

Modellierung mit Differentialgleichungen

Lars Grüne
Mathematisches Institut
Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik
Universität Bayreuth
95440 Bayreuth
`lars.gruene@uni-bayreuth.de`
`num.math.uni-bayreuth.de`

Vorlesungsskript
Vierte Auflage
Sommersemester 2019

Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen einer gleichnamigen Vorlesung entstanden, die ich im Sommersemester 2019 an der Universität Bayreuth gehalten habe. Die ersten Kapitel beruhen auf einer früheren Version des Skripts, das zuerst im Sommersemester 2003 erstellt wurde. Die hinteren Kapitel wurden für das Sommersemester 2019 komplett neu geschrieben.

Die einzelnen Kapitel des Skriptes wurden auf Basis verschiedener Lehrbücher, Monographien und weiterer Literatur erstellt, Hinweise dazu finden sich am Ende jedes Kapitels. Besonders bedanken möchte ich mich bei Fabian Wirth (Universität Passau) für seine sehr hilfreichen Notizen zu einer im Wintersemester 2002/2003 an der J.W. Goethe-Universität Frankfurt am Main gehaltenen Vorlesung über mathematische Modellierung. Ebenfalls möchte ich mich bei den aufmerksamen Studentinnen und Studenten bedanken, die viele kleinere Fehler gefunden haben, die in dieser Version korrigiert werden konnten.

Bayreuth, Juli 2019

LARS GRÜNE

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Einführung	1
1.1 Überblick	1
1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen	2
1.2.1 Anfangswertprobleme	2
1.2.2 Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz	3
1.2.3 Grafische Darstellung der Lösungen	5
1.3 Literaturhinweise	6
2 Biologie	7
2.1 Populationsdynamik für eine Art	7
2.1.1 Differenzen- und Differentialgleichungen	7
2.1.2 Einfache Modelle	9
2.1.3 Eine Anwendung des Modells	15
2.1.4 Abschließende Diskussion	18
2.2 Populationsdynamik für mehrere Arten	19
2.2.1 Das Räuber-Beute Modell mit unbeschränkten Ressourcen	19
2.2.2 Das Räuber-Beute Modell mit beschränkten Ressourcen	23
2.2.3 Verallgemeinerung auf n Arten	26
2.3 Anwendungen der Populationsdynamik	27
2.3.1 Auswirkungen der Befischung	27
2.3.2 Der Chemostat	29
2.4 Ausbreitung von Epidemien	32
2.4.1 Modelle vom SI-Typ	33
2.4.2 Ein Modell mit Verzögerung	35
2.5 Literaturhinweise	38

3	Mechanik	39
3.1	Lagrange–Gleichungen	39
3.2	Dissipative Systeme	46
3.3	Die Hamilton’sche Methode	48
3.4	Das Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt	50
4	Stochastische Differentialgleichungen	55
4.1	Stochastische Differentialgleichungen	55
4.1.1	Einige stochastische Grundbegriffe	56
4.1.2	Der Wiener Prozess	60
4.1.3	Das Itô–Integral	62
4.1.4	Das Itô–Lemma	65
4.1.5	Beispiele für SDG-Modelle	67
4.2	Literaturhinweise	70
5	Die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung	71
5.1	Mikroskopische Herleitung	71
5.2	Makroskopische Herleitung	73
5.3	Randbedingungen	75
5.4	Erweiterungen	76
5.5	Die stationäre Gleichung	77
5.6	Populationsmodelle mit Diffusion	78
5.7	Anhang: Der Satz von Gauß	80
5.8	Literaturhinweise	81
6	Die Wellengleichung	83
6.1	Herleitung	83
6.2	Lösungen	85
6.3	Die mehrdimensionale Wellengleichung	86
6.4	Randbedingungen	87
6.5	Literaturhinweise	87

7 Die Navier-Stokes-Gleichungen	89
7.1 Grundlegendes	89
7.2 Herleitung der Euler-Gleichungen	90
7.3 Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen	92
7.4 Dimensionslose Variante	93
7.5 Literaturhinweise	94
Literaturverzeichnis	95
Index	95

Kapitel 1

Einführung

1.1 Überblick

In dieser Vorlesung werden wir uns mit Modellen realer Phänomene beschäftigen, die auf Differentialgleichungen beruhen. Wir wollen für eine Reihe von Anwendungen Modelle entwickeln, die zu Grunde liegenden Mechanismen untersuchen und Modellannahmen diskutieren. Zudem werden wir an Beispielen untersuchen, wie sich die Modelle qualitativ verhalten. Dies werden wir vor allem bei den auf gewöhnlichen Differentialgleichungen beruhenden Modellen machen, da dafür bei dieser einfachen Modellklasse eine Reihe mathematischer Methoden zur Verfügung stehen. Diese werden dabei in eher informeller Weise eingeführt, d.h. wir werden auf Beweise ganz verzichten oder nur die Beweisideen geben, da wir davon ausgehen, dass diese aus einführenden Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen bekannt sind. Ebenso werden wir bei den partiellen Differentialgleichungen nicht auf die Theorie (z.B. zur Existenz von Lösungen) eingehen, da hierfür eigene Vorlesungen existieren.

Wir werden in dieser Vorlesung Modelle aus drei Klassen von Differentialgleichungen

- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Stochastische (gewöhnliche) Differentialgleichungen
- Partielle Differentialgleichungen

behandeln. Die betrachteten Anwendungsbereiche dabei sind

- Biologie, speziell Populationsdynamik
- Mechanik und Strömungsmechanik
- Finanzmathematik
- Ausbreitung von Wärme und Wellen

Bevor wir mit den Modellen beginnen, werden wir etwas Notation einführen und einige grundlegende Eigenschaften betrachten. Wir beschränken uns hier zunächst auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen, für die stochastischen und die partiellen Differentialgleichungen werden wir die Schreibweisen in den entsprechenden Kapiteln einführen.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung setzt die Ableitung einer Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach ihrem (eindimensionalen) Argument mit der Funktion selbst in Beziehung. Formal beschreibt dies die folgende Definition.

Definition 1.1 Ein *gewöhnliche Differentialgleichung* (DGL) im \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ist und *Vektorfeld* genannt wird, deren Definitionsbereich D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist.

Eine *Lösung* von (1.1) ist eine stetig differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die (1.1) erfüllt. \square

Der entscheidende Unterschied zur partiellen Differentialgleichung ist, dass in der Gleichung nur eine Ableitung nach einem eindimensionalen Argument auftritt. Höhere Ableitungen sind dabei im Prinzip erlaubt, Gleichungen mit höheren Ableitungen können aber immer in die Form (1.1) umgeschrieben werden, weswegen wir uns auf diese Form beschränken.

Einige Anmerkungen zur Notation bzw. Sprechweise:

- Die unabhängige Variable t werden wir üblicherweise als Zeit interpretieren, obwohl (abhängig vom modellierten Sachverhalt) gelegentlich auch andere Interpretationen möglich sind.
- Statt $\frac{d}{dt}x(t)$ schreiben wir oft kurz $\dot{x}(t)$.
- Die Lösungsfunktion $x(t)$ nennen wir auch *Lösungskurve* oder (*Lösungs-*)*Trajektorie*.
- Falls das Vektorfeld f nicht von t abhängt, also $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ist, nennen wir die Differentialgleichung *autonom*.

1.2.1 Anfangswertprobleme

Eine gewöhnliche Differentialgleichung besitzt im Allgemeinen unendlich viele Lösungen. Als Beispiel betrachte die (sehr einfache) eindimensionale DGL mit $f(x, t) = x$, also

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}$. Betrachte die Funktion $x(t) = Ce^t$ mit beliebigem $C \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}Ce^t = Ce^t = x(t).$$

Für jedes feste C löst Ce^t die obige DGL, es gibt also unendlich viele Lösungen.

