1.2)$$

für alle  $t \in J$  erfüllt. Diese Lösung  $x(t)$  ist darüberhinaus eindeutig auf  $J$ .

**Definition 1.5** Wie bezeichnen die eindeutige Funktion  $x(t)$  aus Satz 1.4 mit  $\varphi(t, x_0, u)$  und nennen sie die *Lösung* von (1.1) zum *Anfangswert*  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und zur *Kontrollfunktion*  $u \in \mathcal{U}$ .  $\square$

Die folgende Beobachtung rechtfertigt diese Definition: Da  $\varphi(t, x_0, u)$  absolut stetig ist, ist diese Funktion für fast alle  $t \geq 0$  nach  $t$  differenzierbar. Insbesondere folgt also aus dem Satz 1.4, dass  $\varphi(t, x_0, u)$  die Differentialgleichung (1.1) für fast alle  $t \geq 0$  erfüllt, d.h. es gilt

$$\dot{\varphi}(t, x_0, u) = f(\varphi(t, x_0, u), u(t))$$

für fast alle  $t \geq 0$ . Da man für beliebige messbare Kontrollfunktionen im Allgemeinen nicht erwarten kann, dass eine *überall* differenzierbare Lösung von (1.1) existiert, liefert die Integralgleichung (1.2) tatsächlich den richtigen und sinnvollen Lösungsbegriff. In diesem Sinne kann man (1.1) als abkürzende Schreibweise für die Integralgleichung (1.2) auffassen.

**Bemerkung 1.6** Im Weiteren nehmen wir stets an, dass die Voraussetzungen (i)–(iv) von Satz 1.4 erfüllt sind, werden dies aber nur in wichtigen Sätzen explizit formulieren.  $\square$

Zum Beweis von Satz 1.4 (und auch für einige weitere Überlegungen) ist das folgende Lemma nützlich.

**Lemma 1.7** Für eine Kontrollfunktion  $u \in \mathcal{U}$  und  $t_1 \in \mathbb{R}$  bezeichnen wir mit  $u(t_1 + \cdot)$  die um  $t_1$  verschobene Kontrollfunktion, d.h., für  $v = u(t_1 + \cdot)$  gilt  $v(t) = u(t_1 + t)$ . Dann gilt für  $t_1, t_2 > 0$ :

(i) Ist  $x_1 : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Lösung von (1.2) zur Kontrollfunktion  $u$  und  $x_2 : [0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Lösung zur Kontrollfunktion  $u(t_1 + \cdot)$  mit  $x_2(0) = x_1(t_1)$ , so ist die Funktion  $x : [0, t_1 + t_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$  gegeben durch

$$x(t) := \begin{cases} x_1(t), & t \in [0, t_1] \\ x_2(t - t_1), & t \in [t_1, t_1 + t_2] \end{cases}$$

eine Lösung von (1.2).

(ii) Ist  $x_1 : [0, t_1 + t_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Lösung von (1.2) zur Kontrollfunktion  $u$ , so ist die Funktion  $x_2 : [0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$  gegeben durch

$$x_2(t) := x_1(t + t_1)$$

eine Lösung von (1.2) mit  $x_2(0) = x_1(t_1)$  zur Kontrollfunktion  $u(t_1 + \cdot)$ .

**Beweis:** Nachrechnen (Übungsaufgabe).

**Beweis von Satz 1.4:** Wir beweisen den Satz für Intervalle der Form  $J = [0, \tau_{\max})$ . Die Existenz und Eindeutigkeit für  $t < 0$  folgt mit exakt den gleichen Argumenten, wenn man  $x(t)$  und  $f(x(t), u(t))$  durch  $x(-t)$  bzw.  $-f(x(-t), u(-t))$  ersetzt und die entstehenden Lösungen analog zu Lemma 1.7 zusammenfügt.

Wähle ein  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  und ein  $u \in \mathcal{U}$ . Zunächst zeigen wir, dass ein  $\delta > 0$  existiert, so dass auf dem Intervall  $[0, \delta]$  eine eindeutige Lösung  $x(t)$  existiert. Dazu wählen wir  $R > 0$  so groß, dass  $\|u(t)\| \leq R$  für fast alle  $t \in [0, 1]$  und  $\|x_0\| \leq R/2$ . Nun wählen wir  $\delta \in (0, 1]$  so, dass  $\delta L_R =: \lambda < 1$  und  $\delta M_R \leq R/2$  für die Konstanten aus (iii) und (iv) gilt.

Für eine stetige Funktion  $\xi : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^d$  definieren wir  $\|\xi\|_\infty := \sup_{t \in [0, \delta]} \|\xi(t)\|$ . Sei  $\mathcal{C}([0, \delta], R)$  der Raum der stetigen Funktionen  $\xi : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\|\xi\|_\infty \leq R$ . Wir zeigen, dass der Operator  $S$  gegeben durch

$$S(\xi)(t) := x_0 + \int_0^t f(\xi(s), u(s)) ds$$

die Menge  $\mathcal{C}([0, \delta], R)$  in sich selbst abbildet. Sicherlich ist  $S(\xi)$  stetig, falls  $\xi$  stetig ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $\|S(\xi)\|_\infty \leq R$  für  $\xi \in \mathcal{C}([0, \delta], R)$ . Aus Annahme (iv) und der Wahl von  $R$  folgt, dass  $\|f(\xi(t), u(t))\| \leq M_R$  ist für fast alle  $t \in [0, \delta]$ . Daraus folgt für  $t \in [0, \delta]$  die Abschätzung

$$\left\| x_0 + \int_0^t f(\xi(s), u(s)) ds \right\| \leq \|x_0\| + \int_0^t \|M_R\| dt \leq \|x_0\| + \delta M_R \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,$$

also  $\|S(\xi)\|_\infty \leq R$ .

Wiederum aus der Wahl von  $R$  folgt, dass für je zwei Funktionen  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}([0, \delta], R)$  die Abschätzung

$$\|f(\xi_1(t), u(t)) - f(\xi_2(t), u(t))\| \leq L_R \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|$$

für fast alle  $t \in [0, \delta]$  gilt. Also folgt

$$\begin{aligned} \|S(\xi_1)(t) - S(\xi_2)(t)\| &= \left\| \int_0^t f(\xi_1(s), u(s)) ds - \int_0^t f(\xi_2(s), u(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t L_R \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\| ds \\ &\leq \delta L_R \|\xi_1 - \xi_2\|_\infty = \lambda \|\xi_1 - \xi_2\|_\infty \end{aligned}$$

und damit

$$\|S(\xi_1) - S(\xi_2)\|_\infty \leq \lambda \|\xi_1 - \xi_2\|_\infty.$$

Da  $\lambda < 1$  ist, ist  $S$  also eine Kontraktion auf  $\mathcal{C}([0, \delta], R)$ , und da der Raum  $\mathcal{C}([0, \delta], R)$  mit der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  ein Banach-Raum ist, folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes  $x \in \mathcal{C}([0, \delta], R)$  mit  $S(x) = x$ , der gerade die gesuchte eindeutige Lösung von (1.2) auf  $[0, \delta]$  ist.

Wir zeigen nun, dass sich diese Lösung auf einem maximalen Intervall eindeutig fortsetzen lässt. Sei dazu

$$\tau_{\max} := \sup\{t > 0 \mid \text{es existiert eine Lösung von (1.2) auf } [0, t]\}.$$

Offenbar ist  $J = [0, \tau_{\max})$  per Definition das gesuchte Intervall (dieses muss rechts offen sein, da wir die Lösung ansonsten mittels Lemma 1.7 und dem ersten Teil des Beweises auf einem Intervall der Form  $[\tau_{\max}, \tau_{\max} + \delta]$  fortsetzen könnten).

Es bleibt, die Eindeutigkeit der Lösung auf  $J$  zu zeigen. Seien dazu  $x_1$  und  $x_2$  zwei unterschiedliche Lösungen mit  $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ , d.h., es gibt ein  $t \in J$  mit  $x_1(t) \neq x_2(t)$ . Wir definieren

$$t^* := \inf\{t \in J \mid x_1(t) \neq x_2(t)\}.$$

Dann gilt  $x_1(t^*) = x_2(t^*) =: x^*$ . Nach Lemma 1.7 sind die Funktionen  $x_1(t^* + \cdot)$  und  $x_2(t^* + \cdot)$  Lösungen von (1.2) mit  $x_0 = x^*$  und Kontrollfunktion  $u(t^* + \cdot)$ . Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, dass ein  $\delta^* > 0$  existiert, so dass diese Integralgleichung eine eindeutige Lösung auf  $[0, \delta^*]$  hat. Also müssen  $x_1$  und  $x_2$  auf  $[t^*, t^* + \delta]$  übereinstimmen, was der Definition von  $t^*$  widerspricht.  $\square$



## Kapitel 2

# Stabilität gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wir betrachten in diesem und dem folgenden Kapitel gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (2.1)$$

d.h. Systeme ohne Kontrolle. Wir nehmen durchgehend an, dass  $f$  die Bedingungen von Satz 1.4 erfüllt.

Die klassischen Definitionen von (asymptotischer) Stabilität verwenden üblicherweise recht unhandliche  $\varepsilon$ - $\delta$  und  $\varepsilon$ - $T$  Relationen. Wer mit der Stabilität linearer autonomer Differentialgleichungen der Form  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  vertraut ist<sup>1</sup>, weiß, dass asymptotische Stabilität äquivalent zu exponentieller Stabilität ist, d.h., es gibt Konstanten  $C, \sigma > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und alle  $t > 0$  die Ungleichung

$$\|\varphi(t, x)\| \leq Ce^{-\sigma t} \|x\| \quad (2.2)$$

für die Lösungen  $\varphi$  der Differentialgleichung gilt. Wir werden später an Beispielen sehen, dass dies für allgemeine nichtlineare Gleichungen des Typs (2.1) nicht gilt. Da die Charakterisierung von Stabilität über Ungleichungen des Typs (2.2) aber zum einen sehr anschaulich und zum anderen für viele Beweise und Rechnungen praktisch ist, werden wir hier eine ähnliche Technik für allgemeine nichtlineare Systeme verwenden. Dazu benötigen wir die sogenannten *Vergleichsfunktionen*.

### 2.1 Vergleichsfunktionen

Das Konzept der Vergleichsfunktionen wird im Zusammenhang mit Stabilitätsbegriffen zuerst<sup>2</sup> im Buch „Stability of Motion“ von W. Hahn, Springer Verlag 1967, verwendet. Die folgende Definition beschreibt einige Klassen dieser Funktionen.

---

<sup>1</sup>siehe Satz 4.7 im Skript zur Vorlesung „Stabilität und Stabilisierung linearer Systeme“

<sup>2</sup>zumindest ist mir keine frühere Referenz bekannt

**Definition 2.1** Wir definieren die folgenden Klassen von Funktionen:

$$\mathcal{K} := \{\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \alpha \text{ ist stetig und streng monoton wachsend mit } \alpha(0) = 0\}$$

$$\mathcal{K}_\infty := \{\alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha \text{ ist unbeschränkt}\}$$

$$\mathcal{L} := \{\gamma : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \gamma \text{ ist stetig und streng monoton fallend mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0\}$$

$$\mathcal{KL} := \{\beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \beta \text{ stetig, } \beta(\cdot, r^*) \in \mathcal{K} \text{ und } \beta(t^*, \cdot) \in \mathcal{L} \text{ für alle } r^*, t^* \geq 0\}$$

□

Die folgende Grafik veranschaulicht eine typische  $\mathcal{KL}$  Funktion. Beachte, dass im Allgemeinen  $\beta(r^*, 0) \neq r^*$  gilt (in der Grafik gilt  $\beta(r^*, 0) > r^*$ , was in unseren Anwendungen üblicherweise gelten wird; die Definition erlaubt aber auch „ $<$ “).

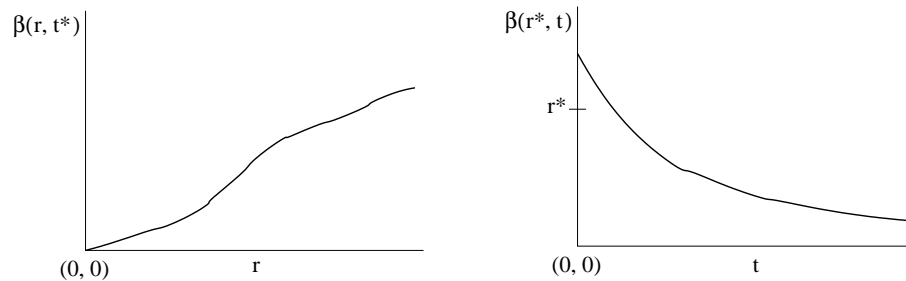


Abbildung 2.1:  $\mathcal{KL}$  Funktion

Wir werden im Laufe der Vorlesung einige Eigenschaften dieser Vergleichsfunktionen benötigen; die meisten werden wir an den entsprechenden Stellen formulieren und beweisen. Einige einfache Eigenschaften werden wir bereits jetzt formulieren.

**Lemma 2.2** (i) Sei  $\alpha \in \mathcal{K}$  und  $\alpha^+ := \sup_{r \geq 0} \alpha(r)$ . Dann existiert eine Umkehrfunktion  $\alpha^{-1} : [0, \alpha^+) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\alpha^{-1}(\alpha(r)) = r$  für alle  $r \geq 0$  und  $\alpha(\alpha^{-1}(r)) = r$  für alle  $r \in [0, \alpha^+)$ .

(ii) Sei  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ . Dann ist die Umkehrfunktion  $\alpha^{-1}$  aus (i) auf ganz  $\mathbb{R}_0^+$  definiert und es gilt  $\alpha^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$ .

(iii) Für alle Konstanten  $C, \sigma > 0$  ist die Funktion  $\beta(r, t) = Ce^{-\sigma t}r$  aus  $\mathcal{KL}$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe. Hinweis: Verwende die Tatsache, dass bijektive Funktionen umkehrbar sind.

## 2.2 Stabilität

Wir werden nun die Vergleichsfunktionen verwenden, um Stabilitätseigenschaften der Differentialgleichung (2.1) zu definieren. Man kann Stabilität für Lösungskurven, Mengen von Lösungskurven oder sogar für allgemeine Mengen definieren. Wir werden uns hier auf die Stabilität von *Gleichgewichten* beschränken.

**Definition 2.3** Ein Punkt  $x^* \in \mathbb{R}^d$  heißt *Gleichgewicht* (auch *Ruhelage*, *Fixpunkt* oder *Equilibrium*) der Gleichung (2.1), falls  $f(x^*) = 0$  gilt, oder, äquivalent, falls die zugehörige Lösung  $\varphi(t, x^*) = x^*$  für alle  $t > 0$  erfüllt.  $\square$

Die Äquivalenz dieser zwei Bedingungen folgt aus der Tatsache, dass die Ableitung konstanter Funktionen gleich Null ist.

Nun können wir unsere Stabilitätskonzepte definieren.

**Definition 2.4** Sei  $x^* \in \mathbb{R}^d$  ein Gleichgewicht der Differentialgleichung (2.1).

(i)  $x^*$  heißt *stabil*, falls eine Umgebung  $N$  von  $x^*$  und eine Funktion  $\alpha \in \mathcal{K}$  existieren mit

$$\|\varphi(t, x) - x^*\| \leq \alpha(\|x - x^*\|) \text{ für alle } x \in N, t \geq 0.$$

(ii)  $x^*$  heißt *instabil*, falls (i) nicht gilt.

(iii)  $x^*$  heißt (*lokal*) *asymptotisch stabil*, falls eine Umgebung  $N$  von  $x^*$  und eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existieren, so dass

$$\|\varphi(t, x) - x^*\| \leq \beta(\|x - x^*\|, t) \text{ für alle } x \in N, t \geq 0.$$

(iv)  $x^*$  heißt *global asymptotisch stabil*, falls (iii) mit  $N = \mathbb{R}^d$  gilt.

(v)  $x^*$  heißt *lokal (bzw. global) exponentiell stabil*, falls Konstanten  $C, \sigma > 0$  existieren, so dass (iii) (bzw. (iv)) mit  $\beta(r, t) \leq Ce^{-\sigma t}r$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 2.5** (i) In dieser Definition haben wir stets implizit vorausgesetzt, dass die betrachteten Lösungen  $\varphi(t, x)$  für alle  $t \geq 0$  existieren.