Um *eindeutige* Lösungen zu erhalten, müssen wir eine weitere Bedingung festlegen. Dies geschieht in der folgenden Definition.

Definition 1.2 Ein *Anfangswertproblem* für die gewöhnliche Differentialgleichung (1.1) besteht darin, zu gegebenem $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösungsfunktion $x(t)$ zu finden, die (1.1) erfüllt und für die darüberhinaus die Gleichung

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

gilt. □

Notation und Sprechweisen:

- Für die Lösung $x(t)$, die (1.1) und (1.2) erfüllt, schreiben wir $x(t; t_0, x_0)$. Im Spezialfall $t_0 = 0$ werden wir oft kurz $x(t; x_0)$ schreiben.
- Die Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir als *Anfangszeit*, den Wert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ als *Anfangswert*. Das Paar (t_0, x_0) bezeichnen wir als *Anfangsbedingung*, ebenso nennen wir die Gleichung (1.2) *Anfangsbedingung*.

Bemerkung 1.3 Eine stetig differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ löst das Anfangswertproblem (1.1), (1.2) für ein $t_0 \in I$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn sie für alle $t \in I$ die *Integralgleichung*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{1.3}$$

erfüllt. Dies folgt sofort durch Integrieren von (1.1) bzgl. t bzw. durch Differenzieren von (1.3) nach t unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. □

1.2.2 Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Unter geeigneten Bedingungen an f können wir einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Anfangswertprobleme der Form (1.1), (1.2) erhalten.

Satz 1.4 Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung (1.1) für ein $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld f sei stetig, darüberhinaus sei f Lipschitz-stetig im zweiten Argument im folgenden Sinne: Für jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ existiere eine Konstante $L > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $(t, x), (t, y) \in K$.

Dann gibt es für jede Anfangsbedingung $(t_0, x_0) \in D$ genau eine Lösung $x(t; t_0, x_0)$ des Anfangswertproblems (1.1), (1.2). Diese ist definiert für alle t aus einem offenen *maximalen Existenzintervall* $I_{t_0, x_0} \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I_{t_0, x_0}$.

Für den Beweis verweisen wir auf die einschlägigen Vorlesungen oder die am Ende des Abschnitts genannten Lehrbücher.

Das Verhalten am Rand von I_{t_0, x_0} kann für die Lösungen wie folgt beschrieben werden: Falls $t^* = \sup I_{t_0, x_0} < \infty$ ist, so divergiert die Lösung $x(t; t_0, x_0)$ für $t \nearrow t^*$ oder sie konvergiert gegen ein $x_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $(t^*, x_1) \notin D$; falls $t_* = \inf I_{t_0, x_0} > -\infty$ ist, so divergiert die Lösung $x(t; t_0, x_0)$ für $t \searrow t_*$ oder sie konvergiert gegen ein $x_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $(t_*, x_1) \notin D$. Die Begründung hierfür ist die folgende: Wenn $x(t; t_0, x_0)$ z.B. für $t \nearrow t^*$ gegen $x_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $(t^*, x_1) \in D$ konvergieren würde, so könnte man die auf einem offenen Intervall $(t^* - a, t^* + a)$ definierte Lösung $x(t; b, x_1)$ betrachten, die auf $(t^* - a, t^*]$ mit $x(t; t_0, x_0)$ übereinstimmen müsste und damit eine Fortsetzung von $x(t; t_0, x_0)$ über t^* hinaus wäre. Dies widerspricht der Maximalität von I_{t_0, x_0} . Im Fall $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gilt insbesondere $\|x(t; t_0, x_0)\| \rightarrow \infty$ für $t \nearrow t^*$ oder $t \searrow t_*$, falls t^* oder t_* endlich sind.

Wir werden im Folgenden zumeist annehmen, dass die Annahmen von Satz 1.4 erfüllt sind, auch ohne dies explizit zu erwähnen. Lediglich auf Ausnahmen von dieser Regel werden wir ausdrücklich hinweisen.

Eine einfache Konsequenz aus Satz 1.4 ist die sogenannte *Kozykluseigenschaft* der Lösungen, die für $(t_0, x_0) \in D$ und zwei Zeiten $t_1, t \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$x(t; t_0, x_0) = x(t; t_1, x_1) \quad \text{mit} \quad x_1 = x(t_1; t_0, x_0), \quad (1.4)$$

vorausgesetzt natürlich, dass alle in (1.4) auftretenden Ausdrücke zu den angegebenen Zeiten auch definiert sind. Zum Beweis rechnet man nach, dass linke Ausdruck in (1.4) das Anfangswertproblem (1.1), (1.2) zur Anfangsbedingung (t_1, x_1) löst. Da der rechte dies ebenfalls tut, müssen beide übereinstimmen.

Eine weitere Konsequenz aus Satz 1.4 ist, dass sich Lösungen nicht schneiden können. Falls für zwei Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ (zu beliebigen Anfangswerten und Anfangszeiten) eine Zeit t_1 mit $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ existiert, so müssen diese Lösungen bereits übereinstimmen, da sie beide Lösungen zur Anfangsbedingung $(t_1, x_1(t_1))$ sind. (Für autonome DGL gilt sogar noch mehr, vgl. das Ende dieses Abschnittes).

Einige gewöhnliche Differentialgleichungen können explizit analytisch gelöst werden, für diesen Zweck gibt es eine Reihe von Methoden, mit denen die Lösungen berechnet werden können. Im Allgemeinen stehen explizite Lösungen nicht zur Verfügung, so dass allein die numerische Lösung Aufschluss über die Lösungen erlaubt. Auch in diesem Fall verlässt man sich aber nicht allein auf die Numerik, sondern versucht, gewisse qualitative Eigenschaften der Lösungen mit analytischen Methoden zu beweisen. Wir werden im Rahmen dieser Vorlesung Beispiele für diese Vorgehensweise kennen lernen.

1.2.3 Grafische Darstellung der Lösungen

Zur grafischen Darstellung von Lösungen verwenden wir zwei verschiedene Methoden, die wir hier an der zweidimensionalen DGL

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{pmatrix} x(t)$$

mit $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ und Anfangsbedingung $x(0) = (1, 1)^T$ illustrieren wollen. Da jede Lösung einer Differentialgleichung eine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^n darstellt, kann man die Graphen der einzelnen Komponenten $x_i(t)$ der Lösung in Abhängigkeit von t darstellen. Für die obige DGL ist dies in Abbildung 1.1 dargestellt. Die durchgezogene Linie zeigt $x_1(t)$ während die gestrichelte Linie $x_2(t)$ darstellt.

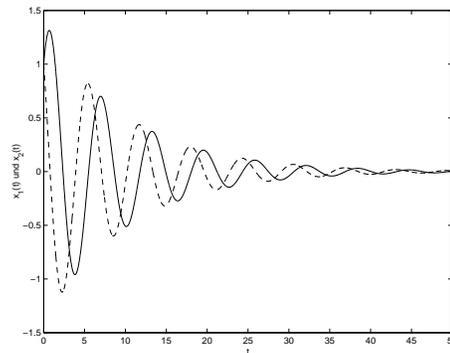


Abbildung 1.1: Darstellung von $x(t)$ mittels Graphen ($x_1(t)$ durchgezogen, $x_2(t)$ gestrichelt)

Eine alternative Darstellung, die speziell für zwei- und dreidimensionale Differentialgleichungen geeignet ist, ergibt sich, wenn man statt der Funktionsgraphen der Komponenten x_i die Kurve $\{x(t) \mid t \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^n$ darstellt. Hier geht in der Grafik die Information über die Zeit (sowohl über die Anfangszeit t_0 als auch über die laufende Zeit t) verloren. Letzteres kann zumindest teilweise durch das Anbringen von Pfeilen, die die Zeitrichtung symbolisieren, ausgeglichen werden. Ein Beispiel für diese Darstellung zeigt Abbildung 1.2.