(ii) Beachte, dass die Stabilität aus (i) ebenfalls eine lokale Definition ist, die man — analog zu (iv) — auch global definieren könnte. Da wir uns in dieser Vorlesung vorwiegend mit asymptotischer Stabilität beschäftigen werden (also mit Teil (iii) und (iv)), wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

(iii) Wir werden üblicherweise o.B.d.A.  $x^* = 0$  annehmen, da dies die Schreibweise vereinfacht. Falls  $x^* \neq 0$  ist, können wir einfach zum transformierten System  $\tilde{f}(x) = f(x + x^*)$  übergehen. Dies verschiebt die Lösungskurven im  $\mathbb{R}^d$ , ändert aber nichts an ihrem Verlauf.  $\square$

## 2.3 Beispiele

Wir wollen die Stabilitätsbegriffe an zwei Beispielen erläutern. Als erstes Beispiel betrachten wir ein Pendel, das in unserem (idealisierten) Modell aus einer masselosen starren Stange und einem daran befestigten Massepunkt besteht. Bezeichnen wir die Winkelposition des Pendels mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und die Geschwindigkeit der Masse auf ihrer kreisförmigen Bahn mit  $v \in \mathbb{R}$ , so ergeben sich (nach geeigneter Normierung der Konstanten) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -kv(t) - \sin(\varphi(t)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

(eine schöne Herleitung dieser Gleichungen findet sich in B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997, Beispiel 1.3.3). Hierbei ist  $k \geq 0$  eine Konstante, die die Reibung beschreibt. In diesen Gleichungen entspricht  $\varphi = 0$  dem senkrecht nach unten hängenden Pendel und  $\varphi = \pi$  dem aufrecht stehenden Pendel. Die Punkte  $(\varphi, v) = (0, 0)$  und  $(\varphi, v) = (\pi, 0)$  sind dementsprechend zwei Gleichgewichte dieser Gleichung. Sie beschreiben gerade das ruhig nach unten hängende und das (in der Praxis schwer zu realisierende) ruhig aufrecht stehende Pendel. Für  $(\varphi, v) = (\pi, 0)$  führen wir die Transformation aus Bemerkung 2.5(iii) durch. Wir setzen  $\vartheta = \varphi - \pi$ , damit ändern sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -kv(t) - \sin(\vartheta(t) + \pi).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Die Gleichungen beschreiben die selben Bewegungen wie zuvor, allerdings entspricht  $\vartheta = 0$  nun dem aufrecht stehenden Pendel und  $\vartheta = -\pi$  dem senkrecht nach unten hängenden Pendel.

Betrachten wir nun die physikalische Interpretation der Gleichungen (2.3) bzw. (2.4): Was würden wir erwarten, wenn sich das Pendel in einer der beiden Ruhelagen befindet, und wir es durch leichtes Anstoßen aus dem Gleichgewicht bringen? Im Fall des herabhängenden Pendels, d.h. für  $(\varphi, v) = (0, 0)$ , würden wir sicherlich erwarten, dass das Pendel in der Nähe der Ruhelage schwingt, sich aber nicht weiter von ihm entfernt. Falls Reibung auf das Pendel wirkt (d.h. falls  $k > 0$  ist) würden wir sogar erwarten, dass das Pendel sich wieder der Ruhelage nähert. (In der Praxis würde man sogar erwarten, dass das Pendel nach einiger Zeit wieder ruhig nach unten hängt; dieser Effekt wird aber durch die Haftreibung bewirkt, die wir in unserem Modell vernachlässigt haben.)

Im Fall des aufrecht stehenden Pendels, d.h. für  $(\varphi, v) = (\pi, 0)$  bzw.  $(\vartheta, v) = (0, 0)$ , wird man nicht erwarten, dass das Pendel nach einem Stoß in der Nähe der Ruhelage bleibt, sondern dass es umfällt, um dann, je nachdem ob Reibung vorhanden ist oder nicht, entweder nach einiger Zeit gegen die hängenden Ruhelage zu konvergieren, oder für alle zukünftigen Zeiten mit gleicher Stärke weiter zu pendeln.

Die folgenden Grafiken stellen Lösungen der linearen Gleichungen (2.3) und (2.4) in der  $(\varphi, v)$  bzw.  $(\vartheta, v)$ -Ebene dar. Das „Anstoßen“ des Pendels modellieren wir dadurch, dass wir Anfangswerte  $x \in \mathbb{R}^2$  wählen, die nicht genau auf dem Gleichgewicht  $x^* = (0, 0)^T$  liegen sondern nur in der Nähe, nämlich  $x = (1, 0)^T, \dots, (4, 0)^T$  für System (2.3) und  $x = (0.1, 0)^T, \dots, (0.4, 0)^T$  für System (2.4).

Die Simulationen von (2.3) für die  $x = (1, 0)^T, (2, 0)$  und  $(3, 0)$  zeigen gerade das oben diskutierte Verhalten: Für  $k > 0$  konvergiert die Lösung gegen das Gleichgewicht, für  $k = 0$  beschreibt das Pendel eine periodische Bewegung um das Gleichgewicht, die Entfernung vom Gleichgewicht bleibt dabei aber proportional zur Anfangsentfernung. Für den weiter entfernten Anfangspunkt  $x = (4, 0)^T$  ändert sich das Bild: Hier entfernt sich die Lösung schneller vom Gleichgewicht und konvergiert auch nicht wieder dagegen. Tatsächlich entspricht der hier sichtbare Effekt dem Überspringen des Pendels; während das Pendel mit Reibung in der Praxis nach einiger Zeit trotzdem gegen die herabhängende Ruhelage konvergieren würde ist dies in der hier verwendeten mathematischen Modellierung nicht der Fall. Tatsächlich konvergiert das Pendel hier gegen einen anderen Gleichgewichtspunkt.



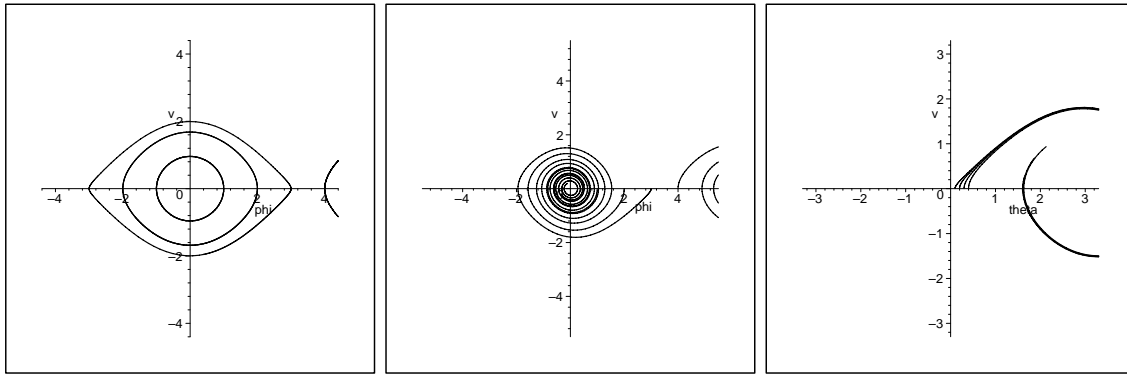


Abbildung 2.2: Lösung von (2.3) für  $k = 0$  und  $k = 0.1$  sowie Lösung von (2.4) für  $k = 1/10$  (von links nach rechts)

Das Verhalten von (2.4) ist — wie man ebenfalls aus der physikalischen Anschauung erwarten würde — ganz anders. Hier entfernen sich die Lösungen sofort vom Gleichgewichtspunkt, das Pendel fällt um.

Im Sinne unserer Definition 2.4 haben wir hier also die drei Fälle Stabilität, lokale asymptotische Stabilität und Instabilität vorliegen.

In unserem zweiten Beispiel zeigen wir, dass asymptotische Stabilität für nichtlineare Systeme nicht exponentiell sein muss. Betrachte die einfache eindimensionale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3.$$

Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass die Lösungen dieser Gleichung gegeben sind durch

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x^2}}} \text{ falls } x \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(t, x) = -\frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x^2}}} \text{ falls } x \leq 0.$$

Das Gleichgewicht  $x^* = 0$  ist tatsächlich asymptotisch stabil (sogar global asymptotisch stabil), denn mit

$$\beta(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{r^2}}}$$

ist die entsprechende Abschätzung aus Definition 2.4 (iii) offenbar erfüllt und man sieht leicht, dass  $\beta \in \mathcal{KL}$  ist.

Wir zeigen nun, dass  $x^*$  nicht exponentiell stabil ist. Wir nehmen dazu an, dass Konstanten  $C, \sigma > 0$  existieren mit  $|\varphi(t, x)| \leq Ce^{-\sigma t}|x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0$ . Wähle nun ein  $x \in \mathbb{R}$  und ein  $t^* > 0$ , das so groß ist, dass  $\sqrt{2tx^2 + 1} \leq t$  gilt für alle  $t \geq t^*$ . Wegen

$$\frac{1}{C}e^{\sigma t} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C}\sigma t + \frac{1}{C}\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \dots$$

gibt es  $t^{**} > 0$  mit  $e^{\sigma t}/C > 2t$  für alle  $t \geq t^*$ . Damit gilt für  $t \geq \max\{t^*, t^{**}\}$

$$\frac{e^{\sigma t}}{C} \geq 2t \geq 2\sqrt{2tx^2 + 1},$$

also

$$Ce^{-\sigma t} = \frac{C}{e^{\sigma t}} < \frac{1}{\sqrt{2tx^2 + 1}}$$

und damit

$$Ce^{-\sigma t}|x| < \frac{|x|}{\sqrt{2tx^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2tx^2 + \frac{1}{x^2}}} = |\varphi(t, x)|,$$

was der Wahl von  $C$  und  $\sigma$  widerspricht.

# Kapitel 3

## Ljapunov–Funktionen

### 3.1 Definition und äquivalente Formulierungen

In diesem Kapitel wollen wir ein wesentliches Hilfsmittel bei der Betrachtung von Stabilitätseigenschaften einführen, die sogenannte Ljapunov–Funktion. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass für eine  $\mathcal{KL}$ –Funktion im Allgemeinen  $\beta(r, 0) \neq r$  ist, typischerweise gilt  $\beta(r, 0) > r$ . Daraus folgt, dass bei asymptotisch stabilen Systemen die Norm  $\|\varphi(t, x) - x^*\|$  nicht monoton fallen muss. Diese Monotonie zu fordern, wäre für die allermeisten Systeme auch viel zu einschränkend. Trotzdem wäre dies für viele Anwendungen — insbesondere zur Überprüfung von asymptotischer Stabilität — eine sehr praktische Eigenschaft. Die Idee der Lyapunov–Funktion liegt nun darin, den Abstand  $\|\varphi(t, x) - x^*\|$ , bzw., wenn wir o.B.d.A.  $x^* = 0$  annehmen, den Abstand vom Nullpunkt  $\|\varphi(t, x)\|$  durch eine verallgemeinerte Abstandsfunktion  $V$  zu ersetzen, für die  $V(\varphi(t, x))$  dann streng monoton fällt. Nimmt man darüberhinaus an, dass diese Abstandsfunktion  $V$  differenzierbar ist, so kann man die strenge Monotonie mittels

$$0 > \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(\varphi(t, x)) = DV(x) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t, x) = DV(x)f(x)$$

ausdrücken. Dies führt zur folgenden Definition, in der  $\text{cl}N$  den Abschluss und  $\partial N$  den Rand der offenen Menge  $N$  bezeichnet.

**Definition 3.1** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) mit  $f(0) = 0$ . Eine stetige Funktion  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  stetig differenzierbar ist, heißt *lokale Ljapunov–Funktion*, falls Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ , eine stetige Funktion  $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , eine Umgebung  $N$  der 0 und eine Konstante  $C > 0$  existiert, so dass  $W(x) > 0$  gilt für alle  $x \in \text{cl}N$ ,  $V(x) < C$  für alle  $x \in N$ ,  $V(x) = C$  für alle  $x \in \partial N$  und die Ungleichungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{3.1}$$

und

$$DV(x)f(x) \leq -W(x) \tag{3.2}$$

gelten für alle  $x \in N$ .

Die Funktion  $V$  heißt *globale Ljapunov-Funktion*, falls  $V$  und  $W$  diese Bedingungen für  $N = \mathbb{R}^d$  erfüllen, wobei hier  $C = \infty$  gewählt wird.

Das Paar  $(V, W)$  wird dabei auch als *Ljapunov-Paar* bezeichnet.  $\square$

Das folgende Lemma zeigt eine äquivalente Formulierung von Ungleichung (3.2), die für Beweise geeigneter, aber etwas schwieriger nachzuprüfen ist.

**Lemma 3.2** Sei  $V$  eine stetige Funktion, die auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  zwei mal stetig differenzierbar ist und (3.1) erfüllt für eine Umgebung  $N$  der 0 und ein  $C > 0$  (bzw. für  $N = \mathbb{R}^d$  und  $C = \infty$ ). Dann gibt es genau dann ein  $W$ , das die Bedingungen von Definition (3.1) erfüllt, wenn es eine lokal Lipschitz-stetige Funktion  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gibt, so dass  $g(r) > 0$  gilt für alle  $r \in (0, C]$  (bzw. für alle  $r > 0$ ) und die Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -g(V(x)) \quad (3.3)$$

gilt für alle  $x \in N$ .

**Beweis:** Wir beweisen den lokalen und globalen Fall zusammen, wobei wir im lokalen Fall annehmen, dass wir eine Konstante  $C < \infty$  und eine Umgebung  $N$  vorgegeben haben.

Sei  $g$  gegeben. Dann erfüllt  $W(x) := g(V(x))$  die Bedingungen aus Definition 3.1.

Sei umgekehrt  $W$  gegeben. Für  $r \in [0, C]$  (bzw.  $r > 0$ ) setzen wir

$$\tilde{g}(r) := \inf\{W(x) \mid x \in \mathbb{R}^d, V(x) = r\}.$$

Im lokalen Fall setzen wir  $\tilde{g}(r) = \tilde{g}(C)$  für alle  $r > C$ . Man rechnet leicht nach, dass dieses  $\tilde{g}$  bereits alle Bedingungen an  $g$  erfüllt mit Ausnahme der Lipschitz-Stetigkeit. Um das endgültige  $g$  zu konstruieren, wählen wir eine zweiseitige Folge  $t_k, k \in \mathbb{Z}$ , mit  $0 < t_{k+1} < t_k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$  und  $\lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = \infty$ . Nun setzen wir  $g(0) = 0$  und

$$g_k := \min_{r \in [t_{k+1}, t_{k-1}]} g(r)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  (bzw. alle  $k \in \mathbb{Z}$ ). Damit definieren wir

$$g(r) := g_{k+1} + \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}}(g_k - g_{k+1}), \quad r \in [t_{k+1}, t_k].$$

Man rechnet leicht nach, dass  $0 < g(r) \leq \tilde{g}(r)$  für  $r \in (0, C]$  ist, womit die Bedingungen an  $g$  erfüllt sind. Da  $g$  eine stückweise lineare Funktion ist, hat die zudem die gewünschte lokale Lipschitz-Stetigkeit.  $\square$

Das folgende Lemma zeigt eine weitere Art, die Bedingung (3.2) zu formulieren.

**Lemma 3.3** Eine stetige Funktion  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , die auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  stetig differenzierbar ist, erfüllt die Bedingung (3.2) genau dann, wenn für alle Lösungen von (2.1) die Integralungleichung

$$V(\varphi(t, x)) \leq V(x) - \int_0^t W(\varphi(s, x)) ds \quad (3.4)$$

gilt.

**Beweis:** Leicht durch Differenzieren bzw. Integrieren der entsprechenden Ungleichungen.  $\square$

Der Vorteil der Integralformulierung (3.4) ist, dass wir sie später auch für Ljapunov-Funktionen verwenden können, die nicht differenzierbar sind. Wir werden daher bei Beweisen im Folgenden üblicherweise (3.4) statt (3.2) von verwenden. Beachte, dass wir für (3.3) die Integralgleichung (3.4) mit  $W(x) = g(V(x))$  erhalten.

### 3.2 Ljapunov-Funktion $\Rightarrow$ Stabilität

Wir formulieren und beweisen nun das erste Hauptresultat dieses Kapitels, das besagt, dass aus der Existenz einer Ljapunov-Funktion asymptotische Stabilität folgt.

**Satz 3.4** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) mit  $f(0) = 0$ . Angenommen, es existiert eine lokale (bzw. globale) Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 3.1 gegeben. Dann ist das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) asymptotisch stabil.

Hierbei ist die Vergleichsfunktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus Definition 2.4 gegeben durch

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(r))), \quad (3.5)$$

wobei  $\mu$  die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r \quad (3.6)$$

ist mit  $g$  aus Lemma 3.2.

**Beweis:** Sei  $g$  die Funktion aus Lemma 3.2. Wir betrachten die Lösung  $\mu(t, r)$  des Anfangswertproblems (3.6) und zeigen zunächst das folgende Resultat: Für alle  $x \in N$  gilt

$$V(\varphi(t, x)) \leq \mu(t, V(x)) \text{ für alle } t \geq 0. \quad (3.7)$$

Zum Beweis von (3.7) wählen wir ein  $x \in N$  und betrachten für  $\varepsilon > 0$  die Funktionen  $h_\varepsilon$  gegeben durch

$$h_\varepsilon(t) = V(x) - \int_0^t g(h_\varepsilon(s)) + \varepsilon ds.$$

Da  $h_\varepsilon$  die Differentialgleichung  $\dot{h}_\varepsilon(t) = -g(h_\varepsilon(t)) + \varepsilon$  mit Anfangsbedingung  $h_\varepsilon(0) = V(x)$  löst, folgt aus Gronwall's Lemma die Konvergenz  $h_\varepsilon(t) \rightarrow \mu(t, V(x))$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und jedes  $t \geq 0$ . Wir zeigen, dass  $V(\varphi(t, x)) \leq h_\varepsilon(t)$  für alle  $t > 0$  und alle  $\varepsilon > 0$  gilt, woraus dann mit der Konvergenz  $h_\varepsilon(t) \rightarrow \mu(t, V(x))$  die Behauptung (3.7) folgt. Nehmen wir also im Widerspruch zur Behauptung an, dass ein  $t > 0$  existiert mit  $V(\varphi(t, x)) > h_\varepsilon(t)$ . Sei  $t^* = \inf\{t \geq 0 \mid V(\varphi(t, x)) > h_\varepsilon(t)\}$ . Aus Stetigkeitsgründen gilt dann  $V(\varphi(t^*, x)) = h_\varepsilon(t^*)$ , und es folgt

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq \int_0^\tau g(V(\varphi(t^* + s, x)) - g(h_\varepsilon(t^* + s)) - \varepsilon ds.$$

Sei nun  $L$  eine Lipschitz-Konstante von  $g$  auf einer Umgebung von  $h_\varepsilon(t^*)$  und sei  $\tau^* > 0$  so klein, dass  $V(\varphi(t^* + s, x))$  und  $h_\varepsilon(t^* + s)$  für alle  $t \in [0, \tau^*]$  in dieser Umgebung liegen. Dann gilt für alle  $\tau \in (0, \tau^*]$  die Ungleichung

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq \int_0^\tau L|V(\varphi(t^* + s, x)) - h_\varepsilon(t^* + s)| - \varepsilon ds.$$

Da  $V(\varphi(t^*, x)) = h_\varepsilon(t^*)$  ist und beide Funktionen stetig in  $t$  sind, finden wir  $\tau^{**} > 0$ , so dass

$$L|V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau)| \leq \varepsilon/2$$

ist für alle  $\tau \in [0, \tau^{**}]$ . Damit folgt

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq -\tau\varepsilon/2 < 0$$

für alle  $\tau \in [0, \tau^{**}]$ , insbesondere also

$$V(\varphi(t^* + \tau)) < h_\varepsilon(t^* + \tau) \text{ für alle } \tau \in [0, \tau^{**}],$$

was der Wahl von  $t^*$  widerspricht. Damit ist (3.7) gezeigt.

Da  $g$  auf jedem kompakten Intervall der Form  $[a, b]$  mit  $0 < a < b \leq C$  strikt positiv ist, konvergiert  $\mu(t, r)$  gegen Null für  $t \rightarrow \infty$  (jedes solche Intervall wird in endlicher Zeit „nach unten“ verlassen). Also ist  $\mu$  eine  $\mathcal{L}$ -Funktion in  $t$ . Da sich die Lösungen der Differentialgleichung (3.6) nicht schneiden können, und  $\mu(0, r)$  streng monoton in  $r$  ist, ist auch  $\mu(t, r)$  streng monoton in  $r$ , also eine  $\mathcal{K}$ -Funktion in  $r$ . Man sieht damit leicht, dass dann  $\beta$  aus (3.5) eine  $\mathcal{KL}$ -Funktion ist. Aus

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(\varphi(t, x))) \leq \alpha_1^{-1}(\mu(t, V(x))) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(\|x\|))) = \beta(\|x\|, t) \end{aligned}$$

folgt damit die behauptete asymptotische Stabilität.  $\square$

Wir wollen das Konzept der Ljapunov-Funktion an zwei Beispielen veranschaulichen.

**Beispiel 3.5** Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)^3 \end{aligned}$$

Die Behauptung ist, dass das Gleichgewicht  $x^* = 0$  global asymptotisch stabil ist. Zum Beweis betrachten wir die Funktion  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Offenbar erfüllt  $V$  die Ungleichung (3.1) mit  $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$ . Wegen

$$DV(x)f(x) = (2x_1 \ 2x_2) \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^4 =: -W(x)$$

ist  $V$  also eine globale Ljapunov-Funktion. Mit etwas Rechnerei sieht man außerdem, dass die (optimale) Funktion  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  für Ungleichung (3.3) gegeben durch

$$g(r) = \begin{cases} 2c^2, & \text{falls } c < 1 \\ 2c, & \text{falls } c \geq 1 \end{cases}$$

gerade eine Funktion ist, für die Ungleichung (3.3) gilt.  $\square$

Die Hauptschwierigkeit bei Ljapunov-Funktionen liegt darin, geeignete Kandidaten zu finden, für die man die benötigten Eigenschaften nachprüfen kann. Für Differentialgleichungen mit speziellen Strukturen gibt es z.T. systematische Verfahren, die wir hier aber nicht näher besprechen wollen. Oft kann man auch physikalische Eigenschaften eines Systems benutzen, wie wir dies im folgenden Beispiel machen.

**Beispiel 3.6** Betrachte das nichtlineare mathematische Pendel (2.3) mit Reibungskonstante  $k = 1$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -v(t) - \sin(\varphi(t))\end{aligned}$$

Der Ansatz zum Finden einer Ljapunov-Funktion liegt hier in der Betrachtung der Energie des Systems, die — bedingt durch die Reibung — monoton abnimmt. Als ersten Versuch setzen wir

$$\tilde{V}(v, \varphi) = (1 - \cos(\varphi)) + \frac{1}{2}v^2.$$

Der erste Term  $1 - \cos(\varphi)$  beschreibt hierbei die potentielle Energie, während der zweite Term  $v^2/2$  die Bewegungsenergie beschreibt. Berechnet man hier die Ableitung  $D\tilde{V}f$ , so erhält man aber nur für  $v \neq 0$  einen negativen Ausdruck. Zwar nimmt  $\tilde{V}$  auch für  $v = 0$  (und  $\varphi \neq 0$ ) streng monoton ab, allerdings so langsam, dass die Ableitung trotzdem verschwindet. Mit etwas Überlegung und Probieren kommt man darauf, dass man einen zusätzlichen Term addieren muss, um dieses Problem zu lösen. Dies führt auf die Funktion

$$V(v, \varphi) = (1 - \cos(\varphi)) + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{10}v \sin(\varphi).$$

**Übungsaufgabe:** Prüfe nach, dass die Funktion  $V$  eine lokale Ljapunov-Funktion für jede Umgebung  $N$  der 0 ist, für die ein  $C < 2$  existiert, so dass  $V(x) < C$  für  $x \in N$  und  $V(x) = C$  für  $x \in \partial N$  ist.

**Hinweis:** Die bei der Ableitung entstehenden Terme sind sehr unhandlich, weswegen eine analytische Überprüfung recht aufwändig ist und als Lösung nicht unbedingt erwartet wird. Als Alternative kann eine grafische Analyse mit MAPLE durchgeführt werden. Hierbei sollten dargestellt werden: Die Menge  $\{(v, \varphi) \mid V(v, \varphi) = 2\}$  (Tipp: `contourplot`), die Mengen, in denen  $|DVf|$  nahe bei Null liegt (Tipp: `implicitplot`) sowie die Funktion  $V$  selbst (Tipp: `plot3d`). Natürlich sollten die Ergebnisse geeignet erläutert werden.  $\square$

### 3.3 Stabilität $\Rightarrow$ Ljapunov-Funktion

In diesem Abschnitt werden wir eine Umkehrung von Satz 3.4 formulieren und — unter Zuhilfenahme von einigen tieferen Sätzen aus der Literatur — beweisen.

Wir beginnen gleich mit der Formulierung des Hauptresultates.

**Satz 3.7** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) mit  $f(0) = 0$ . Wenn das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) asymptotisch stabil, dann existiert eine lokale (bzw. globale) Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 3.1.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Hilfsresultate. Wir beginnen mit dem folgenden Lemma.

**Lemma 3.8** Für jede Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert eine Funktion  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ , so dass die Ungleichung

$$\alpha(\beta(r, t)) \leq e^{-t}r$$

gilt für alle  $r \in [0, 1]$  und alle  $t > 0$ .

**Beweis:** Wir definieren eine Funktion  $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mittels

$$g(q) = \max\{\beta(r, -\ln(s)) \mid r \in [0, 1], s \in (0, 1], rs = q\}.$$

Beachte zunächst, dass die Menge, über die hier für festes  $q$  maximiert wird, kompakt ist, weswegen das Maximum über die stetige Funktion  $\beta$  tatsächlich existiert. Für gegebenes  $q \in (0, 1]$  bezeichnen wir die Werte  $r$  und  $s$ , für die dieses angenommen wird mit  $r^*(q)$  und  $s^*(q)$ . Wir beweisen, dass  $g$  stetig und streng monoton wachsend ist und  $\lim_{q \rightarrow 0, q > 0} g(q) = 0$  ist.

Wir zeigen zunächst, dass  $g$  streng monoton wachsend ist. Dazu ist zu zeigen, dass  $0 < q_1 < q_2 \leq 1$  die Ungleichung  $g(q_1) < g(q_2)$  impliziert. Betrachte die Werte  $r_1 = r^*(q_1)$  und  $s_1 = s^*(q_1)$ . Wir setzen

$$r_2 := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}r_1 > 1 \\ q_2, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}s_1 > 1 \\ \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}r_1, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad s_2 := \begin{cases} q_2, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}r_1 > 1 \\ 1, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}s_1 > 1 \\ \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}s_1, & \text{sonst} \end{cases} .$$

In allen drei Fällen gilt  $r_2 \in (0, 1]$ ,  $s_2 \in (0, 1]$ ,  $r_2s_2 = q_2$ ,  $r_1 \leq r_2$  und  $s_1 \leq s_2$  (und damit  $-\ln(s_2) \leq -\ln(s_1)$ ). Im ersten und zweiten Fall gilt darüberhinaus  $s_1 < s_2$  (und damit  $-\ln(s_2) < -\ln(s_1)$ ) und im zweiten und dritten Fall  $r_1 < r_2$ . Damit folgt im ersten und zweiten Fall

$$g(q_2) \geq \beta(r_2, -\ln(s_2)) \geq \beta(r_1, -\ln(s_2)) > \beta(r_1, -\ln(s_1)) = g(q_1)$$

und im zweiten und dritten Fall

$$g(q_2) \geq \beta(r_2, -\ln(s_2)) \geq \beta(r_2, -\ln(s_1)) > \beta(r_1, -\ln(s_1)) = g(q_1),$$

womit die strenge Monotonie gezeigt ist.

Zum Beweis der Stetigkeit wähle  $q_0 \in (0, 1]$  und betrachte eine Folge  $q_i \rightarrow q_0$ . Wir setzen  $r_i := r^*(q_i)$  und  $s_i := s^*(q_i)$  für  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Mit der gleichen Konstruktion wie oben sieht man, dass zu jedem  $i \in \mathbb{N}$  Zahlen  $\tilde{r}_i$  und  $\tilde{s}_i$  sowie Zahlen  $\bar{r}_i$  und  $\bar{s}_i$  existieren mit den Eigenschaften

$$\tilde{r}_i \tilde{s}_i = q_i, \quad |\tilde{r}_i - r_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right| \quad \text{und} \quad |\tilde{s}_i - s_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right|$$

sowie

$$\bar{r}_i \bar{s}_i = q_0, \quad |\bar{r}_i - r_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right| \quad \text{und} \quad |\bar{s}_i - s_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right|.$$



Insbesondere gilt  $\tilde{r}_i \rightarrow r_0$ ,  $\tilde{s}_i \rightarrow s_0$ ,  $\bar{r}_i \rightarrow r_0$  und  $\bar{s}_i \rightarrow s_0$  für  $i \rightarrow \infty$ . Also folgt aus der Stetigkeit von  $\beta$  und  $\ln$

$$g(q_0) - g(q_i) \leq \beta(r_0, -\ln(s_0)) - \beta(\tilde{r}_i, -\ln(\tilde{s}_i)) \rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty$$

und

$$g(q_i) - g(q_0) \leq \beta(r_i, -\ln(s_i)) - \beta(\bar{r}_i, -\ln(\bar{s}_i)) \rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty,$$

also die gewünschte Stetigkeit.

Zuletzt beweisen wir die Konvergenz  $\lim_{q \rightarrow 0, q > 0} g(q) = 0$ . Beachte dazu, dass für jedes Paar  $(r, s) \in [0, 1]^2$  mit  $rs = q$  entweder  $s \leq \sqrt{q}$  oder  $r \leq \sqrt{q}$  gilt, da ansonsten  $rs > \sqrt{q}\sqrt{q} = q$  wäre. Also gilt entweder

$$g(q) \leq \beta(\sqrt{q}, -\ln(s)) \leq \beta(\sqrt{q}, 0) \rightarrow 0 \text{ für } q \rightarrow \infty$$

oder

$$g(q) \leq \beta(r, -\ln(\sqrt{q})) \leq \beta(1, \sqrt{q}) \rightarrow 0 \text{ für } q \rightarrow \infty,$$

und damit die behauptete Konvergenz.

Wir definieren nun eine Funktion  $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mittels

$$h(q) := \begin{cases} 0, & \text{falls } q = 0 \\ g(q), & \text{falls } q \in (0, 1] \\ g(1) + q - 1, & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

Wegen der Eigenschaften von  $g$  ist dies eine  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion und es gilt

$$h(rs) \geq \beta(r, -\ln(s)) \text{ für alle } r \in [0, 1], s \in (0, 1].$$

Da  $h \in \mathcal{K}_\infty$  ist, existiert  $h^{-1}$ . Mit  $\alpha = h^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$  gilt dann

$$rs \leq \alpha(\beta(r, -\ln(s))) \text{ für alle } r \in [0, 1], s \in (0, 1]$$

und mit  $t = -\ln(s)$ , also  $s = e^{-t}$ , folgt

$$re^{-t} \leq \alpha(\beta(r, t)), \text{ für alle } r \in [0, 1], t \geq 0$$

also die Behauptung. □

Neben diesem Lemma benötigen wir noch zwei andere Sätze, die wir hier nicht beweisen werden. Betrachte

**Satz 3.9 (Rademacher)** Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^d$  eine offene Menge und  $\tilde{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz stetige Funktion. Dann gibt es in jeder offenen Menge  $B \subset O$  einen Punkt  $x \in B$ , in dem  $\tilde{V}$  differenzierbar ist.

**Satz 3.10 (Wilson '69, Lin/Sontag/Wang '96)** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) mit Vektorfeld  $f$ . Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und sei  $\tilde{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz stetige Funktion. Dann gibt es für alle stetigen Funktionen  $\gamma, \delta : O \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

$$|V(x) - \tilde{V}(x)| \leq \gamma(x)$$

für alle  $x \in O$  und

$$DV(x)f(x) \leq D\tilde{V}f(x) + \delta(x)$$

für alle  $x \in O$  in denen  $\tilde{V}$  differenzierbar ist.

Nun kommen wir zum **Beweis von Satz 3.7**:

Wir beweisen hier den globalen Fall, der lokale Fall funktioniert analog, ist aber etwas technischer.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\|f(x)\| \leq 1$  ist, ansonsten können wir  $f$  durch  $f/\sqrt{1+\|f\|^2}$  ersetzen (wenn  $V$  eine Ljapunov-Funktion für das veränderte  $f$  ist, dann ist es mit gleichem  $W$  auch eine für das ursprüngliche  $f$ ). Betrachte nun die Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus der Definition der asymptotischen Stabilität und die Funktion  $\alpha$  aus Lemma 3.8. O.B.d.A. können wir  $\beta(1,0) \geq 1$  und  $\alpha(r) \leq 1$  für  $r \leq \beta(1,0)$  annehmen.