Am Computer kann man die Darstellung als Kurve mit einer Animation verbinden, so dass man die Information über den zeitlichen Ablauf der Lösung über die Animation wieder zurück erhält. Ein MATLAB M-File, das sowohl die Abbildungen 1.1 und 1.2 sowie eine animierte Version von Abbildung 1.2 erstellt, findet sich auf der Vorlesungs-Homepage¹ unter dem Namen “darstellung.m”.

Für autonome Differentialgleichungen ist der Verlust der *Anfangszeit* in der Grafik nicht weiter schlimm, da die Lösungen nicht wirklich von der Anfangszeit abhängen: man rechnet leicht nach, dass hier für zwei verschiedene Anfangszeiten $t_0 \neq t_1$ die Beziehung

$$x(t; t_0, x_0) = x(t - t_0 + t_1; t_1, x_0) \quad (1.5)$$

¹<http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/modellierung05/>

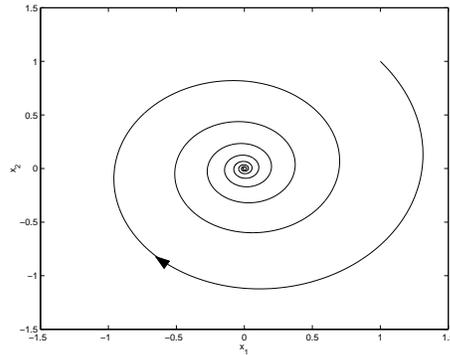


Abbildung 1.2: Darstellung von $x(t)$ als Kurve

gilt. Die Lösung verschiebt sich also auf der t -Achse, verändert sich aber ansonsten nicht. Insbesondere ist die in [Abbildung 1.2](#) dargestellte Kurve für autonome DGL für alle Anfangszeiten gleich. Daraus folgt für autonome DGL, dass sich auch in der Kurvendarstellung zwei Lösungen nicht schneiden können, es sei denn, sie stimmen bereits vollständig überein.

1.3 Literaturhinweise

Ausführliche Einführungen in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen geben z.B. die Lehrbücher

B. Aulbach, Gewöhnliche Differenzialgleichungen, Springer-Verlag, 2. Auflage, 2004

L. Grüne und O. Junge, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme, Springer-Verlag, 2. Auflage, 2016

Kapitel 2

Biologie

Mathematische Modelle werden in vielen verschiedenen Bereichen der Biologie verwendet. Klassische Anwendungen sind z.B. die Untersuchung von Wachstumsprozessen und biochemischen Reaktionen oder die Ausbreitung von Epidemien, neuere Anwendungen finden sich z.B. in vielen Teilgebieten der Gentechnik oder in der Immunologie. Wir werden hier bei den klassischen Bereichen bleiben und uns (ausführlich) mit der Populationsdynamik und (kürzer) mit Epidemien beschäftigen.

2.1 Populationsdynamik für eine Art

Populationsdynamik bezeichnet die Analyse des Wachstums einer oder mehrerer Arten oder Spezies in einem (meist sehr einfach modellierten) Ökosystem. In diesem Abschnitt wollen wir mit Modellen für eine Art beginnen.

2.1.1 Differenzen- und Differentialgleichungen

In der mathematischen Modellierung von Wachstumsprozessen stellt sich zunächst die Frage, ob gewöhnliche Differentialgleichungen überhaupt das richtige mathematische Modellierungswerkzeug sind. Tatsächlich “lebt” eine Differentialgleichung immer auf kontinuierlichen Räumen, während die in der Populationsdynamik auftretenden Größen zunächst einmal diskreter Natur sind: Die Größe einer Population wird üblicherweise in der Anzahl der Individuen gemessen, die selbstverständlich eine natürliche Zahl ist. Dieses Problem wird in praktisch allen Modellen dadurch gelöst, dass man die Größe der Population nicht anhand der diskreten Anzahl der Individuen sondern anhand ihrer Biomasse x misst, und genau so wollen wir es hier halten. Die Biomasse x ist eine (nichtnegative) reelle Zahl, deren zeitliche Entwicklung man durch eine Differentialgleichung modellieren kann.

Das nächste Problem ist die richtige Wahl der Zeitachse. Biologische Messungen (z.B. zum Bestand einer Population) werden niemals kontinuierlich für $t \in [t_0, t_1]$ durchgeführt, sondern zu diskreten Zeiten $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$. Der Zuwachs oder die Abnahme einer Population wird dementsprechend oft bezüglich diskreter Zeitpunkte ausgedrückt. Ein allgemeines diskretes Modell einer Populationsdynamik für x in einem festgelegten Gebiet ist

gegeben durch

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta G(t_i) - \Delta S(t_i) + \Delta M(t_i). \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnet

$$\Delta G(t_i): \text{Anzahl der Geburten im Intervall } [t_i, t_{i+1}] \quad (\geq 0)$$

$$\Delta S(t_i): \text{Anzahl der Sterbefälle im Intervall } [t_i, t_{i+1}] \quad (\geq 0)$$

$$\Delta M(t_i): \text{Migration (Zu- und Abwanderung) im Intervall } [t_i, t_{i+1}] \quad (\geq 0 \text{ oder } \leq 0)$$

Gleichungen von Typ (2.1) nennt man *Differenzgleichungen* und tatsächlich kann man mit solchen zeitdiskreten Modellen arbeiten und es gibt viele (auch aktuelle) Forschungsarbeiten, die sich mit der Theorie von Differenzgleichungen beschäftigen.

Wir werden hier nicht mit Differenzgleichungen arbeiten, sondern statt dessen ein Differentialgleichungsmodell herleiten. Der Grund dafür, Differentialgleichungen vorzuziehen, liegt im Wesentlichen darin, dass es für Differentialgleichungen viele mathematische Analysemethoden gibt, die für Differenzgleichungen entweder komplizierter sind oder gar nicht zur Verfügung stehen, zum Teil aus prinzipiellen mathematischen Gründen (da Lösungen von Differenzgleichungen i.A. ein sehr viel komplexeres Verhalten aufweisen als Lösungen von Differentialgleichungen) oder einfach, weil noch niemand versucht hat sie herzuleiten und zu beweisen. Als Modellierungswerkzeug sind Differenzgleichungen den Differentialgleichungen sicherlich ebenbürtig.

Wie kommt man nun von (2.1) zu einer Differentialgleichungsformulierung? Nehmen wir an, dass die Zeitpunkte t_i äquidistant verteilt sind, dass also $t_{i+1} - t_i =: \Delta t$ für ein von i unabhängiges Δt gilt. Dann kann man (2.1) für $t = t_i$ umformulieren als

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta G(t)}{\Delta t} - \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} + \frac{\Delta M(t)}{\Delta t}.$$

Beachte, dass ΔG , ΔS und ΔM von Δt abhängen, auch wenn dies in der Notation nicht explizit klar wird. Für $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man so

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(t) - s(t) + m(t).$$

Man könnte versuchen, die Funktionen g , s und m mittels

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta G(t)}{\Delta t}, \quad s(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} \quad \text{und} \quad M(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M(t)}{\Delta t}$$

aus ΔG , ΔS und ΔM zu bestimmen, was sinnvoll wäre, wenn wir ΔG , ΔS und ΔM definiert hätten. Diesen Umweg wollen wir nicht gehen, statt dessen werden wir g und s direkt aus geeigneten Modellannahmen ableiten. Migration werden wir in unseren Modellen nicht betrachten, weswegen m immer gleich 0 sein wird.

2.1.2 Einfache Modelle

Die Herleitung eines Modells geschieht typischerweise in zwei Schritten: Im ersten Schritt werden geeignete *strukturelle Annahmen* an die rechte Seite der Differentialgleichung gemacht, was mathematisch bedeutet, dass wir eine gewisse Form des Vektorfeldes f festlegen, die aus bekannten Gesetzmäßigkeiten oder aus heuristischen Überlegungen folgt. In dieser Form finden sich dann eine Reihe von freien Parametern, die im zweiten Schritt — der *Parameterschätzung* — bestimmt werden, um die Ergebnisse des Modells in Übereinstimmung mit realen Daten zu bringen. Wir werden uns in dieser Vorlesung vorwiegend mit dem ersten Schritt befassen, für unser einfachstes Modell wollen wir aber auch den zweiten Schritt durchführen, um damit ein numerisches Verfahren zu illustrieren, mit dem man dies durchführen kann.

Das einfachste Modell der Populationsdynamik für eine Art macht die folgenden Annahmen:

- (i) $g(t)$ ist linear proportional zum aktuellen Bestand der Population:

$$g(t) = \gamma x(t) \text{ für ein } \gamma \in \mathbb{R}$$

- (ii) $s(t)$ ist linear proportional zum aktuellen Bestand der Population:

$$s(t) = \sigma x(t) \text{ für ein } \sigma \in \mathbb{R}$$

- (iii) Migration findet nicht statt: $m(t) \equiv 0$

Dies führt auf die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \tag{2.2}$$

wobei γ *Geburtenrate*, σ *Sterberate* und λ mit $\lambda = \gamma - \sigma \in \mathbb{R}$ *Wachstumsrate* genannt wird. Man rechnet leicht nach, dass die Lösungen von (2.2) mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ durch

$$x(t; x_0) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

gegeben sind. Beachte, dass $x(t)$ hier — wie in allen Wachstumsmodellen — die Größe einer Population beschreibt, so dass in diesen Modellen nur $x \geq 0$ und damit insbesondere $x_0 \geq 0$ sinnvoll ist. Wir schreiben hier $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Auch wenn dies ein sehr einfaches Modell ist, so beschreibt es doch manche realen Wachstumsphänomene relativ gut. Abbildung 2.1(links) zeigt z.B. die Größe der Weltbevölkerung zwischen 1950 und 2005 (in Milliarden Menschen) mit einer Lösung von (2.2). Die Werte x_0 und λ wurden hier über ein nichtlineares Ausgleichsproblem geschätzt (die dafür verwendete numerische Methode ist in Abschnitt 5.6 meines Skripts zur Vorlesung “Einführung in die Numerische Mathematik”¹ beschrieben. Die Daten für die Weltbevölkerung wurden der Webseite <http://www.census.gov> entnommen.

¹<http://num.math.uni-bayreuth.de/en/team/Gruene%5FLars/lecture%5Fnotes/num1/num1%5F6.pdf>

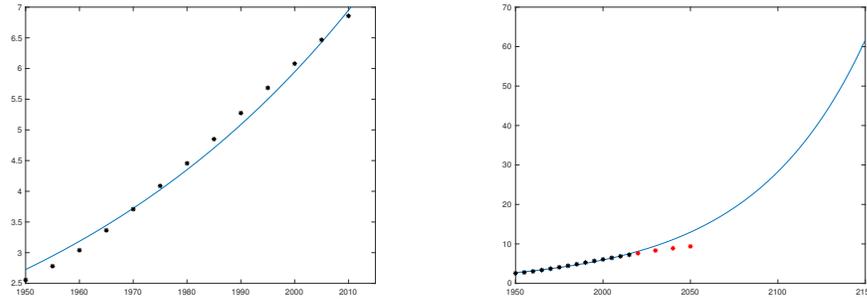


Abbildung 2.1: Lösung der exponentiellen Wachstumsgleichung (2.2) angepasst an die Daten der Weltbevölkerung von 1950 bis 2005, rechts mit erwarteten Daten der Weltbevölkerung bis 2050

Das derzeitige Weltbevölkerungswachstum wird also durch (2.2) offenbar ganz gut getroffen. Fügt man allerdings eine ebenfalls von der obigen Webseite veröffentlichte Vorhersage der zukünftigen Entwicklung hinzu, stellt man fest, dass das exponentielle Wachstum die erwartete zukünftige Bevölkerungsentwicklung deutlich überschätzt, siehe Abbildung 2.1(rechts).

Der Grund dafür ist aus der Struktur der Lösungen sofort ersichtlich: Aus $\lambda > 0$ folgt $e^{\lambda t} \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, für $x_0 > 0$ wächst die modellierte Population also über alle Grenzen; die Wahl $\lambda < 0$ (d.h., die Sterberate ist größer als die Geburtenrate) schafft hier keine brauchbare Abhilfe: in diesem Fall folgt $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, was das reale Verhalten sicherlich auch nicht korrekt widerspiegelt — zumindest derzeit nicht.

Um sich verlangsamendes Wachstum modellieren zu können, werden wir (2.2) um eine “Wachstumsgrenze” erweitern, die wir hier durch eine obere Schranke $K > 0$ für die Größe der Population modellieren; K steht für die *Kapazität* des Lebensraums. Diese ergibt sich aus den zur Verfügung stehenden Ressourcen, wie z.B. Nahrung, Trinkwasser etc. Wir fügen dazu einen Faktor $w(x)$ mit den folgenden Eigenschaften in die Gleichung (2.2) ein.

- (i) Falls $x < K$ ist, soll $w(x) > 0$ sein, da noch “Platz” für Wachstum vorhanden ist.
- (ii) Falls $x > K$ ist, soll $w(x) < 0$ sein, um “negatives Wachstum” zu erzwingen.

Die einfachste Funktion, die dieses leistet, ist die lineare Funktion $w(x) = K - x$. Wir erhalten damit die Gleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda(K - x(t))x(t), \quad (2.3)$$

die als *logistisches Wachstum* bezeichnet wird. Der Ausdruck $\lambda(K - x)$ ist hier die — nun x -abhängige — Wachstumsrate.

Auch für diese DGL ist die explizite Lösung bekannt, sie ist gegeben durch

$$x(t; t_0, x_0) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x_0} - 1\right) e^{-\lambda K(t-t_0)}}.$$

Wenn wir die Parameter dieses Modells an die realen Daten anpassen — mit der gleichen numerischen Methode wie oben — so erhält man Abbildung 2.2(links).

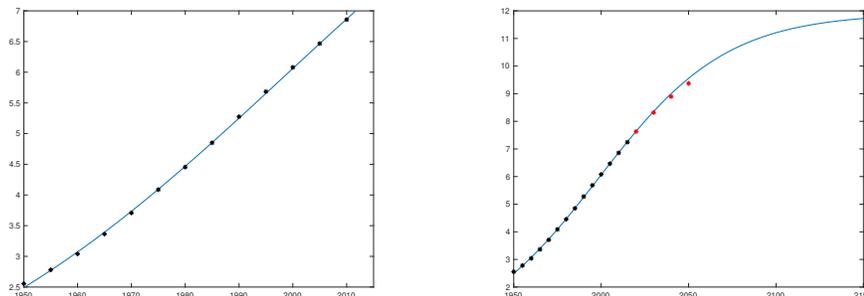


Abbildung 2.2: Lösung der logistischen Wachstumsgleichung (2.2) angepasst an die Daten der Weltbevölkerung von 1950 bis 2005, rechts mit erwarteten Daten der Weltbevölkerung bis 2050

Die so erhaltene Kurve passt deutlich besser zu den vorhergesagten Daten, wie Abbildung 2.2(rechts) zeigt. Der Grund ist, dass dieses Modell — wie wir gleich noch genauer analysieren werden — eine Verlangsamung des Wachstums zulässt, das die exponentielle Wachstumsformel nicht erlaubt.