Sei nun  $L$  eine Lipschitz-Konstante für  $f$  für alle  $x$  mit  $\|x\| \leq \beta(1,0)$ . Wir definieren eine Funktion  $\omega : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mittels

$$\omega(r) = \frac{1}{\beta(1,0)} \int_0^r \alpha(s)^{L+1} ds \quad \text{für } r \in [0, \beta(1,0)]$$

und  $\omega(r) = \omega(\beta(1,0))$  für  $r > \beta(1,0)$ . Dann gilt  $\omega(r) \leq \alpha(r)$  und  $\omega'(r) \leq \alpha(s)^{L+1}$  für  $r \in [0, \beta(1,0)]$ , insbesondere ist  $\omega$  Lipschitz mit Konstante  $L_R = \alpha(R)^{L+1}$  auf  $[0, R]$  für alle  $R \in [0, \beta(1,0)]$  und global Lipschitz mit Konstante  $L_{\beta(1,0)}$ .

Wir setzen nun  $\tilde{W}(x) = \omega(\|x\|)$ . Beachte, dass  $\tilde{W}$  auf  $B_R(0)$  Lipschitz-stetig mit der Konstanten  $L_R$  von  $\omega$  ist und global Lipschitz-stetig ist mit der Konstanten  $L_W := L_{\beta(1,0)}$ . Mittels  $\tilde{W}$  definieren wir

$$\tilde{V}(x) := \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt.$$

Für  $\tilde{V}$  zeigen wir drei Eigenschaften

(i) Es gibt  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \mathcal{K}_\infty$  mit

$$\tilde{\alpha}_1(\|x\|) \leq \tilde{V}(x) \leq \tilde{\alpha}_2(\|x\|).$$

(ii)  $\tilde{V}$  ist Lipschitz stetig

(iii) In allen Punkten  $x \in \mathbb{R}^d$ , in denen  $\tilde{V}$  differenzierbar ist gilt

$$D\tilde{V}(x)f(x) \leq -\tilde{W}(x).$$

“(i)”: Wir zeigen zunächst die Existenz von  $\alpha_2$ : Sei  $\tau(x) := \inf\{t \geq 0 \mid \|\varphi(t, x)\| \leq 1\}$  und  $\sigma(r) := \inf\{t \geq 0 \mid \beta(r, t) \leq 1\}$ . Hierfür gilt  $\tau(x) \leq \sigma(\|x\|)$ . Falls  $\|x\| > 1$  ist, folgt  $\tau(x) > 0$  und damit

$$\tilde{V}(x) = \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\tau(x)} \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt + \int_{\tau(x)}^{\infty} \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\
&\leq \tau(x) \omega(\beta(1, 0)) + \int_{\tau(x)}^{\infty} \alpha(\beta(1, t - \tau(x))) dt \\
&\leq \sigma(\|x\|) \omega(\beta(1, 0)) + \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\
&= \sigma(\|x\|) \omega(\beta(1, 0)) + 1 \leq \sigma(\|x\|) \omega(\beta(1, 0)) + \|x\| =: \tilde{\alpha}_2(\|x\|).
\end{aligned}$$

Beachte, dass  $\sigma(r)$  monoton wachsend mit  $\sigma(0) = 0$  ist, weswegen  $\tilde{\alpha}_2$  tatsächlich aus  $K_\infty$  ist.

Falls  $\|x\| < 1$  ist, folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(x) &= \int_0^{\infty} \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\
&\leq \int_0^{\infty} \alpha(\beta(\|x\|, t)) dt \\
&\leq \int_0^{\infty} e^{-t} \|x\| dt = \|x\| \leq \tilde{\alpha}_2(\|x\|).
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Existenz von  $\alpha_1$  betrachten wir wiederum  $\tau(x)$ . Beachte, dass wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  die Abschätzung

$$\|\varphi(\tau(x) + t, x)\| \geq e^{-Lt} \|\varphi(\tau(x), x)\|$$

für  $\|x\| \leq 1$  folgt; da  $f$  global beschränkt ist, muss die Zeit  $\tau(x)$  gegen unendlich wachsen, wenn  $\|x\|$  gegen unendlich strebt. Aus diesen beiden Eigenschaften erhält man mit ähnlichen Integralabschätzungen wie oben und einer geeigneten unteren Schranke für  $\widetilde{W}$  die untere Schranke  $\tilde{\alpha}_2$  für  $\tilde{V}$ .

“(ii)”: Beachte zunächst, dass für  $x, y \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|x\|, \|y\| \leq 1$  aus Gronwall’s Lemma die Ungleichung

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{Lt} \|x - y\|$$

folgt. Mit

$$\delta(t) := \max\{\|\varphi(t, x)\|, \|\varphi(t, y)\|\} \leq \beta(\max\{\|x\|, \|y\|\}, t)$$

gilt für solche  $x$  und  $y$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\tilde{V}(x) - \tilde{V}(y)| &\leq \int_0^{\infty} |\widetilde{W}(\varphi(t, x)) - \widetilde{W}(\varphi(t, y))| dt \\
&\leq \int_0^{\infty} L_{\delta(t)} \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| dt \\
&\leq \int_0^{\infty} \alpha(\delta(t))^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\
&\leq \int_0^{\infty} \alpha(\beta(\max\{\|x\|, \|y\|\}, t))^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\
&\leq \int_0^{\infty} e^{-(L+1)t} \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x - y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} \int_0^\infty e^{-t} dt \\
&= \|x - y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} \leq \|x - y\|,
\end{aligned}$$

was die behauptete Lipschitz-Stetigkeit (mit Lipschitz-Konstante 1) zeigt.

Seien nun beliebige  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gegeben. Sei  $M = \max\{\|x\|, \|y\|\}$  und  $L_M$  eine Lipschitz-Konstante für  $f$  auf  $B_{\beta(M,0)}$ . Wiederum mit Gronwall's Lemma erhalten wir

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{L_M t} \|x - y\|$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
|\tilde{V}(x) - \tilde{V}(y)| &= \left| \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^{\sigma(M)} \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_0^{\sigma(M)} \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\
&\quad + \left| \int_{\sigma(M)}^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_{\sigma(M)}^\infty \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\
&\leq \int_0^{\sigma(M)} |\tilde{W}(\varphi(t, x)) - \tilde{W}(\varphi(t, y))| dt \\
&\quad + \left| \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, \varphi(\sigma(M), x))) - \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, \varphi(\sigma(M), y))) dt \right| \\
&\leq \int_0^{\sigma(M)} L_W e^{L_M t} \|x - y\| dt + |\tilde{V}(\varphi(\sigma(M), x)) - \tilde{V}(\varphi(\sigma(M), y))| \\
&\leq \frac{L_W}{L_M} (e^{L_M \sigma(M)} - 1) \|x - y\| + \|e^{L_M \sigma(M)}\| \|x - y\| =: L_{V,M} \|x - y\|,
\end{aligned}$$

also die behauptete Lipschitz-Stetigkeit.

“(iii)”: Aus der Definition von  $\tilde{V}$  folgt die Gleichung

$$\tilde{V}(\varphi(\tau, x)) - \tilde{V}(x) \leq - \int_0^\tau \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt,$$

aus der man die gewünschte Eigenschaft durch Differenzieren nach  $\tau$  in  $\tau = 0$  erhält.

Wir wenden nun Satz 3.10 mit  $O = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $\gamma(x) = \min\{\tilde{\alpha}_1(\|x\|), \tilde{\alpha}_2(\|x\|)\}/2$  und  $\delta(x) = \tilde{W}(x)/2$  an.

Mit  $\alpha_1(r) = \tilde{\alpha}_1(r)/2$  und  $\alpha_2(r) = 3\tilde{\alpha}_2(r)/2$  folgt damit

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

und mit  $W(x) = \tilde{W}(x)/2$  gilt für alle Punkte, in denen  $\tilde{V}$  differenzierbar ist, die Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -W(x).$$

Sei  $x$  nun ein Punkt, in dem  $\tilde{V}$  nicht differenzierbar ist. Nach Satz 3.9 gibt es in jeder Umgebung  $B_{\frac{1}{n}}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , einen Punkt  $x_n$ , in dem  $\tilde{V}$  differenzierbar ist. Wegen  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$  und der Stetigkeit von  $DV$ ,  $f$  und  $W$  gilt damit

$$DV(x)f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} DV(x_n)f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} -W(x_n) = -W(x),$$

also die gewünschte Eigenschaft.  $\square$

**Bemerkung 3.11** Für einfache Systeme kann die Konstruktion von  $\tilde{V}$  in diesem Beweis z.B. mit MAPLE durchgeführt werden. Die Wahl von  $\tilde{W}$  kann dabei anders als in diesem Beweis gewählt werden, wichtig ist dabei vor allem, dass das Integral in der Definition von  $\tilde{V}$  existiert. Oftmals stellt sich heraus, dass die Funktion  $\tilde{V}$  dann bereits differenzierbar ist.  $\square$

**Übungsaufgabe:** Berechne  $\tilde{V}$  für die Differentialgleichungen (2.1) mit  $f$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

und

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - \|x\| x_1 \\ x_1 - \|x\| x_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

für

$$(i) \tilde{W}(x) = \|x\|, \quad (ii) \tilde{W}(x) = 2\|x\|^2, \quad (iii) \tilde{W}(x) = 2\|x\|^3.$$

**Hinweise:** (i) Die exakten Lösungen lauten:

$$\varphi(t, x) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t)x_1 - \sin(t)x_2 \\ \sin(t)x_1 + \cos(t)x_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{t\|x\| + 1} \begin{pmatrix} \cos(t)x_1 - \sin(t)x_2 \\ \sin(t)x_1 + \cos(t)x_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Versuche zunächst, Gleichungen für  $\|\varphi(t, x)\|$  zu ermitteln. MAPLE kann hier helfen, vielleicht muss man aber bei einigen Termen per Hand nachhelfen.

(iii) Nicht für alle Kombinationen  $f$  und  $\tilde{W}$  existiert die Lösung!



## Kapitel 4

# Kontrollierbarkeit und Stabilisierbarkeit

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der asymptotischen Stabilität für Differentialgleichungen der Form (2.1) auf nichtlineare Kontrollsysteme der Form (1.1) verallgemeinern. Hierfür gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten. Die vielleicht natürlichere Form der Verallgemeinerung ist die sogenannte *asymptotische Kontrollierbarkeit*, die wir in unserem ersten Abschnitt betrachten wollen.

### 4.1 Asymptotische Kontrollierbarkeit

Die Definition der asymptotischen Kontrollierbarkeit beruht auf der Idee, die gleichmäßige Konvergenz gegen 0, so wie sie die Definition der asymptotischen Stabilität fordert, auch für das Kontrollsystem zu verlangen, allerdings nur für passend gewählte Kontrollfunktionen  $u \in \mathcal{U}$ . Diese passende Auswahl darf dabei in Abhängigkeit des jeweils betrachteten Anfangswerts geschehen.

Wir definieren zunächst mittels

$$\|u\|_\infty := \inf\{C \geq 0 \mid \|u(t)\| \leq C \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

eine Norm auf  $\mathcal{U}$ . Wenn man nun bei der erwähnten Auswahl der Kontrollfunktionen solche mit beliebig großer Norm  $\|u\|_\infty$  zulässt, bekommt man Probleme mit der Regularität des Systems, da ja die Lipschitz-Konstante von  $f(x, u)$  insbesondere von  $\|u\|$  abhängen kann. Deswegen beschränken wir die Klasse der zulässigen Kontrollfunktionen in geeigneter Weise. Dazu dient die folgende weitere Klasse von Vergleichsfunktionen.

**Definition 4.1** Wir definieren die folgende weitere Klasse von Vergleichsfunktionen:

$$\mathcal{N} := \{\delta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \delta \text{ ist stetig und monoton wachsend}\}$$

□

Während die Bezeichnungen  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  keine offensichtliche Bedeutung haben, kann man  $\mathcal{N}$  als “nichtabnehmend” interpretieren.

Für Differentialgleichungen haben wir asymptotische Stabilität für Gleichgewichte  $x^*$ , also Punkte mit  $f(x^*) = 0$  definiert. Für Kontrollsysteme gehen wir ähnlich vor, allerdings muss hier nicht  $f(x^*, u) = 0$  für alle  $u \in U$  gelten, sondern nur

$$f(x^*, 0) = 0, \quad (4.1)$$

wobei wir o.B.d.A. voraussetzen, dass  $0 \in U$  liegt. Wir nennen also einen Punkt  $x^* \in \mathbb{R}^d$  ein *Gleichgewicht* für das Kontrollsystem (1.1), wenn (4.1) gilt.

Damit können wir nun die asymptotische Kontrollierbarkeit definieren.

**Definition 4.2** Sei  $x^* \in \mathbb{R}^d$  ein Gleichgewicht des Kontrollsystems (1.1). Dann definieren wir:

(i)  $x^*$  heißt *(lokal) asymptotisch kontrollierbar*, falls eine Umgebung  $N$  von  $x^*$ , eine Funktion  $\delta \in \mathcal{N}$  und eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existieren, so dass für alle  $x \in N$  ein  $u_x \in \mathcal{U}$  existiert mit  $\|u\|_\infty \leq \delta(\|x - x^*\|)$  und

$$\|\varphi(t, x, u_x) - x^*\| \leq \beta(\|x - x^*\|, t) \text{ für alle } t \geq 0. \quad (4.2)$$

(ii)  $x^*$  heißt *global asymptotisch kontrollierbar*, falls (i) mit  $N = \mathbb{R}^d$  gilt.  $\square$

Wenn  $N$  in (i) beschränkt ist, so können wir  $\delta(\|x - x^*\|)$  durch die Konstante  $C = \sup_{x \in N} \delta(\|x - x^*\|)$  ersetzen. Die Vergleichsfunktion  $\delta$  kommt also nur in der globalen Definition richtig zum Tragen; dort bewirkt sie, dass man für weit von  $x^*$  entfernte Anfangswerte  $x$  mit großen Kontrollen steuern darf.

Wie auch im Falle asymptotischer Stabilität werden wir üblicherweise o.B.d.A.  $x^* = 0$  annehmen.

Asymptotische Kontrollierbarkeit ist eine sehr natürliche Verallgemeinerung der asymptotischen Stabilität, weswegen sie als theoretische Eigenschaft nichtlinearer Kontrollsysteme eine wichtige Rolle spielt.

In der Praxis jedoch ist dies oft nicht das, was man haben will. Nehmen wir an, dass das gegebene Kontrollsystem das Verhalten eines wirklichen (mechanischen, chemischen, elektronischen, ökonomischen, ...) Systems modelliert. Ziel einer solchen mathematischen Modellierung ist es oft, eine Steuerstrategie zu entwerfen, die ein vorgegebenes Kriterium erfüllt und die sich in der Praxis realisieren lässt. In unserem Fall wäre das Kriterium, dass sich das Gleichgewicht  $x^*$  für das gesteuerte System wie eine asymptotisch stabiles Gleichgewicht verhält. Aus Basis der asymptotischen Kontrollierbarkeit würde man dann versuchen, für einen vorgegebenen Anfangswert  $x$  eine Kontrollfunktion  $u_x$  zu berechnen, so dass (4.2) erfüllt ist. Hierbei stößt man auf diverse Probleme:

- (i) Die Funktion  $u_x$  muss für alle Zeiten  $t > 0$  im Voraus berechnet werden. Falls keine geschlossene Formel für diese Funktion zur Verfügung steht, ist dies praktisch unmöglich.



- (ii) Da man in der Praxis nicht davon ausgehen kann, dass das gesteuerte echte System immer den gleichen Anfangswert hat, muss man  $u_x$  sogar für eine ganze Menge von Anfangswerten berechnen, was die Probleme in (i) noch vergrößert.
- (iii) Durch (praktisch immer vorhandene) kleine Abweichungen zwischen dem mathematischen Modell und dem echten System wird das im Voraus berechnete  $u_x$  immer ungenauer, je größer  $t$  wird. Für sehr große  $t$  wird  $u_x$  in der Regel keine sinnvolle Steuerstrategie mehr sein.

Nun gibt es durchaus viele Steuerungsproblemen, die durch geschickte (analytische oder numerische) Berechnung von zeitabhängigen Kontrollfunktionen  $u \in \mathcal{U}$  befriedigend gelöst werden können, z.B. die zeit- oder energieoptimale Steuerung eines Fahrzeugs von  $a$  nach  $b$ . Stabilitätsprobleme gehören aber aus den oben genannten Gründen üblicherweise nicht dazu.

Statt eine Steuerstrategie mittels Funktionen  $u \in \mathcal{U}$  zu definieren, verwendet man statt dessen in der Praxis das Konzept des *Zustandsfeedbacks*, das wir im folgenden Abschnitt behandeln.

## 4.2 Feedback–Stabilisierbarkeit

Statt zeitabhängigen Kontrollfunktionen  $u(t)$  wollen wir nun Strategien betrachten, bei denen der zur Zeit  $t$  benutzte Kontrollwert  $u(t)$  direkt abhängig vom aktuellen Zustand  $x(t)$  gewählt wird.

Dies führt auf die folgende Definition.

**Definition 4.3** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1). Eine Abbildung  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow U$  heißt *Zustandsfeedback* oder *Rückkopplung*. Die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)) \quad \text{mit } f_F(x) = f(x, F(x)) \quad (4.3)$$

heißt *Feedback–geregelt* oder *rückgekoppeltes* oder einfach nur *geregelt* System. Die Lösungen von (4.3) bezeichnen wir mit  $\varphi(t, x, F)$ .  $\square$

Bei den Ingenieuren spricht man von *Steuerung*, wenn zeitabhängige Kontrollfunktionen  $u(t)$  betrachtet werden und von *Regelung*, wenn zustandsabhängige Feedbacks  $F(x)$  benutzt werden.

Natürlich sollte die Abbildung  $F$  zumindest stetig sein, damit die Existenz von Lösungen von (4.3) garantiert ist; besser wäre Lipschitz–Stetigkeit oder sogar Differenzierbarkeit von  $F$ . In der obigen Definition ist dieser Punkt mit Absicht offen gelassen, wir werden aber zunächst immer mindestens Stetigkeit von  $F$  voraussetzen.

Mit dieser Art von Regelungsstrategie können wir eine andere Verallgemeinerung der asymptotischen Stabilität definieren.

**Definition 4.4** Sei  $x^* \in \mathbb{R}^d$  ein Gleichgewicht des Kontrollsystems (1.1). Dann heißt  $x^*$  *lokal bzw. global stabilisierbar* mit stetigem Feedback (oder kurz *feedback-stabilisierbar*), falls eine stetige Abbildung  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow U$  existiert, so dass das geregelte System (4.3) lokal bzw. global asymptotisch stabil ist.  $\square$

**Bemerkung 4.5** (i) Falls  $f_F$  nicht Lipschitz-stetig ist, können mehrere verschiedene Lösungen von (4.3) zu einem Anfangswert existieren. In diesem Fall nehmen wir an, dass alle diese Lösungen die Bedingungen aus Definition 2.4 erfüllen.

(ii) Obwohl hier asymptotische Stabilität verlangt wird, verwenden wir hier die kürzere Bezeichnung “feedback-stabilisierbar” statt “asymptotisch feedback-stabilisierbar”.  $\square$

Wir werden uns im Verlauf dieser Vorlesung vorwiegend mit Feedback-Stabilisierung beschäftigen. Insbesondere wollen wir dabei die folgenden Fragen betrachten und (zumindest teilweise) beantworten:

- Wann ist ein Gleichgewicht feedback-stabilisierbar?
- Wie kann man ein stabilisierendes Feedback berechnen?
- Was kann man noch aussagen bzw. erreichen, wenn kein stetiges stabilisierendes Feedback existiert?

Das Konzept der asymptotischen Kontrollierbarkeit werden wir dabei stets als Hilfsmittel verwenden, auch wenn es in diesen Fragen nicht explizit auftaucht.

Zunächst zeigen wir, dass asymptotische Kontrollierbarkeit aus Feedback-Stabilisierbarkeit folgt. Dies zeigt der folgende Satz.

**Satz 4.6** Betrachte ein Kontrollsystem mit Gleichgewicht  $x^* = 0$ . Dann gilt: Wenn das Gleichgewicht lokal bzw. global feedback-stabilisierbar ist, so ist es auch lokal bzw. global asymptotisch kontrollierbar.

**Beweis:** Wir beweisen den lokalen und globalen Fall gemeinsam, wobei wir im globalen Fall  $N = \mathbb{R}^d$  setzen.

Sei  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus der Definition der asymptotischen Stabilität, die nach Voraussetzung für das geregelte System  $f_F$  für ein geeignetes Feedback  $F$  gilt. Also gilt

$$\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t) \tag{4.4}$$

für alle  $x \in N$  und alle  $t \geq 0$ .

Wir setzen nun  $\delta(r) := \max\{\|F(x)\| \mid \|x\| \leq \beta(r, 0)\}$ . Wegen der Stetigkeit von  $F$  ist dies tatsächlich eine Funktion der Klasse  $\mathcal{N}$ . Für  $x \in N$  wählen wir

$$u_x(t) = F(\varphi(t, x, F))$$

für eine der (möglicherweise mehreren) Lösungen von (4.3). Da  $F$  und  $\varphi(t, x, F)$  stetig sind, ist  $u_x$  stetig und damit messbar. Für die zugehörige Lösung  $\varphi(t, x, u_x)$  von (1.1) gilt

$$\varphi(t, x, u_x) = x + \int_0^t f(\varphi(\tau, x, u_x), u_x(\tau)) d\tau.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, F) &= x + \int_0^t f_F(\varphi(\tau, x, F)) d\tau \\ &= x + \int_0^t f(\varphi(\tau, x, F), F(\varphi(\tau, x, F))) d\tau \\ &= x + \int_0^t f(\varphi(\tau, x, F), u_x(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

folgt aus Satz 1.4 die Gleichung  $\varphi(t, x, u_x) = \varphi(t, x, F)$  für alle  $t \geq 0$ . Beachte, dass wir hier nur die Eindeutigkeit der Lösungen von (1.1) benötigen, nicht die i.A. nicht erfüllte Eindeutigkeit der Lösungen von (4.3).

Also folgt (4.2) aus (4.4). Aus  $\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, 0)$  folgt darüberhinaus die Ungleichung  $\|F(\varphi(t, x, F))\| \leq \delta(\|x\|)$  und damit  $\|u_x\|_\infty \leq \delta$ . Damit folgt die behauptete asymptotische Stabilität.  $\square$

**Bemerkung 4.7** Beachte, dass wir hier Kontrollfunktionen  $u_x$  konstruiert haben, die stetig sind, also bei weitem nicht die ganze Klasse der messbaren Kontrollfunktionen ausschöpfen. Dies legt bereits nahe, dass stetige Feedback-Stabilisierung eine echt stärkere Eigenschaft als asymptotische Kontrollierbarkeit ist, was wir später noch — an einem Beispiel — formal beweisen werden.  $\square$

**Übungsaufgabe:** Betrachte die 1d-Kontrollsysteme

- (1)  $\dot{x}(t) = u(t)x(t)^2$
- (2)  $\dot{x}(t) = u(t)x(t)^2 + x(t)$
- (3)  $\dot{x}(t) = u(t)|x(t)| + x(t)$

Finde heraus, ob diese Systeme asymptotisch kontrollierbar bzw. stabilisierbar mit stetigem Feedback sind.

**Hinweise:** (i) Für alle drei Beispiele existieren global stabilisierende Feedbacks  $F$ , die aber nicht in jedem Fall stetig sind. Versuche zuerst, solche  $F$  zu finden und gegebenenfalls zu begründen, warum diese nicht stetig sein können, und schließe dann mit der Technik aus dem Beweis von Satz 4.6 auf die Existenz bzw. Nichtexistenz von Kontrollfunktionen  $u_x$ , die die Bedingungen aus Definition 4.2 erfüllen.

(ii) Beachte, dass 1d-Differentialgleichungen der Form  $\dot{x}(t) = f(x)$  für stetiges  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann global asymptotisch stabil sind, wenn  $f(x) < 0$  für  $x > 0$  und  $f(x) > 0$  für  $x < 0$  gilt, was man kurz als  $f(x)x < 0$  für  $x \neq 0$  schreiben kann. Eine Strategie zum Finden von  $F$  in (i) wäre also,  $F$  zu suchen, so dass die Ungleichung  $f(x, F(x))x < 0$  erfüllt ist.



# Kapitel 5

## Kontroll–Ljapunov–Funktionen

### 5.1 Definition und äquivalente Formulierungen

In diesem Kapitel wollen wir ein wesentliches Hilfsmittel bei der Betrachtung von Stabilität und Stabilisierbarkeit von Kontrollsystemen betrachten, die Kontroll–Ljapunov–Funktion. Dies ist eine direkte Verallgemeinerung der Ljapunov–Funktion für unkontrollierte Differentialgleichungen, wobei wir in der Definition allerdings keine Differenzierbarkeit annehmen.

**Definition 5.1** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$ . Eine stetige Funktion  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *lokale Kontroll–Ljapunov–Funktion*, falls Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ , eine stetige Funktion  $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , eine Funktion  $\delta \in \mathcal{N}$ , eine Umgebung  $N$  der 0 und eine Konstante  $C > 0$  existiert, so dass  $W(x) > 0$  gilt für alle  $x \in \text{cl} N$ ,  $V(x) < C$  für alle  $x \in N$ ,  $V(x) = C$  für alle  $x \in \partial N$  und die Ungleichungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (5.1)$$

und

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq \delta(\|x\|)}} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \leq V(x) \quad (5.2)$$

gelten für alle  $x \in N$  und alle  $t > 0$ .

Die Funktion  $V$  heißt *globale Kontroll–Ljapunov–Funktion*, falls  $V$  und  $W$  diese Bedingungen für  $N = \mathbb{R}^d$  und  $C = \infty$  erfüllen.

Das Paar  $(V, W)$  wird dabei auch als *Kontroll–Ljapunov–Paar* bezeichnet.  $\square$

**Bemerkung 5.2** Analog zu Lemma 3.2 können wir annehmen, dass  $W(x) = g(V(x))$  für eine Lipschitz–stetige Funktion  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  und alle  $x \in N$  ist.  $\square$

Im differenzierbaren Fall erhält man eine Bedingung, die ähnlich zu der für unkontrollierte Differentialgleichungen ist.

**Lemma 5.3** Eine stetige Funktion  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , die auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  stetig differenzierbar ist, erfüllt die Bedingung (5.2) genau dann, wenn die Ungleichung

$$\inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \delta(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) \quad (5.3)$$

für alle  $x \in N$  gilt.

**Beweisidee:** Durch Differenzieren bzw. Integrieren der entsprechenden Ungleichungen; tatsächlich ist dies wegen des Infimums hier nicht ganz trivial, lässt sich aber mit einigen technischen Tricks bewerkstelligen.  $\square$

## 5.2 Kontroll-Ljapunov-Funktion $\Leftrightarrow$ asymptotische Kontrollierbarkeit

Wir formulieren nun die analogen Resultate zu den Sätzen 3.4 und 3.7. Die zugehörigen Beweise werden wir nicht komplett ausformulieren, aber zumindest skizzieren.

**Satz 5.4** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$ . Angenommen, es existiert eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 5.1. Dann ist das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) asymptotisch kontrollierbar.

Hierbei ist die Vergleichsfunktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus Definition 4.2 gegeben durch

$$\beta(r, t) = c\alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(r))), \quad (5.4)$$

wobei  $\mu$  die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r \quad (5.5)$$

ist mit  $g$  aus Bemerkung 5.2 ist und  $c$  eine beliebige Konstante mit  $c > 1$  ist.

**Beweisidee:** Die Beweisidee verläuft ähnlich wie beim Satz 3.4, wobei hier zusätzlich noch eine passende Kontrollfunktion gewählt werden muss. Dazu wählt man ein  $\Delta > 0$  und die Folge von Zeiten  $t_i = i\Delta$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Nun konstruiert man induktiv eine Kontrollfunktion  $u_x$  wie folgt: Für  $x_0 := x$  wählen wir eine Funktion  $u_0$ , so dass das Infimum in

$$\inf_{\substack{u \in U \\ \|u\|_\infty \leq \delta(\|x\|)}} \left\{ V(\varphi(\Delta, x_0, u)) + \int_0^\Delta W(\varphi(s, x_0, u)) ds \right\}$$

zumindest approximativ angenommen wird. Wir setzen  $x_1 = \varphi(\Delta, x_0, u_0)$  und berechnen für  $x_1$  eine Kontrollfunktion  $u_1$  nach dem selben Prinzip, setzen  $x_2 = \varphi(\Delta, x_1, u_1)$  und so weiter. Die so berechneten Kontrollfunktionen setzen wir gemäß der Regel  $u_x(t) = u_i(t - t_i)$  für  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  zu einer Kontrollfunktion  $u_x$  zusammen. Die zugehörige Trajektorie erfüllt dann (für hinreichend kleines  $\Delta$ ) approximativ die Gleichung

$$V(\varphi(t, x, u_x)) \leq V(x) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u_x)) ds,$$

womit wir wie im Beweis von Satz 3.4 fortfahren können.  $\square$

Als nächstes betrachten wir eine Umkehrung von Satz 5.4.

**Satz 5.5** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0,0) = 0$ . Wenn das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) asymptotisch kontrollierbar ist, dann existiert eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 5.1.

**Beweisskizze:** Die Konstruktion ist ganz ähnlich zum Beweis von Satz 3.7; wie dort beschränken wir uns auf den globalen Fall. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass  $\delta(r) \equiv C$  aus Definition 4.2 eine konstante Funktion ist (der allgemeine Fall erfordert diverse technische Vorbereitungen, die hier zu weit führen würden). Wir wählen  $W$  wie  $\widetilde{W}$  im Beweis von Satz 3.7 und definieren

$$V(x) := \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \int_0^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds.$$

Die oberen und unteren Schranken  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  leitet man analog zum Beweis von Satz 3.7 her. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} V(x) &= \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \int_0^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds \\ &= \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + \int_t^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \\ &= \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + \int_0^\infty W(\varphi(s, \varphi(t, x, u), u(t+\cdot))) ds \right\} \\ &\geq \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\}, \end{aligned}$$

also gerade die behauptete Ungleichung. Mit etwas mehr Aufwand lässt sich hier sogar Gleichheit beweisen, also

$$V(x) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\},$$

und mit Hilfe dieser Ungleichung beweist man Stetigkeit von  $V$ : Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann können wir für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  und jedes  $t > 0$  eine Kontrollfunktion  $u_{x,t} \in \mathcal{U}$  mit  $\|u_{x,t}\|_\infty \leq C$  finden, so dass

$$\begin{aligned} V(x) &= \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\} \\ &\geq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{x,t})) - \varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Beachte, dass  $\varphi(t, x, u_{x,t})$  gegen Null konvergiert, da ansonsten das Integral über  $W$  unendlich wird, was nicht sein kann, da  $V(x)$  endlich ist. Für gegebenes  $R > 0$  wählen wir nun  $\tilde{\varepsilon}$  so klein und  $t > 0$  so groß, dass

$$\|\varphi(t, x, u_{x,t})\| \leq \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \alpha_2(2\tilde{\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

gilt für alle  $x$  mit  $\|x\| \leq R$ . Für  $x, y \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|x\| \leq R$  und  $\|y\| \leq R$  folgt dann

$$\begin{aligned} V(x) - V(y) &\leq \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\} \\ &\quad - \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq C}} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, y, u)) ds + V(\varphi(t, y, u)) \right\} \\ &\leq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{y,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{y,t})) \\ &\quad - \int_0^t W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds - V(\varphi(t, y, u_{y,t})) + \varepsilon \\ &\leq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{y,t})) - W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{y,t})) - V(\varphi(t, y, u_{y,t})) + \varepsilon \end{aligned}$$

Falls nun  $\|x - y\|$  klein ist, folgt aus Gronwalls Lemma, dass auch

$$\|\varphi(\tau, x, u_{y,t}) - \varphi(\tau, y, u_{y,t})\|$$

für  $\tau \in [0, t]$  klein ist. Falls also  $\|x - y\|$  hinreichend klein ist, erhalten wir

$$\int_0^t W(\varphi(s, x, u_{y,t})) - W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds \leq \varepsilon$$

und

$$\|\varphi(t, x, u_{y,t})\| \leq \|\varphi(t, y, u_{y,t})\| + \tilde{\varepsilon} \leq 2\tilde{\varepsilon}.$$

Aus dieser zweiten Ungleichung folgt

$$V(\varphi(t, x, u_{y,t})) \leq \alpha_2(\|\varphi(t, x, u_{y,t})\|) \leq \alpha_2(2\tilde{\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

Also gilt für  $x$  hinreichend nahe an  $y$  die Ungleichung

$$V(x) - V(y) \leq 3\varepsilon,$$

woraus aus Symmetriegründen die Ungleichung

$$|V(x) - V(y)| \leq 3\varepsilon$$

folgt. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt also die Stetigkeit von  $V$ . □

Beachte, dass wir hier — im Gegensatz zum Beweis von Satz 3.7 — keine Lipschitz-Stetigkeit erhalten. Es gibt allerdings (sehr komplizierte) Konstruktionen, mit denen man die Existenz Lipschitz-stetiger Kontroll-Ljapunov-Funktionen beweisen kann. Allerdings ist selbst für Lipschitz-stetige  $V$  der Satz 3.10 nicht anwendbar, da das “inf” vor der Ableitung die Anwendung dieses Satzes verhindert.