Man kann das Verhalten der Lösung nun mit Hilfe der oben angegebenen expliziten Formel untersuchen. Wir wollen hier aber — zur Einübung — einen anderen Weg gehen und die dadurch erhaltenen Resultate an der expliziten Lösung überprüfen. Hierzu definieren und betrachten wir zunächst einige wichtige Begriffe für Differentialgleichungen, und zwar allgemein im \mathbb{R}^n .

Definition 2.1 Ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt *Gleichgewicht* (auch *Ruhelage*, *Fixpunkt* oder *Equilibrium*) für eine DGL (1.1), falls $x(t; t_0, x^*) = x^*$ ist für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$. \square

Man sieht leicht, dass ein Punkt x^* genau dann ein Gleichgewicht ist, wenn $f(t, x^*) = 0$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$. Für unser Modell (2.3) sind die Nullstellen von $f(x) = \lambda(K - x)x$ leicht zu bestimmen, es ergeben sich die Gleichgewichte $x^* = 0$ und $x^{**} = K$.

Gleichgewichte sind vor allem deswegen interessant, weil sie Aufschluss über das Langzeitverhalten der Lösungen geben können. Im Modell (2.3) sieht man, dass die Lösungen $x(t)$ zwischen den Gleichgewichten streng monoton wachsen, falls $x(t) \in (0, K)$ liegt (da die Ableitung $\dot{x}(t)$ dann positiv ist), während sie für $x(t) > K$ streng monoton fallen. Da die Lösungen in positiver Zeit durch die Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv x^{**} = K$ beschränkt sind (wegen des Eindeutigkeitssatzes können sie diese nicht schneiden), sind sie also monoton und beschränkt, und damit konvergent.

Mit Hilfe des folgenden Satzes (der ein Spezialfall des sogenannten *Barbalat-Lemmas* ist) können wir mögliche Grenzwerte genau charakterisieren.

Satz 2.2 Betrachte eine DGL (1.1) mit autonomem f . Sei $x(t; t_0, x_0)$ eine Lösung, die für $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ gegen einen Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Dann ist x^* ein Gleichgewicht.

Beweis: Wir beweisen den Fall $t \rightarrow \infty$, der Fall $t \rightarrow -\infty$ folgt analog. Betrachte dazu die Lösung $x(t) = x(t; t_0, x_0)$. Da diese Lösung gegen x^* konvergiert, folgt aus der Stetigkeit von f die Konvergenz $f(x(t)) \rightarrow f(x^*)$. Sei nun für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ die Zeit $t^* > 0$ so groß gewählt, dass die Ungleichungen

$$\|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \|f(x(t)) - f(x^*)\| \leq \varepsilon$$

für alle $t \geq t^*$ gelten. Dann folgt für alle $t \geq t^*$ aus (1.3) die Ungleichung

$$\|x(t) - x(t^*)\| = \left\| \int_{t^*}^t f(x(\tau)) d\tau \right\| \geq \left\| \int_{t^*}^t f(x^*) d\tau \right\| - \left\| \int_{t^*}^t f(x(\tau)) - f(x^*) d\tau \right\|$$

und daraus

$$\begin{aligned} (t - t^*)\|f(x^*)\| &= \left\| \int_{t^*}^t f(x^*) d\tau \right\| \\ &\leq \|x(t) - x(t^*)\| + \left\| \int_{t^*}^t f(x(\tau)) - f(x^*) d\tau \right\| \\ &\leq \underbrace{\|x(t) - x(t^*)\|}_{\leq \|x(t) - x^*\| + \|x^* - x(t^*)\|} + \int_{t^*}^t \|f(x(\tau)) - f(x^*)\| d\tau \leq 2\varepsilon + (t - t^*)\varepsilon. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt für alle $t > t^*$, insbesondere also für $t = t^* + 1$. Mit dieser Wahl folgt

$$\|f(x^*)\| \leq 3\varepsilon,$$

also, da $\varepsilon > 0$ beliebig war, $\|f(x^*)\| = 0$ und damit $f(x^*) = 0$. Folglich ist x^* ein Gleichgewicht der DGL. \square

Satz 2.2 hat eine wichtige Konsequenz für die Analyse von Differentialgleichungen. Er besagt nämlich, dass wir mit den Gleichgewichten im autonomen Fall bereits alle möglichen Grenzwerte von Lösungstrajektorien kennen.

In unserem Modell (2.3) können wir auf Grund der Monotonie also schließen, dass alle Lösungen mit $x(t_0) > 0$ für $t \rightarrow \infty$ gegen $x^{**} = K$ konvergieren. In Rückwärtszeit folgt ebenfalls auf Grund der Monotonie, dass alle Lösungen mit $x(t_0) \in [0, K)$ für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0 konvergieren, während die Lösungen mit $x(t_0) > K$ für $t \rightarrow -\infty$ gegen $+\infty$ divergieren: würden sie konvergieren, müsste wegen der Monotonie und auf Grund von Satz 2.2 ein weiteres Gleichgewicht $x^{***} > K$ existieren, was aber nicht der Fall ist.

Im eindimensionalen Fall kann man leicht mit der Monotonie argumentieren um Grenzwerte von Lösungen zu ermitteln, für höherdimensionale Systeme geht dies i.A. nicht mehr, wir brauchen also andere Techniken. Grundlage dafür ist die folgende Definition, die für allgemeine DGL im \mathbb{R}^n mögliche Konvergenzsituationen in einer Umgebung eines Gleichgewichts beschreibt.

Definition 2.3 (i) Ein Gleichgewicht x^* einer DGL (1.1) heißt *(lokal) exponentiell stabil*, falls eine Umgebung N von x^* sowie Parameter $\sigma, \lambda > 0$ existieren, so dass für alle $x_0 \in N$, alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und alle $t \geq t_0$ die Ungleichung

$$\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| \leq \sigma e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0 - x^*\|$$

gilt.

(ii) Ein Gleichgewicht x^* einer DGL (1.1) heißt *exponentiell instabil*, falls Parameter $\sigma, \lambda > 0$ und eine Umgebung N von x^* existieren, so dass in jeder Umgebung N_0 von x^* ein Punkt $x_0 \in N_0$ existiert, für den für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| \geq \sigma e^{\lambda(t-t_0)} \|x_0 - x^*\|$$

gilt für alle $t \geq t_0$ für die $x(t; t_0, x_0) \in N$ gilt.

(iii) Ein Gleichgewicht x^* einer DGL (1.1) heißt *exponentiell antistabil*, falls Parameter $\sigma, \lambda > 0$ und eine Umgebung N von x^* existieren, so dass für alle $x_0 \in N$ mit $x_0 \neq x^*$ und alle $t_0 \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| \geq \sigma e^{\lambda(t-t_0)} \|x_0 - x^*\|$$

gilt für alle $t \geq t_0$ für die $x(t; t_0, x_0) \in N$ gilt. □

Für $t \rightarrow \infty$ konvergieren also im Fall (i) alle Lösungen aus einer Umgebung des Gleichgewichtes gegen das Gleichgewicht x^* . Im Fall (iii) laufen alle Lösungen für wachsendes t weg von x^* , Konvergenz gegen x^* ist nicht möglich. Im Fall (ii) gibt es beliebig nahe an x^* startende Lösungen die von x^* weg laufen, es ist aber nicht ausgeschlossen, dass ein Anfangswert $x_0 \neq x^*$ existiert, für den $x(t; t_0, x_0)$ gegen x^* konvergiert. Wir werden später Beispiele dafür kennen lernen.