Ein Beispiel einer Kontroll-Ljapunov-Funktion werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.



## Kapitel 6

# Eine explizite Formel für stabilisierende Feedbacks

In diesem Kapitel werden wir eine explizite Formel für stabilisierende Feedbacks betrachten, die immer funktioniert, vorausgesetzt es existiert eine zwei mal stetig differenzierbare Kontroll-Ljapunov-Funktion für die die Funktion  $\delta \in \mathcal{N}$  mit  $\delta(0) = 0$  gewählt werden kann. Eine solche Formel gibt es allerdings nicht für allgemeine Kontrollsysteme der Form (1.1), weswegen wir uns auf eine Teilklasse einschränken müssen.

Wir betrachten in diesem Kapitel *kontroll-affine* Kontrollsysteme. Diese sind gegeben durch

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) := f_0(x(t)) + \sum_{k=1}^m f_k(x)u_k(x) \quad (6.1)$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in U = \mathbb{R}^m$ , wobei die  $f_i$  lokal Lipschitz stetige Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$  sind.

Wir betrachten zunächst, welchen Konsequenzen diese Form auf die Existenz von Kontroll-Ljapunov-Funktionen hat.

### 6.1 Feedbacks und Kontroll-Ljapunov-Funktionen

Wir betrachten in diesem Kapitel stetige Feedbacks  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die die folgende Annahme erfüllen.

$$F \text{ ist Lipschitz-stetig auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ und erfüllt } F(0) = 0 \quad (6.2)$$

Die Bedingung  $F(0) = 0$  kann hierbei o.B.d.A. angenommen werden, ansonsten transformieren wir  $f$  und  $F$  mittels  $\tilde{f}(x, u) = f(x, u + F(0))$ ,  $\tilde{F}(x) = F(x) - F(0)$ .

Für diese Abbildungen gilt der folgende Satz.

**Satz 6.1** Betrachte ein kontroll-affines Kontrollsystem (6.1). Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein stetiges Feedback, das (6.2) erfüllt und für das die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)) := f(x(t), F(x(t)))$$

global asymptotisch stabil ist. Dann gibt es eine globale Kontroll–Lyapunov–Funktion  $V$ , die auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  zwei mal stetig differenzierbar ist und für die die Funktion  $\delta \in \mathcal{N}$  mit  $\delta(0) = 0$  gewählt werden kann.

**Beweis:** Wegen der kontroll–affinen Struktur ist  $f_F$  lokal Lipschitz stetig auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Durch die Multiplikation mit einer hinreichend “flachen” und Lipschitz stetigen Funktion  $\gamma(\|x\|)$  mit  $\gamma(0) = 0$  und  $\gamma(r) \leq 1$  für alle  $r \geq 0$ , kann man erreichen, dass  $\tilde{f}_F(x) := \gamma(\|x\|)f_F(x)$  lokal Lipschitz stetig auf ganz  $\mathbb{R}^n$  ist. Die asymptotische Stabilität überträgt sich dabei von  $f_F$  auf  $\tilde{f}_F$ , wobei man u.U. die Vergleichsfunktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  anpassen muss. Nach Satz 3.7 existiert dann eine stetige und auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  zwei mal stetig differenzierbare Lyapunov–Funktion für die über  $\tilde{f}_F$  definierte Differentialgleichung. Wegen

$$-W(x) \geq DV(x)\tilde{f}_F(x) \geq DV(x)f_F(x)$$

ist  $V$  auch eine Ljapunov Funktion für  $f_F$ . Mit

$$\delta(r) := \sup\{\|F(x)\| \mid \|x\| \leq r\}$$

gilt dann

$$\inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \delta(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq DV(x)f(x, F(x)) = DV(x)f_F(x) \leq -W(x).$$

Also ist  $V$  die gesuchte Kontroll–Ljapunov–Funktion. □

**Bemerkung 6.2** Tatsächlich kann man Satz 6.1 dahingehend verschärfen, dass man die Existenz einer auf ganz  $\mathbb{R}^n$  stetig differenzierbaren Funktion  $V$  beweisen kann. Hierzu wählt man eine differenzierbare  $\mathcal{K}_\infty$ –Funktion  $\alpha$  und setzt  $\tilde{V}(x) = \alpha(V(x))$ . Wenn die Funktion  $\alpha$  hinreichend kleine Ableitungen in der Nähe von 0 besitzt, so folgt  $D\tilde{V}(x_n) = \alpha'(V(x_n))DV(x_n) \rightarrow 0$  für  $x_n \rightarrow 0$ , woraus man die Differenzierbarkeit in  $x = 0$  folgern kann. Solch ein  $\alpha$  kann explizit konstruiert werden, was wir hier aus Zeitgründen aber nicht durchführen können. □

## 6.2 Eine Feedback–Formel

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, eine Umkehrung von Satz 6.1 zu beweisen, dass nämlich aus der Existenz einer Kontroll–Ljapunov–Funktion mit den dortigen Eigenschaften die Existenz eines stabilisierenden Feedbacks folgt. Wir werden aber noch etwas mehr als einen abstrakten Existenzbeweis führen, denn man kann sogar eine explizite Formel für  $F$  angeben. Diese Formel ist in der Literatur als *universelle Formel* oder — nach ihrem Erfinder E.D. Sontag — *Sontag–Formel* bekannt.

Im Prinzip lässt sich dies für Systeme der Form 6.1 durchführen, um die Rechnungen zu vereinfachen beschränken wir uns in diesem Abschnitt aber auf den Fall  $m = 1$ , d.h.

$$f(x, u) = f_0(x) + f_1(x)u.$$

Für diese Systeme gilt der folgende Satz.

**Satz 6.3** Betrachte ein kontroll-affines Kontrollsystem (6.1) mit  $m = 1$ . Sei  $V$  eine stetig differenzierbare und auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  zwei mal stetig differenzierbare globale Kontroll-Lyapunov-Funktion für die die Funktion  $\delta \in \mathcal{N}$  mit  $\delta(0) = 0$  gewählt werden kann. Dann ist  $F$  gegeben durch  $F(0) = 0$  und

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4}}{DV(x)f_1(x)} & \text{falls } DV(x)f_1(x) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } DV(x)f_1(x) = 0 \end{cases}$$

für  $x \neq 0$  ein stetiges Feedback, das (6.2) erfüllt und für das die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)) := f(x(t), F(x(t)))$$

global asymptotisch stabil ist.

**Beweis:** Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$\psi(a, b) := \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$$

und die Menge

$$S := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > 0 \text{ oder } a < 0\}.$$

Wir zeigen, dass  $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Abbildung ist. Dies folgt aus dem impliziten Funktionensatz, da  $\psi$  definiert werden kann mittels  $\phi(a, b, \psi(a, b)) = 0$  für

$$\phi(a, b, p) = bp^2 - 2ap - b.$$

Die Funktion  $\phi$  ist auf  $S$  differenzierbar und die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}(a, b, p) = 2bp - 2a$$

hat in einer (hinreichend kleinen) offenen Umgebung der Menge  $(a, b, \psi(a, b))$  vollen Rang: falls  $b = 0$  ist, gilt  $2bp - 2a = -2a > 0$  falls  $b = 0$  und falls  $b \neq 0$ , gilt

$$2b\psi(a, b) - 2a = 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a = \sqrt{a^2 + b^2} > 0.$$

Daher ist der implizite Funktionensatz anwendbar und  $\psi$  ist differenzierbar.

Wir zeigen nun zunächst die Lipschitz-Stetigkeit von  $F$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Wir können  $F$  mit Hilfe von  $\psi$  als

$$F(x) = -DV(x)f_1(x)\psi(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2)$$

schreiben. Falls  $x \neq 0$  und  $DV(x)f_1(x)^2 = 0$  ist, muss — wegen  $\inf_u DV(x)f(x, u) \leq -W(x) < 0$  — die Ungleichung  $DV(x)f(x, u) < 0$  gelten. Also gilt

$$(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2) \in S$$

für  $x \neq 0$ , weswegen  $\psi(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2)$  und damit auch  $F$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  aus Summen von Produkten Lipschitz-stetiger Funktionen besteht und damit selbst Lipschitz-stetig ist.

Wegen

$$DV(x)f_F(x) = DV(x)f_0(x) + DV(x)f_1(x)F(x) = -\sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4}$$

ist  $V$  eine Ljapunov-Funktion für  $f_F$  mit

$$W(x) = \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4},$$

woraus die globale asymptotische Stabilität folgt.

Es bleibt die Stetigkeit von  $F$  in  $x = 0$  zu zeigen, wegen  $F(0) = 0$  ist also zu zeigen, dass  $F(x_n) \rightarrow 0$  gilt für jede Folge  $x_n \rightarrow 0$ . Da  $V$  in  $0$  ein lokales Minimum besitzt folgt  $DV(0) = 0$ , also  $DV(x_n) \rightarrow 0$  für  $x_n \rightarrow 0$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

**1. Fall:** Falls  $DV(x)f_0(x) \geq 0$  ist, betrachte die Ungleichung

$$DV(x)f_0(x) + \inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \delta(\|x\|)}} DV(x)f_1(x)u = \inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \delta(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) \leq 0.$$

Das Infimum im ersten Summanden wird hier entweder für  $u = \delta(x)$  oder  $u = -\delta(x)$  angenommen und ist in jedem Fall gleich  $-\delta(x)|DV(x)f_1(x)|$ . Also erhalten wir unter Ausnutzung von  $DV(x)f_0(x) \geq 0$  die Ungleichung

$$|DV(x)f_0(x)| - \delta(x)|DV(x)f_1(x)| = DV(x)f_0(x) - \delta(x)|DV(x)f_1(x)| \leq 0.$$

Daraus folgt

$$|DV(x)f_0(x)| \leq \delta(x)|DV(x)f_1(x)|$$

und wegen

$$DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4} \leq 2|DV(x)f_0(x)| + \left(DV(x)f_1(x)\right)^2$$

ergibt sich

$$|F(x)| \leq 2 \frac{|DV(x)f_0(x_n)|}{|DV(x)f_1(x)|} + \frac{\left(DV(x)f_1(x)\right)^2}{|DV(x)f_1(x)|} \leq \delta(\|x\|) + |DV(x)f_1(x)|.$$

**2. Fall:** Falls  $DV(x)f_0(x) < 0$  ist, gilt

$$DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4} \leq \left(DV(x)f_1(x)\right)^2,$$

also

$$|F(x)| \leq \frac{\left(DV(x)f_1(x)\right)^2}{|DV(x)f_1(x)|} = |DV(x)f_1(x)| \leq \delta(\|x\|) + |DV(x)f_1(x)|,$$

d.h. wir erhalten die gleiche Abschätzung wie in Fall 1.

Für  $x_n \rightarrow 0$  folgt damit

$$|F(x_n)| \leq \underbrace{\delta(\|x_n\|)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|DV(x_n)|}_{\rightarrow 0} \underbrace{|f_1(x_n)|}_{\text{beschränkt}} \rightarrow 0.$$

Dies beendet den Beweis.  $\square$

**Bemerkung 6.4** Im allgemeinen Fall (d.h.  $m \geq 1$ ) erhält man für die  $i$ -te Komponente des Feedbacks  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Formel

$$F_i(x) = -DV(x)f_i(x) \psi \left( DV(x)f_0(x), \sum_{k=1}^m (DV(x)f_k(x))^2 \right)$$

für  $x \neq 0$  und  $F(0) = 0$ , mit  $\psi$  aus dem Beweis von Satz 6.3.  $\square$

Wir beenden dieses Kapitel mit einem Beispiel.

**Beispiel 6.5** Betrachte die mathematische Pendelgleichung, bei der der Nullpunkt dem aufgerichteten Pendel entspricht

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -kv(t) - \sin(\vartheta(t) + \pi), \end{aligned}$$

vgl. (2.4).

Wir addieren nun eine Kontrollvariable in der zweiten Komponente, also

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -kv(t) - \sin(\vartheta(t) + \pi) + u, \end{aligned}$$

was physikalische einer Kraft entspricht, mit der die Winkelgeschwindigkeit beeinflusst werden kann, z.B. durch einen Motor an der Drehachse.

Betrachte die Funktion

$$V(\vartheta, v) = \frac{1}{2} \left( (\vartheta + v)^2 + v^2 \right),$$

die nach oben und unten durch geeignete  $\mathcal{K}_\infty$  Funktionen abgeschätzt werden kann. Für diese Funktion gilt

$$DV(\vartheta, v)f((\vartheta, v), u) = (2\vartheta + v)v + (v + \vartheta)(-v + \sin(\vartheta) + u).$$

Wir zeigen, dass dies eine Kontroll-Lyapunov-Funktion für das gegebene System ist, indem wir geeignete  $u$  wählen, so dass die Ableitungsbedingung erfüllt ist:

Falls  $|\vartheta + v| > \|(\vartheta, v)\|/2$  ist, wählen wir

$$u = v - \sin(\vartheta) - \frac{(2\vartheta + v)v}{\vartheta + v} - (\vartheta + v)$$

und erhalten damit

$$DV(\vartheta, v)f((\vartheta, v), u) < (\vartheta + v)^2 < -\frac{1}{4}\|(\vartheta, v)\|^2.$$

Falls  $|\vartheta + v| \leq \|(\vartheta, v)\|/2$  ist, folgt  $(\vartheta + v)^2 \leq \|(\vartheta, v)\|^2/4$  und damit

$$\vartheta^2 + 2\vartheta v + v^2 \leq \frac{1}{4}(\vartheta^2 + v^2),$$

also

$$2\vartheta v \leq -\frac{3}{4}\|(\vartheta, v)\|^2.$$

In diesem Fall setzen wir

$$u = \sin(\vartheta)$$

und erhalten

$$DV(\vartheta, v)f((\vartheta, v), u) < (2\vartheta + v)v + (v + \vartheta)(-v) = \vartheta v \leq -\frac{3}{8}\|(\vartheta, v)\|^2.$$

Damit ist  $V$  eine Kontroll-Lyapunov-Funktion für das System mit  $\delta(0) = 0$ . □

**Übungsaufgabe:** Berechne das stabilisierende Feedback gemäß Satz 6.3.

# Kapitel 7

## Eine notwendige Bedingung für stabilisierende Feedbacks

In diesem Kapitel werden wir “Brocketts Bedingung” (nach R. Brockett) herleiten, die immer dann gelten muss, wenn ein stabilisierendes stetiges Feedback existieren. Diese Bedingung ist sehr einfach zu überprüfen, weswegen man mit ihr leicht erkennen kann ob sich die Suche nach einem stetigen stabilisierenden Feedback für ein Kontrollsystem überhaupt lohnen kann.

### 7.1 Brocketts Bedingung

Wir wollen hier ein einfacheres Kriterium herleiten, das eine notwendige Bedingung für Stabilisierbarkeit liefert, die man direkt mit Hilfe des Vektorfeldes  $f(x, u)$  überprüfen kann. Diese Bedingung beruht auf der Beobachtung aus dem folgenden Lemma.

**Lemma 7.1** Betrachte ein gewöhnliche Differentialgleichung (2.1) im  $\mathbb{R}^n$  mit mit lokal asymptotisch stabilem Gleichgewicht  $x^* = 0$ . Dann enthält die Menge

$$f(\mathbb{R}^n) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n\}$$

eine Umgebung  $B_\delta(0)$  der Null.

Ein eleganter und mathematisch präziser Beweis findet sich z.B. in [3, Abschnitt 5.9].

**Satz 7.2** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) im  $\mathbb{R}^n$  mit mit  $f(0, 0) = 0$ . Angenommen, es existiert ein (lokal) stabilisierendes Feedback  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , so dass  $f(x, F(x))$  lokal Lipschitz-stetig ist. Dann enthält die Menge

$$f(\mathbb{R}^n, U) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x, u) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n \text{ und ein } u \in U\}$$

eine Umgebung  $B_\delta(0)$  der Null.

**Beweis:** Dies folgt sofort aus Lemma 7.1 wegen  $f(\mathbb{R}^n, U) \subseteq f(\mathbb{R}^n, F(\mathbb{R}^n))$ .  $\square$

**Beispiel:** Betrachte das 3d System mit 2d Kontrolle

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t)u_1(t)\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass kein Punkt der Form  $(0, r, \varepsilon)$  mit  $\varepsilon \neq 0$  und  $r \in \mathbb{R}$  beliebig im Bild von  $f$  liegt.

Dieses Beispiel ist keine mathematische Spielerei, sondern modelliert ein lenkbares Fahrzeug mit Lenkerausschlag  $\theta = x_1$  und Position  $(z_1, z_2) = (x_2 \cos(\theta) + x_3 \sin(\theta), x_2 \sin(\theta) - x_3 \cos(\theta))$ . Systeme dieser Art werden *nicht-holonome Systeme* genannt und treten typischerweise in der Modellierung von Fahrzeugbewegungen auf.

Brocketts Bedingung ist eine notwendige Bedingung, was bedeutet, dass es sein kann, dass diese Bedingung erfüllt ist, obwohl für das System kein stetiges Feedback existiert. Ein Beispiel dafür betrachten wir im folgenden Abschnitt.

## 7.2 Beispiel: Artstein's Kreise

Das folgende (kontroll-affine) Beispielsystem mit  $U = \mathbb{R}$  stammt von Z. Artstein.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \left(-x_1(t)^2 + x_2(t)^2\right)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(-2x_1(t)x_2(t)\right)u(t)\end{aligned}\tag{7.1}$$

Beachte, dass Brocketts Bedingung erfüllt ist: Für  $v = (v_1, v_2)^T$  mit  $v_2 \neq 0$  wählen wir  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{v_1}{v_2} + \sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} + 1}$  ( $\Rightarrow x_2^2 - 1 = -2\frac{v_1}{v_2}x_2$ , beachte, dass  $x_2 \neq 0$  ist) und  $u = -\frac{v_2}{2x_2}$ . Damit ergibt sich

$$f(x) = u \begin{pmatrix} -1 + x_2^2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{2x_2}(-2\frac{v_1}{v_2}x_2) \\ -\frac{v_2}{2x_2}(-2x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Für  $v_2 = v_1 = 0$  wählen wir  $u = 0$  und  $x$  beliebig und für  $v_2 = 0$  und  $v_1 \neq 0$  wählen wir  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \sqrt{|v_1|}$  und  $u = \text{sgn}(v_1)$ .

Somit lässt sich jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  als Bild von  $f$  darstellen; insbesondere ist Brocketts Bedingung erfüllt.

Um zu zeigen, dass das System nicht mit stetigem Feedback stabilisierbar ist, betrachten wir die Lösungstrajektorien, die sich für dieses System relativ genau beschreiben lassen: Betrachte einen Anfangswert  $x = (x_1, x_2)$ . Wir setzen

$$r = r(x) = \begin{cases} \|x\|^2/2x_2, & x_2 > 0 \\ -\|x\|^2/2x_2, & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0 \\ \infty, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 \neq 0 \end{cases}$$



Dann sind die Lösungen zu diesem Anfangswert gegeben durch

$$\varphi(t, x, u) = \begin{cases} (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, u)), -r \cos(\psi_r(t, \psi_0, u)) + r)^T, & x_2 > 0 \\ (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, u)), r \cos(\psi_r(t, \psi_0, u)) - r)^T, & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0 \\ (\psi_\infty(t, \psi_0, u), 0)^T, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

wobei  $\psi_r(\cdot, \psi, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi_\infty(\cdot, \psi_0, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösungen der 1d Kontrollsysteme

$$\dot{\psi}(t) = g_r(\psi, u) = (2u(t)r(\cos(\psi(t)) - 1))$$

mit Anfangsbedingung  $r \sin(\psi_0) = x_1$  bzw.

$$\dot{\psi}_\infty(t) = g_\infty(\psi, u) = -u(t)\psi(t)^2$$

mit Anfangsbedingung  $\psi_0 = x_1$  sind. Wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus können wir im Falle  $r < \infty$   $\psi_0 \in [-\pi, \pi]$  annehmen. Der Nullpunkt  $x = (0, 0)^T$  entspricht dann gerade dem Punkt  $\psi_0 = 0$ . Einige dieser Lösungen sind in Abbildung 7.1 dargestellt.

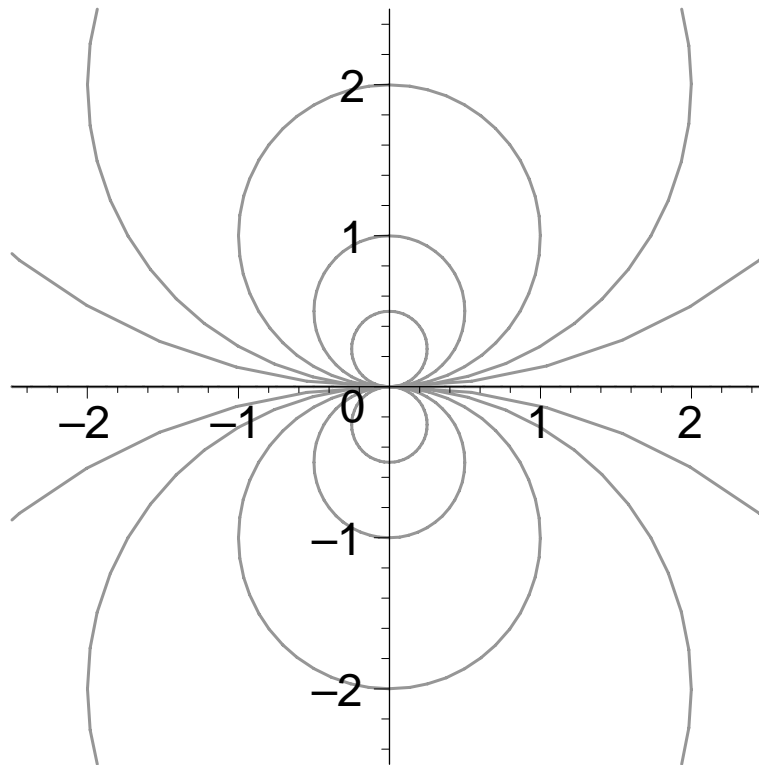


Abbildung 7.1: Einige Lösungen von System 7.1

Beachte, dass man die hier dargestellten Lösungskurven nicht verlassen kann, egal wie  $u$  gewählt wird; man kann lediglich die Richtung und die Geschwindigkeit beeinflussen, mit der diese Kurven durchlaufen werden.

Wir wollen nun beweisen, dass es kein stetiges Feedback geben kann, das dieses System stabilisiert, nicht einmal lokal. Wir nehmen dazu an, dass mit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokal stabilisierendes stetiges Feedback gegeben ist.

Wähle ein  $r > 0$  so klein, dass der zugehörige Lösungskreis ganz in der Umgebung  $N$  liegt, in der das mittels  $F$  geregelte System asymptotisch stabil ist. Für die durch

$$\tilde{F}(\psi) = F(r \sin(\psi), -r \cos(\psi) + r)$$

gegebene Abbildung  $F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dann, dass die Lösungen  $\varphi(t, x, F)$  des mittels geregelten Systems für Anfangswerte  $x = (x_1, x_2)$  mit  $x_2 > 0$  und  $r(x) = r$  von der Form

$$\varphi(t, x, F) = (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F})), -r \cos(\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F})) + r)^T$$

mit  $r \sin(\psi_0) = x_1$  sind. Aus der angenommenen asymptotischen Stabilität folgt die Konvergenz  $\varphi(t, x, F) \rightarrow 0$  und  $\|\varphi(t, x, F)\| \leq C\|x\|$ , woraus für  $\psi$  hinreichend nahe bei 0 die Konvergenz  $\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F}) \rightarrow 0$  folgt. Da  $\psi$  eindimensional ist, müssen in einer Umgebung der Null also die Bedingungen

$$\begin{aligned} g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &< 0 && \text{für } \psi > 0 \\ g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &> 0 && \text{für } \psi < 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

gelten. Wiederum wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus gilt

$$g_r(\psi + 2\pi, \tilde{F}(\psi + 2\pi)) = g_r(\psi, \tilde{F}(\psi))$$

für alle  $\psi \in \mathbb{R}$ . Also folgt aus (7.2), dass eine Umgebung von  $\psi^* = 2\pi$  existiert, so dass

$$\begin{aligned} g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &< 0 && \text{für } \psi > 2\pi \\ g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &> 0 && \text{für } \psi < 2\pi \end{aligned} \quad (7.3)$$

gilt. Aus (7.2) und (7.3) folgt, dass ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass

$$g_r(\varepsilon, \tilde{F}(\varepsilon)) < 0 \text{ und } g_r(2\pi - \varepsilon, \tilde{F}(2\pi - \varepsilon)) > 0$$

ist. Da  $g_r(\psi, \tilde{F}(\psi))$  stetig in  $\psi$  ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein  $\xi \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$  mit  $g_r(\xi, \tilde{F}(\xi)) = 0$ . Daraus folgt, dass auch  $f(x_1, F) = 0$  ist für  $x_1 = (r \sin(\xi), -r \cos(\xi) + r) \neq 0$ , also ist  $x_1$  ein Gleichgewicht und es folgt

$$\varphi(t, x_1) = x_1 \text{ für alle } t > 0. \quad (7.4)$$

Da  $x_1$  aber auf dem zu  $r$  gehörigen Lösungskreis liegt, liegt  $x_1 \in N$ . In diesem Bereich ist das geregelte System aber asymptotisch stabil, also folgt  $\varphi(t, x_1) \rightarrow 0$ , was ein Widerspruch zu (7.4) ist. Also kann  $F$  nicht existieren.

# Kapitel 8

## Sampling

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass stetige stabilisierende Feedbacks nicht immer existieren. In diesem Kapitel wollen wir zunächst ein Lösungskonzept für unstetige Feedbacks einführen, das auch für unstetige Feedbacks zu mathematisch sinnvollen Lösungen führt.

### 8.1 Sampling–Lösungen

Wir definieren nun das angekündigte Lösungskonzept.

**Definition 8.1** (i) Eine Folge von Zeiten

$$\mathbf{t} = (t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \quad \text{mit} \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

heißt *Sampling–Folge*, falls  $t_i \rightarrow \infty$  für  $i \rightarrow \infty$  und  $\Delta_{\mathbf{t}} := \sup_{i \in \mathbb{N}_0} (t_{i+1} - t_i) < \infty$  ist. Die Zahl  $\Delta_{\mathbf{t}}$  heißt *Sampling–Rate*.

(ii) Betrachte ein Kontrollsystem (1.1). Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  eine beliebige Abbildung, die die Abschätzung  $\|F(x)\| \leq \delta(\|x\|)$  für ein  $\delta \in \mathcal{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  erfüllt. Zu einer gegebenen Sampling–Folge  $\mathbf{t}$  definieren wir die *Sampling–Lösung* des Anfangswertproblems  $\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$ ,  $x(0) = x_0$  für  $t \geq 0$  induktiv mittels

$$\varphi_{\mathbf{t}}(t, x_0, F) = \varphi(t - t_i, x_i, F(x_i)) \quad \text{für alle } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

wobei  $\varphi(\cdot, x_i, F(x_i))$  die Lösung von (1.1) mit Anfangswert  $x_i := \varphi_{\mathbf{t}}(t_i, x_0, F)$  und konstanter Kontrollfunktion  $u(t) \equiv F(x_i)$  bezeichnet.  $\square$

Beachte, dass — unter unseren Standard–Voraussetzungen an (1.1) und wegen der Beschränktheits–Annahme an  $F$  — die Lösung  $\varphi_{\mathbf{t}}$  für jede Sampling–Folge  $\mathbf{t}$  eindeutig existiert, unabhängig von den sonstigen Regularitätseigenschaften des Feedbacks  $F$ .

Neben diesem mathematischen Vorteil hat diese Art der Definition aber auch eine sehr praxisnahe Interpretation: In der modernen Regelungstechnik werden Feedbacks zur Regelung nicht mehr nur als analoge elektronische Schaltungen sondern immer öfter mittels digitaler

Computer implementiert, da diese zum einen inzwischen billig und überall verfügbar und zum anderen flexibel programmierbar sind. Aufgrund der Arbeitsweise digitaler Computer ist es allerdings nicht möglich, das Feedback  $F$  für jeden Punkt  $x(t)$  auf der Trajektorie auszuwerten; statt dessen muss man sich von vornherein auf eine endliche Anzahl von Auswertungen an Punkten  $x(t_i)$  beschränken, was exakt der obigen Definition entspricht. Aus praktischen Gründen werden also auch konventionelle stetige Feedbacks heutzutage oft mittels Sampling implementiert.

## 8.2 Stabilität und Sampling

Wenn man Feedbacks entwerfen bzw. berechnen will, so dass die Sampling-Lösungen (in geeignetem Sinne) asymptotisch stabil werden, so steht man vor der prinzipiellen Entscheidung, ob man das Feedback  $F$  unabhängig von der Sampling-Folge  $\mathbf{t}$  oder in Abhängigkeit davon definieren soll. In der Praxis ist es i.A. vorteilhaft, das Feedback  $F$  unabhängig von  $\mathbf{t}$  zu entwerfen, hier werden wir nur die zweite Variante verfolgen, da sich dadurch die benötigten mathematischen Hilfsmittel deutlich vereinfachen. Wir beschränken uns zudem auf Sampling-Folgen mit konstanten Sampling-Intervallen, d.h. auf Folgen mit der Eigenschaft  $t_{i+1} - t_i = \Delta$ , also  $t_i = i\Delta$ . Wir bezeichnen diese Folgen mit  $\mathbf{t}_\Delta$ .

Wir verwenden die folgende Definition; wiederum zur Vereinfachung beschränken wir uns auf den globalen Fall, der hier allerdings *semiglobal* heißt.

**Definition 8.2** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$ . Wir sagen, dass eine Familie von Feedbacks  $F_\Delta : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  für  $\Delta \in (0, \Delta^*]$  das Gleichgewicht  $x^* = 0$  des Sampling-Systems *semiglobal praktisch asymptotisch stabilisiert*, falls eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert, so dass für je zwei Konstanten  $R > \varepsilon > 0$  ein  $\Delta_0 > 0$  existiert, so dass für alle  $\Delta \in (0, \Delta_0]$  die Sampling-Lösungen  $\varphi_{\mathbf{t}_\Delta}(t, x, F_\Delta)$  die Abschätzung

$$\|\varphi_{\mathbf{t}_\Delta}(t, x, F_\Delta)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \varepsilon\}$$

für alle  $t \geq 0$  und alle Anfangswerte  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq R$  erfüllt.  $\square$

Der Begriff “semiglobal” bezieht sich hierbei auf die Konstante  $R$ , der Begriff “praktisch” auf die Konstante  $\varepsilon$ . Je weiter entfernt der Anfangswertes von  $x^* = 0$  ist und je näher man dem Gleichgewicht  $x^* = 0$  kommen will, desto feiner muss man die Sampling-Folge wählen, d.h. desto öfter muss man  $F$  auswerten. Tatsächlich ist es unter gewissen Voraussetzungen an (1.1) möglich, auch mit konstantem  $\Delta$  “echte” asymptotische Stabilität des Sampling-Systems zu erhalten, wie im folgenden Beispiel.

**Beispiel 8.3** Betrachte das System (7.1). Wir setzen

$$F_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0 \\ -1, & x_1 < 0 \end{cases}$$

Mit dieser Wahl wird das System global asymptotisch stabil für jedes  $\Delta > 0$ , d.h. wir erreichen sogar echte asymptotische Stabilität für die Sampling-Lösungen. Der Grund hierfür ist, dass diese Wahl von  $F$  tatsächlich zu einer konstanten Steuerstrategie  $F(x(t))$  führt, da die Sampling-Lösungen des Systems die “Schaltlinie”  $x_1 = 0$  niemals kreuzen. Daher ist die Länge  $\Delta$  der Sampling-Intervalle für dieses System unerheblich.  $\square$

Für andere Systeme kann man natürlich nicht erwarten, dass das Feedback  $F$  konstant entlang der Lösungen ist. Deswegen ist die semiglobale praktische Stabilität aus Definition 8.2 i.A. das Beste, was man mit Sampling erreichen kann.

### 8.3 Sampling und Ljapunov-Funktionen

Ebenso wie bei stetigem Feedback können auch für unstetiges Feedback Ljapunov Funktionen als Hilfsmittel zur Konstruktion stabilisierender Feedbacks verwendet werden. Die folgende Definition liefert das zu Definition 8.2 passende Konzept.