Beachte, dass (i)–(iii) keineswegs alle möglichen Szenarien beschreiben. So könnte z.B. eine Funktion $\beta(\|x_0 - x^*\|, t)$ existieren, die langsamer als $\sigma e^{-\lambda t} \|x_0 - x^*\|$ gegen Null konvergiert und für die statt (i) die Ungleichung

$$\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| \leq \beta(\|x_0 - x^*\|, t)$$

gilt.

Der Grund dafür, in diesen Definitionen die (doch recht speziellen) exponentiellen Abschätzungen zu verwenden, liegt darin, dass sich für diese Definitionen einfache nachprüfbarere Kriterien beweisen lassen — zumindest falls die DGL autonom ist.

Satz 2.4 Sei x^* ein Gleichgewicht einer DGL (1.1) mit autonomem Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei f in einer Umgebung von x^* stetig differenzierbar und sei $Df(x^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Ableitung (also die Jacobi-Matrix) von f an der Stelle x^* . Dann gilt:

(i) Das Gleichgewicht x^* ist genau dann (lokal) exponentiell stabil, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$ von $Df(x^*)$ negativem Realteil haben.

(ii) Das Gleichgewicht x^* ist genau dann exponentiell instabil, wenn es einen Eigenwert $\lambda_i \in \mathbb{C}$ von $Df(x^*)$ gibt, der positiven Realteil besitzt.

(iii) Das Gleichgewicht x^* ist genau dann exponentiell antistabil, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$ von $Df(x^*)$ positivem Realteil haben.

Ein Beweis für (i) findet sich z.B. als Korollar 7.6 in meinem Skript zur Vorlesung “Stabilität und Stabilisierung linearer Systeme”². Beweise für (ii) und (iii) finden sich in Büchern über gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Jacobi-Matrix $Df(x^*)$ wird oft *Linearisierung* von (1.1) in x^* genannt.

Wir wollen dieses Resultat an unserem Modell (2.3) illustrieren und testen, ob sie mit den aus der Monotoniebetrachtungen erhaltenen Resultate übereinstimmen. Wie bereits erwähnt gilt hier

$$f(x) = \lambda(K - x)x$$

und die Gleichgewichte sind gegeben durch $x^* = 0$ und $x^{**} = K$. Da die DGL eindimensional ist, ist die Ableitung Df von f reellwertig. Nach Produktregel gilt

$$Df(x) = f'(x) = \lambda(K - x) - \lambda x \quad \Rightarrow \quad Df(x^*) = \lambda K \quad \text{und} \quad Df(x^{**}) = -\lambda K.$$

Die Eigenwerte dieser “ 1×1 -Matrizen” sind natürlich gerade $K > 0$ für $x^* = 0$ und $-\lambda K < 0$ für $x^{**} = K$. Das Gleichgewicht x^* ist also exponentiell antistabil, während x^{**} exponentiell stabil ist. Dies stimmt mit den bisherigen Beobachtungen überein: $x^{**} = K$ ist ein möglicher Grenzwert für $t \rightarrow \infty$, $x^* = 0$ nicht.

Hat man ein lokal exponentiell stabiles Gleichgewicht gefunden (hier also x^{**}), so besteht der nächste Analyseschritt darin, zu ermitteln, für welche Anfangswerte die Lösungen gegen x^{**} konvergieren. Dies ist die Frage nach dem *Einzugsbereich* des Gleichgewichtes x^{**} . Allgemein ist der Einzugsbereich eines lokal exponentiell stabilen Gleichgewichtes x^* für eine autonome DGL gegeben als

$$\mathcal{D}(x^*) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = x^*\}$$

und für die Umgebung N aus Definition 2.3(i) gilt

$$\mathcal{D}(x^*) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid x(t; x_0) \in N \text{ für ein } t \geq 0\},$$

da alle Lösungen, die nach N laufen wegen (1.4) gegen x^* konvergieren müssen und umgekehrt alle Lösungen, die gegen x^* konvergieren, durch N laufen müssen.

Im \mathbb{R}^n ist die Ermittlung von \mathcal{D} eine schwierige, oft unlösbare Aufgabe. Im eindimensionalen Fall ist die Sache einfacher, da man mit der Monotonie der Lösungen argumentieren kann, wie wir oben bereits gesehen haben. Tatsächlich haben wir die Einzugsbereiche für (2.3) bereits in der Diskussion nach Satz 2.2 schon fast vollständig bestimmt. Dort haben wir gesehen, dass alle Lösungen mit $x(t_0) > 0$ gegen x^{**} konvergieren, es gilt also $\mathcal{D}(x^{**}) \subseteq (x^*, \infty) = (0, \infty)$. Tatsächlich gilt hier sogar Gleichheit, da die Lösungen mit $x(t_0) \leq x^* = 0$ sicherlich nicht gegen x^{**} , da sie die Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv 0$ nicht verlassen bzw. nicht schneiden können.

Wir fassen unsere Analyse der Modells (2.3) noch einmal zusammen:

- (1) Es gibt zwei Gleichgewichte, $x^* = 0$ und $x^{**} = K$, dabei ist x^* exponentiell antistabil und x^{**} exponentiell stabil.
- (2) Genau die Lösungen mit Anfangswert $x_0 \in (0, \infty)$ konvergieren gegen x^{**} .

²<http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/linstab0203/>

- (3) Alle Lösungen mit Anfangswert $x_0 \in [0, x^{**})$ konvergieren in Rückwärtszeit (also für $t \rightarrow -\infty$) gegen x^* , alle Lösungen mit Anfangswert $x_0 > x^{**}$ divergieren in Rückwärtszeit gegen $+\infty$.

(Anfangswerte $x_0 < 0$ ergeben im Modell keinen Sinn, weswegen wir sie nicht betrachten). In Abbildung 2.3 sind die oben angegebenen expliziten Lösungen mit $K = \lambda = 1$ für die Anfangswerte $x_0 = 0, 1/100, 1$ und 2 dargestellt. Es ergibt sich genau das beschriebene Verhalten.

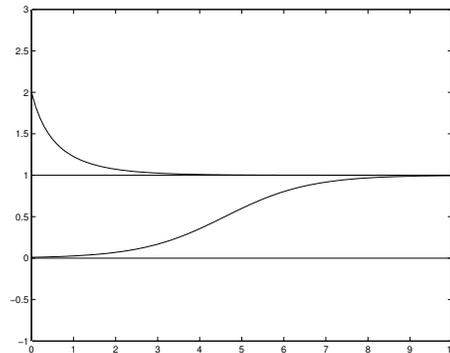


Abbildung 2.3: Lösungen der logistischen Wachstumsgleichung (2.3)

Bemerkung 2.5 Das logistische Wachstum (2.3) ist nicht das einzige Modell für beschränktes Wachstum. Zur Modellierung von Zellwachstum z.B. wird oft die DGL

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \ln \left(\frac{K}{x(t)} \right) \quad (2.4)$$

verwendet, die als *Gompertz-Wachstum* bezeichnet wird und mit deren Lösungen sich klinische Ergebnisse gut nachvollziehen lassen. Hier sind die expliziten Lösungen unbekannt; mit ähnlichen Methoden wie oben kann man aber nachweisen, dass das qualitative Lösungsverhalten dem von (2.3) entspricht. \square

2.1.3 Eine Anwendung des Modells

Mathematische Modelle werden oft zur Beschreibung und Erklärung realer Situationen eingesetzt. Sie dienen aber auch als Teilsysteme in der mathematischen Untersuchung komplexerer Phänomene. Wir wollen dies Prinzip an einem Beispiel illustrieren.

Wir wollen ein Modell für den Fischfang aufstellen, bei dem $x(t)$ eine Fischpopulation beschreibt. Dazu ergänzen wir das Modell um eine *Fangstrategie* $u(t)$, die die Intensität, mit der der Bestand befishet wird und damit die Abnahme der Population durch den Fischfang beschreibt. Als Modellannahme verwenden wir, dass sich das Fischwachstum durch das logistische Wachstum (2.3) beschreiben lässt, falls keine Fische gefangen werden.

Die sich daraus ergebende DGL

$$\dot{x}(t) = \lambda(K - x(t))x(t) - u(t). \quad (2.5)$$

wird *Schäfers Modell* genannt.

Beachte, dass dies nun eine nichtautonome DGL ist. Zudem ist es — je nach Wahl von $u(t)$ — möglich, dass die Lösungen mit positiven Anfangswert x_0 negativ werden, was aber vom Modell her nicht sinnvoll ist, weswegen wir $x(t) > 0$ durch die Wahl von $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ als Definitionsbereich sicher stellen. Die Wahl von D ist also nicht mathematisch sondern aus Modellgesichtspunkten motiviert.

Eine Fangstrategie auf einem Intervall $[t_0, t_1]$ ist nun einfach eine stetige Funktion $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Für einen Anfangswert $x_0 > 0$ nennen wir u *zulässig*, falls die zugehörige Lösung $x(t; t_0, x_0, u)$ auf dem ganzen Intervall $[t_0, t_1]$ existiert. Wir schreiben die Funktion u hier als zusätzlichen Parameter in die Lösung, um die Abhängigkeit der Lösungen von u zu betonen.

Die Anzahl M der gefangenen Fische (natürlich wieder als Biomasse ausgedrückt) ergibt sich nun als Integral über $u(t)$, also

$$M = \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt.$$

Ziel des Fischers könnte es nun sein, diese Größe M zu maximieren. Dies würde jedoch unausweichlich zur Ausrottung der Fische führen: Wären zum Zeitpunkt t_1 noch Fische da, so könnte man $u(t)$ erhöhen und würde trotzdem noch eine zulässige Fangstrategie erhalten. Dies wäre zwar auf dem betrachteten Intervall optimal, nach der Zeit t_1 wäre der Fischer aber arbeitslos, weswegen dies auf lange Sicht keine gute Strategie ist. Selbst wenn der Fischer sich nach der Zeit t_1 zur Ruhe setzen will, wäre dies keine gute Lösung, in jedem Fall aus ökologischer Sicht aber auch aus ökonomischer Sicht, da dies zur Vernichtung der Bestände führen würde.

Man muss also das Überleben der Fische in die Optimierung einbeziehen. Dies führt auf ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\text{maximiere } \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt$$

unter den Nebenbedingungen

- (i) u ist zulässig für den Anfangswert x_0
- (ii) $x(t_1; t_0, x_0, u) \geq x_1$ für einen vorgegebenen Wert $x_1 > 0$

Dies ist ein sogenanntes *optimales Steuerungsproblem*, für dessen Lösung es eine Vielzahl von analytischen und numerischen Techniken gibt. (Weiterführende Vorlesungen in diesem Gebiet werden an der Uni Bayreuth regelmäßig angeboten.)

Hier können wir dieses Problem nicht lösen, statt dessen betrachten wir einen alternativen Ansatz, den wir mit unseren Methoden behandeln können. Wir wählen die Fangstrategie $u(t)$ proportional zur Menge der vorhandenen Fische: $u(t) = cx(t)$ für eine *Fangrate* $c > 0$. Dies vereinfacht nicht nur die Analyse, sondern liefert auch ein Modell für die Tatsache, dass man bei gleichbleibender Befischung (z.B. durch Auslegen von Netzen) in der Regel immer eine zu $x(t)$ proportionale Menge von Fischen fangen wird. Die Fangrate c ergibt

sich dabei z.B. aus Anzahl und Größe der Netze und der Dauer des Auslegens. Mit dieser Wahl von u ergibt sich (2.5) zu

$$\dot{x}(t) = \lambda \left(K - \frac{c}{\lambda} - x(t) \right) x(t).$$

Dadurch verschiebt sich das Gleichgewicht x^{**} aus der obigen Analyse, genauer kann man leicht die Gleichgewichte

$$x^* = 0 \quad \text{und} \quad x^{**} = K - \frac{c}{\lambda}$$

berechnen. Für die Ableitung gilt

$$Df(x^*) = \lambda K - c = \lambda x^{**} \quad \text{und} \quad Df(x^{**}) = c - \lambda K = -\lambda x^{**}.$$

Jetzt muss man drei Fälle unterscheiden.

1. Fall: $x^{**} = K - \frac{c}{\lambda} > 0$. In diesem Fall bleibt alles wie oben, x^{**} ist lokal exponentiell stabil und jede Lösung mit Anfangswert $x_0 > 0$ konvergiert gegen x^{**} .

2. Fall: $x^{**} = K - \frac{c}{\lambda} < 0$. In diesem Fall wird $x^* = 0$ lokal exponentiell stabil und es gilt $f(x) < 0$ für alle $x > 0$. Alle Lösungen fallen also monoton und konvergieren schließlich gegen $x^* = 0$, für $t \rightarrow \infty$ werden die Fische also ausgerottet.

3. Fall: $x^{**} = K - \frac{c}{\lambda} = 0$. In diesem Fall vereinfacht sich die DGL zu $\dot{x}(t) = -\lambda(x(t))^2$, also ist jede Lösung monoton fallend. Zudem gilt $x^* = x^{**} = 0$. Alle Lösungen mit $x_0 > 0$ konvergieren gegen $x^* = 0$: sie können gegen keinen größeren Wert konvergieren, da kein größeres Gleichgewicht existiert; andererseits können sie die konstante Lösung $x(t; x^*) \equiv 0$ aber auch nicht schneiden. Beachte, dass das Gleichgewicht $x^* = 0$ weder lokal exponentiell stabil noch exponentiell instabil ist. Wie in Fall 2 werden die Fische für $t \rightarrow \infty$ ausgerottet.

Aus dieser Analyse kann man nun versuchen zu berechnen, wie $c > 0$ gewählt werden muss, damit der Ertrag maximiert wird. Auf beliebigen endlichen Intervallen ist das nicht so einfach, da aber alle Lösungen gegen eines der Gleichgewichte konvergieren, können wir zumindest approximativ den Ertrag für die Zeiten bestimmen, in denen die Lösung bereits nahe am Gleichgewicht liegt. Wir betrachten den Ertrag in einem Zeitintervall $[t_1, t_1 + 1]$ der Länge 1, wobei wir annehmen, dass t_1 so groß ist, dass wir uns bereits in der Nähe des Gleichgewichtes befinden. Im Fall 1 erhalten wir so

$$M = \int_{t_1}^{t_1+1} cx(t)dt \approx \int_{t_1}^{t_1+1} cx^{**}dt = cx^{**} = cK - \frac{c^2}{\lambda} > 0$$

und im Fall 2 und 3 ergibt sich analog

$$M \approx cx^* = 0.$$

Offensichtlich ist Fall 1 vorzuziehen, da nur dort (auf lange Sicht) ein positiver Ertrag erzielt wird. Zur Maximierung des Fangergebnisses muss man nun den Ausdruck $M(c) = cK - \frac{c^2}{\lambda}$ in c maximieren. Ableiten liefert die notwendige Bedingung

$$M'(c^*) = K - 2\frac{c^*}{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^* = \lambda K/2,$$

und da die zweite Ableitung $M''(c) = -2/\lambda < 0$ ist, ist dies tatsächlich ein lokales Maximum, sogar ein globales, da es das einzige ist. Der maximale Ertrag ergibt sich also zu

$$M(c^*) = cK - \frac{c^2}{\lambda} = \frac{\lambda K^2}{2} - \frac{\lambda^2 K^2}{4\lambda} = \frac{K^2 \lambda}{4}.$$