**Definition 8.4** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$ . Eine Familie von stetigen Funktionen  $V_\Delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  für  $\Delta \in (0, \Delta^*]$  heißt *semiglobale praktische Familie von Ljapunov-Funktionen*, falls Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ , eine stetige Funktion  $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Funktion  $\delta \in \mathcal{N}$  existieren, so dass  $W(x) > 0$  gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , die Ungleichungen

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V_\Delta(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (8.1)$$

für alle  $\Delta \in (0, \Delta^*]$  erfüllt sind und für alle Konstanten  $C_2 > C_1 > 0$  ein  $\Delta_0 > 0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \delta(\|x\|)}} V_\Delta(\varphi(\Delta, x, u)) \leq \max\{V_\Delta(x) - \Delta W(x), C_1\} \quad (8.2)$$

gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $V_\Delta(x) \leq C_2$ , alle  $t > 0$  und alle  $\Delta \in (0, \Delta_0]$ .  $\square$

Beachte, dass das  $u$  in (8.2) ein konstanter Kontrollwert aus  $U$  und keine messbare Kontrollfunktion aus  $\mathcal{U}$  ist. Da die Lösung  $\varphi(\Delta, x, u)$  stetig von  $u \in U$  abhängt, ist das Infimum in (8.2) tatsächlich ein Minimum.

Der folgende Satz zeigt, dass wir aus den Ljapunov-Funktionen  $V_\Delta$  stabilisierende Feedbacks im Sinne von Definition 8.2 erhalten können.

**Satz 8.5** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$ . Sei  $V_\Delta$  für  $\Delta \in (0, \Delta^*]$  eine semiglobale praktische Familie von Ljapunov-Funktionen. Dann ist die Familie von Feedbacks  $F_\Delta$  definiert durch

$$V_\Delta(\varphi(\Delta, x, F_\Delta(x))) = \min_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \delta(\|x\|)}} V_\Delta(\varphi(\Delta, x, u))$$

eine Familie von semiglobal praktisch asymptotisch stabilisierenden Feedbacks im Sinne von Definition 8.2.

**Beweis:** Analog zum Beweis von Lemma 3.2 können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $W(x) \geq g(V_\Delta(x))$  für ein geeignetes stetiges  $g : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0$  mit  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  ist. Tatsächlich kann  $g$  unabhängig von  $\Delta$  gewählt werden, da alle  $V_\Delta$  durch die gleichen  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktionen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beschränkt sind.

Seien nun  $R > \varepsilon > 0$  gegeben. Wir wählen  $C_2 = \alpha_2(R)$  und  $C_1 = \alpha_1^{-1}(\varepsilon/2)$ , betrachten das zugehörige  $\Delta_0$  aus Definition 8.4 und wählen ein beliebiges  $\Delta \in (0, \Delta_0]$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq R$  die Ungleichung  $V_\Delta(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \leq \alpha_2(R) = C_2$ , also folgt aus der Definition von  $F_\Delta$  und (8.2) die Ungleichung

$$V_\Delta(\varphi(\Delta, x, F_\Delta(x))) \leq \max\{V_\Delta(x) - \Delta g(V_\Delta(x)), C_1\}.$$

Betrachte nun die Funktion  $\mu(r, t)$ , die definiert ist durch  $\mu(r, 0) = r$  und

$$\mu(r, t + \tau) = \mu(r, t) - \tau \inf_{s \in [0, \Delta_0]} g(\mu(r, t + s)) \quad \text{für alle } \tau \in (0, \Delta_0]$$

Diese Funktion ist offenbar streng monoton fallend in  $t$  und konvergiert gegen 0:

Nehmen wir an, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(r, t) =: \gamma > 0$  ist. Wir wählen ein  $\varepsilon_0 > 0$ . Dann folgt für jedes  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  und alle  $t > 0$  mit  $\mu(r, t) \leq \gamma + \varepsilon$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mu(r, t + \Delta) &= \mu(r, t) - \Delta \inf_{s \in [0, \Delta_0]} g(\mu(r, t + s)) \\ &\leq \mu(r, t) - \Delta \underbrace{\inf_{r \in [\gamma, \gamma + \varepsilon_0]} g(r)}_{=: \alpha_0 > 0} \\ &= \mu(r, t) - \Delta \alpha_0 \leq \gamma + \varepsilon - \Delta \alpha_0 \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon < \Delta \alpha_0$  folgt also  $\mu(r, t + \Delta) < \gamma$ , was zu einem Widerspruch führt. Also gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(r, t) = 0$ , weswegen  $\mu \in \mathcal{KL}$  ist.

Aus der Definition von  $\mu$  folgt mittels Induktion für  $\mathbf{t} = (i\Delta)_{i \in \mathbb{N}_0}$  die Ungleichung

$$V_\Delta(\varphi_{\mathbf{t}}(t, x, F_\Delta)) \leq \max\{\mu(V_\Delta(x), t), C_1\}$$

für alle  $t = i\Delta$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq R$ . Daraus folgt mit  $\|x\| \leq \alpha_1^{-1}(V_\Delta(x))$  und  $V_\Delta(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$  und für  $\beta(r, t) := \alpha_1^{-1}(\mu(\alpha_2(r), t)) \in \mathcal{KL}$  die Ungleichung

$$\|\varphi_{\mathbf{t}}(t, x, F_\Delta)\| \leq \max\{\alpha_1^{-1}(\mu(\alpha_2(\|x\|), t)), \alpha_1^{-1}(C_1)\} = \max\{\beta(\|x\|, t), \varepsilon/2\}$$

für  $t = i\Delta$ . Wegen der Stetigkeit von  $\|\varphi_{\mathbf{t}}(t, x, F_\Delta)\|$  gilt diese Abschätzung für hinreichend kleines  $\Delta > 0$  auch für beliebige  $t$  in den Zwischenintervallen  $[i\Delta, (i+1)\Delta]$ , wenn wir  $\varepsilon/2$  durch  $\varepsilon$  ersetzen und  $\beta$  durch  $C\beta$  für eine geeignete Konstante  $C > 0$  ersetzen. Damit folgt die behauptete semiglobale praktische Stabilität.  $\square$

**Bemerkung 8.6** In der Praxis wird man  $V_\Delta$  oft nicht für alle beliebige kleinen  $\Delta \in (0, \Delta_0]$  zur Verfügung haben. Zum Beispiel könnte man die  $V_\Delta$  numerisch berechnen, wobei die Berechnung für beliebig kleine  $\Delta$  natürlich nicht praktisch realisierbar ist.

Tatsächlich reicht es aber auch aus, wenn man zu vorgegebenen  $R > \varepsilon > 0$  eine Ljapunov-Funktion  $V_{\Delta_0}$  mit  $C_2 \geq \alpha_2(R)$ ,  $C_1 \leq \alpha_1^{-1}(\varepsilon/2)$  und hinreichend kleinem  $\Delta_0 > 0$  berechnen kann. Auf deren Basis kann man dann das stabilisierende Feedback  $F_{\Delta_0}$  gemäß Satz 8.5 mit den gewünschten Parametern  $R$  und  $\varepsilon$  berechnen, ohne dass dazu die Kenntnis von  $V_\Delta$  für  $\Delta < \Delta_0$  nötig ist.  $\square$

## 8.4 Existenz von Sampling–Ljapunov–Funktionen

In diesem letzten Abschnitt wollen wir beweisen, dass eine Familie von Ljapunov–Funktion im Sinne von Definition 8.4 immer existiert, wenn das System asymptotisch kontrollierbar ist.

**Satz 8.7** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$ . Dann gilt: Wenn das System asymptotisch kontrollierbar ist, so existiert eine Familie von Ljapunov–Funktionen im Sinne von Definition 8.4. Insbesondere ist das Sampling–System damit semiglobal praktisch asymptotisch stabilisierbar.

Der Beweis dieses Satzes benötigt etwas Vorbereitung. Für eine gegebene stetige Funktion  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$  für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  und  $\beta \in (0, 1]$  definieren wir die Funktionen

$$V_\beta(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ V(y) + \frac{\|x - y\|^2}{2\beta^2} \right\}, \quad (8.3)$$

die sogenannten (*quadratischen*) *inf–Konvolutionen* von  $V$ . Mit  $y_\beta(x)$  bezeichnen wir einen Punkt, in dem das Minimum in (8.3) für  $x$  angenommen wird; damit definieren wir den Vektor  $\zeta_\beta(x) := (x - y_\beta(x))/2\beta^2$ . Dann gilt das folgende Lemma.

**Lemma 8.8** Die Funktionen  $V_\beta$  haben die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\bar{\alpha}_1(\|x\|) \leq V_\beta(x) \leq V(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und eine von  $\beta \in (0, 1]$  unabhängige Funktion  $\bar{\alpha}_1 \in \mathcal{K}_\infty$
- (ii) Für alle  $R, \delta > 0$  gibt es ein  $\beta_0 > 0$ , so dass die Abschätzungen

$$\|y_\beta(x) - x\| \leq \delta, \quad \|\zeta_\beta(x)\| \|y_\beta(x) - x\| \leq \delta \quad \text{und} \quad |V(y_\beta(x)) - V_\beta(x)| < \delta$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq R$  und alle  $\beta \leq \beta_0$  gelten.

- (iii) Für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  und alle  $\tau > 0$  gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} V_\beta(x + \tau v) &\leq V_\beta(x) + \tau \langle \zeta_\beta(x), v \rangle + \frac{\tau^2 \|v\|^2}{2\beta^2} \\ V(y_\beta(x) + \tau v) &\geq V(y_\beta(x)) + \tau \langle \zeta_\beta(x), v \rangle - \frac{\tau^2 \|v\|^2}{2\beta^2}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Alle Eigenschaften folgen mit elementaren aber zum Teil etwas technischen Abschätzungen, wobei man die gleichmäßige Stetigkeit von  $V$  auf kompakten Mengen ausnutzt.  $\square$

**Bemerkung 8.9** Die Abschätzungen in (iii) haben Ähnlichkeit mit einer Taylor–Entwicklung, wobei  $\zeta_\beta(x)$  die Rolle des Gradienten spielt. Tatsächlich wird  $\zeta_\beta(x)$  *Supergradient* der Funktion  $V_\beta$  in  $x$  und *Subgradient* der Funktion  $V$  in  $y_\beta(x)$  genannt.  $\square$

**Beweis von Satz 8.7:** Sei  $V$  die Kontroll-Ljapunov-Funktion aus Satz 5.5 und seien  $R, \varepsilon > 0$  gegeben. Wir konstruieren nun eine Funktion  $V_\Delta$ , die die Bedingungen der Definition 8.4 erfüllt.

Wir wählen  $\beta \in (0, 1]$  so, dass für  $V_\beta$  und  $y_\beta(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\varepsilon \leq \|x\| \leq R$  die Abschätzung

$$W(y_\beta(x)) \geq W(x)/2 \quad (8.4)$$

gilt und wir wählen  $\Delta_0$  so, dass für alle  $\Delta \leq \Delta_0$  und alle  $x$  wie oben die Ungleichung

$$\int_0^\Delta W(\varphi(s, x, u)) ds \leq \Delta 3W(x)/4$$

gilt für alle  $u \in \mathcal{U}$  mit  $\|u\|_\infty \leq \delta(\|x\|)$  für  $\delta \in \mathcal{N}$  aus Definition 5.1.

Aus der zweiten Ungleichung von Lemma 8.8 (iii) folgt damit aus der Ljapunov-Ungleichung aus Definition 5.1 mit  $v = (\varphi(\Delta, y_\beta(x), u) - y_\beta(x))/\Delta$  und  $\tau = \Delta$  für alle  $\beta \in (0, \beta_0]$  und alle hinreichend kleinen  $\Delta$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ \|u\|_\infty \leq \delta(\|x\|)}} \langle \zeta_\beta(x), (\varphi(\Delta, y_\beta(x), u) - y_\beta(x))/\Delta \rangle &\leq -3W(y_\beta(x))/4 + \frac{\Delta \|v\|^2}{2\beta^2} \\ &\leq -W(y_\beta(x))/2 \leq -W(x)/4. \end{aligned}$$

Wegen

$$\varphi(\Delta, y_\beta(x), u) - y_\beta(x) = \int_0^\Delta f(\varphi(t, y_\beta(x)), u(t)) dt = \int_0^\Delta f(y_\beta(x), u(t)) dt + O(\Delta^2)$$

und der Tatsache, dass

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(y_\beta(x), u(t)) dt$$

in der konvexen Hülle der Menge  $F_\beta := \{f(y_\beta(x), u) \mid \|u\| \leq \delta(\|y_\beta(x)\|)\}$  liegt, folgt daraus die Abschätzung

$$\min_{w \in \text{co}F_\beta} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/4.$$

Da der zu minimierende Ausdruck linear in  $w$  ist, wird das Minimum für ein  $w \in F_\beta$  angenommen (Konvexkombinationen von Elementen aus  $F_\beta$  können keine kleineren Werte liefern), also folgt

$$\min_{w \in F_\beta} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/4.$$

Für hinreichend kleine  $\beta > 0$  liegt  $y_\beta(x)$  nahe an  $x$ , so dass wir die Ungleichung

$$\min_{w \in F} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/8$$

mit  $F := \{f(x, u) \mid \|u\| \leq \delta(\|x\|)\}$  folgern können. Für Kontrollwerte  $\bar{u} \in U$  mit  $\|\bar{u}\| \leq \delta(\|x\|)$  gilt nun

$$\varphi(\Delta, x, \bar{u}) - x = \int_0^\Delta f(\varphi(t, x), \bar{u}) dt = \int_0^\Delta f(x, \bar{u}) dt + O(\Delta^2)$$



Also folgt mit  $v(\bar{u}) = (\varphi(\Delta, x, \bar{u}) - x)/\Delta$  aus der ersten Ungleichung von Lemma 8.8 (iii) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \inf_{\substack{\bar{u} \in U \\ \|\bar{u}\| \leq \delta(\|x\|)}} V_\beta(\varphi(\Delta, x, \bar{u})) \\
& \leq \inf_{\substack{\bar{u} \in U \\ \|\bar{u}\| \leq \delta(\|x\|)}} V_\beta(x + \Delta v(\bar{u})) \\
& \leq \inf_{\substack{\bar{u} \in U \\ \|\bar{u}\| \leq \delta(\|x\|)}} \left\{ V_\beta(x) - \Delta \langle \zeta_\beta(x), v(\bar{u}) \rangle + \frac{\Delta^2 \|v(\bar{u})\|^2}{2\beta^2} \right\} \\
& = \min_{w \in F} \left\{ V_\beta(x) - \Delta \langle \zeta_\beta(x), w \rangle + O(\Delta^2) + \frac{\Delta^2 \|w\|^2}{2\beta^2} \right\} \\
& \leq V_\beta(x) - \Delta W(x)/8 + O(\Delta^2) + \frac{\Delta^2 \|w^*\|^2}{2\beta^2} \\
& \leq V_\beta(x) - \Delta W(x)/16
\end{aligned}$$

für alle hinreichend kleinen  $\Delta > 0$ , wobei  $w^* \in F$  den Wert bezeichnet, in dem das Minimum angenommen wird. Dies ist die gewünschte Ljapunov-Ungleichung, weswegen  $V_\Delta = V_\beta$  die gesuchte Sampling-Ljapunov-Funktion ist.  $\square$



# Literaturverzeichnis

- [1] B. AULBACH, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997.
- [2] F. COLONIUS, *Einführung in die Steuerungstheorie*, Vorlesungsskript, Universität Augsburg, 1992.
- [3] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Springer Verlag, New York, 2nd ed., 1998.

# Index

- Artsteins Kreise, 42
- asymptotische Kontrollierbarkeit, 26
- asymptotische Stabilität, 9
- Brocketts Bedingung, 41
- Caratheodory, Satz von, 2
- Equilibrium, 8
- Existenz- und Eindeigkeitssatz, 2
- Feedback, 27
- Feedback-Stabilisierbarkeit, 27
- Gleichgewicht, 8
- Instabilität, 9
- $\mathcal{K}$ -Funktion, 7
- $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion, 7
- $\mathcal{KL}$ -Funktion, 7
- kontroll-affin, 35
- Kontroll-Ljapunov-Funktion, 31
- Kontrollfunktionen, 1
- Kontrollierbarkeit
  - asymptotisch, 26
- Kontrollsystem, 1
- Kontrollwertebereich, 1
- $\mathcal{L}$ -Funktion, 7
- Lebesgue-messbar, 2
- Ljapunov-Funktion, 13
  - Kontroll-, 31
- lokal essentiell beschränkt, 2
- messbar, 2
- $\mathcal{N}$ -Funktion, 25
- nichtholonomes System, 42
- Rückkopplung, 27
- Regelung, 27
- Ruhelage, 8
- Sampling, 45
- Sampling und Stabilität, 46
- Sampling-Folge, 45
- Sampling-Lösungen, 45
- Sampling-Rate, 45
- Sontag-Formel, 36
- Stabilisierbarkeit
  - mit Feedback, 27
- Stabilität, 9
- universelle Formel, 36
- Vergleichsfunktionen, 7
- Zustandsfeedback, 27