Welchen Wert haben solche Folgerungen aus einem Modell? Zunächst einmal muss man sich die möglichen Unzulänglichkeiten des Basismodells vergegenwärtigen; für das hier zu Grunde liegende Modell (2.3) machen wir dies im folgenden Abschnitt. Wenn man nun annimmt (oder experimentell belegen kann), dass das Modell Aussagekraft besitzt, so erlauben solche Rechnungen Einsicht in die Struktur des modellierten Phänomens. Hier zum Beispiel beobachtet man, dass man auf lange Sicht den maximalen Ertrag nicht erzielt, indem man die Fangrate beliebig erhöht, denn oberhalb des Wertes c^* wird der langfristig erzielbare Ertrag wieder sinken. In unserem Fall erlaubt dies durchaus gerechtfertigte *qualitative* Folgerungen für das modellierte Fischfangproblem. Eine zuverlässige *quantitative* Berechnung der realen optimalen Fangrate dürfte auf Basis eines so einfachen Modells allerdings nahezu unmöglich sein.

2.1.4 Abschließende Diskussion

Wir wollen das Modell (2.3) noch einmal abschließend diskutieren:

- Das Modell eignet sich gut zur Beschreibung von Wachstum unter idealen Bedingungen; die Ergebnisse von Laborversuchen lassen sich damit gut reproduzieren

In der realen Anwendung gibt es allerdings eine Reihe von weiteren Einflüssen, die hier nicht berücksichtigt werden:

- Naturbedingungen sind in der Regel variabel, z.B. durch Jahreszeiten bedingt. Im Modell ist alles konstant (realistischere Modelle verwenden hier zeitabhängige bzw. stochastische Parameter, wie wir sie im Kapitel über Finanzmathematik kennen lernen werden).
- Die räumliche Verteilung sowohl der Population als auch der Ressourcen wird nicht modelliert (dies könnte z.B. eine partielle Differentialgleichung leisten, mit der vom Ort abhängige Populationsdichten modelliert werden können).
- Die Geburts- und Sterberate hängen unmittelbar von der Größe der Population ab. Faktoren wie z.B. die Altersverteilung werden nicht berücksichtigt (hier können Delay-Differentialgleichungen Abhilfe schaffen, die wir später betrachten werden).
- Der Einfluss anderer Arten ist nicht im Modell enthalten.

Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit Modellen beschäftigen, in denen der letzte Punkt berücksichtigt wird.

2.2 Populationsdynamik für mehrere Arten

In diesem Abschnitt werden wir die Modelle (2.2) und (2.3) auf den Fall mehrerer Arten verallgemeinern. Wir werden dabei zunächst auf den Fall von zwei Arten eingehen, wobei die erste Art (Beute) die Nahrung der zweiten Art (Räuber) darstellt.

2.2.1 Das Räuber–Beute Modell mit unbeschränkten Ressourcen

Dieser Abschnitt behandelt die Erweiterung des sehr einfachen Modells 2.2 auf den Fall von zwei Arten, und zwar Beutetiere (z.B. Ziegen) und Räubertiere (z.B. Wölfe).

Es bezeichne also x_1 die Größe der Beutepopulation und x_2 die Größe der Räuberpopulation. Wir machen die folgenden Modellannahmen:

- (i) Die Beutepopulation x_1 verhält sich gemäß (2.2) mit $\lambda = \gamma - \sigma$, wobei γ konstant ist und $\sigma = \tilde{\sigma} + bx_2$. Für die Beutetiere gibt es also unbegrenzte Ressourcen und die Sterberate σ besteht aus einem konstanten Term $\tilde{\sigma} \in (0, \gamma)$ (natürlicher Tod) und einem zu x_2 proportionalen Term bx_2 (Tod durch Räuber). Für $x_2 = 0$ wächst die Population exponentiell. Wir setzen $a = \gamma - \tilde{\sigma} > 0$.
- (ii) Die Räuberpopulation verhält sich ebenfalls gemäß (2.2) mit $\lambda = \gamma - \sigma$. Hier ist die Sterberate σ konstant und $\gamma = \tilde{\gamma} + dx_1$ für $\tilde{\gamma} \in (0, \sigma)$ und $d > 0$, d.h. die Geburtenrate hängt affin linear von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Beute x_1 ab; für $x_1 = 0$ stirbt die Räuberpopulation wegen $\sigma > \tilde{\gamma}$ aus. Wir setzen $c = \sigma - \tilde{\gamma} > 0$.

Zusammen erhalten wir so die zweidimensionale Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit den Parametern $a, b, c, d > 0$. Dieses Modell wird als *Lotka–Volterra Modell* bezeichnet. V. Volterra³ hat dieses Modell im biologischen Kontext eingeführt (vgl. dazu Abschnitt 2.3.1), A.J. Lotka⁴ hat das Modell unabhängig von Volterra zur Beschreibung einer hypothetischen chemischen Reaktion entwickelt.

Um die Analyse von (2.6) zu vereinfachen wollen wir die Zahl der Parameter zu reduzieren. Dazu führt man die Koordinatentransformation $x_1 \rightarrow \frac{d}{c}x_1$ und $x_2 \rightarrow \frac{b}{a}x_2$ durch. Dies führt auf die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - ax_1(t)x_2(t) = ax_1(t)(1 - x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_2(t) + cx_1(t)x_2(t) = -cx_2(t)(1 - x_1(t)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Beachte, dass die Lösungen $\tilde{x}(t; t_0, \tilde{x}_0)$ von (2.6) und $x(t; t_0, x_0)$ von (2.7) mittels

$$x(t; t_0, x_0) = A\tilde{x}(t; t_0, A^{-1}x_0) \quad \text{und} \quad \tilde{x}(t; t_0, \tilde{x}_0) = A^{-1}x(t; t_0, A\tilde{x}_0) \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{d}{c} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

³italienischer Physiker und Mathematiker, 1860–1940

⁴US-amerikanischer Chemiker und Mathematiker, 1880–1949

zusammenhängen; alle Lösungen von (2.6) lassen sich also aus (2.7) berechnen und umgekehrt. Man nennt die zwei Gleichungen auch *äquivalent*.

Wir bestimmen zunächst die Gleichgewichte von (2.7), also die Nullstellen des Vektorfeldes

$$f(x) = \begin{pmatrix} ax_1(1-x_2) \\ -cx_2(1-x_1) \end{pmatrix}.$$

Hier sieht man leicht, dass die Punkte

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die einzigen Gleichgewichtspunkte sind. Zur Bestimmung der Stabilität dieser Gleichgewichte berechnen wir

$$Df(x^*) = \begin{pmatrix} a(1-x_2^*) & -ax_1^* \\ cx_2^* & -c(1-x_1^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Df(x^+) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Als Eigenwerte dieser Matrizen ergeben sich a und $-c$ in x^* sowie $\pm\sqrt{-ca}$ in x^+ . Aus Satz 2.4 folgt damit exponentielle Instabilität (aber nicht Antistabilität) von x^* . Dies ist gut zu erklären: Für Anfangswerte der Form $x_0 = (x_1, 0)^T$ (also keine Räuber) mit $x_1 \neq 0$ wächst der Betrag der Lösung exponentiell, sie läuft also exponentiell von $x^* = 0$ weg. Die Menge aller Punkte, die exponentiell wegläuft, heißt *instabile Mannigfaltigkeit* $M_i(x^*)$ von x^* , hier ist das einfach der Unterraum $M_i(x^*) = \langle (1, 0)^T \rangle$. Umgekehrt konvergieren alle Lösungen zu Anfangswerten der Form $x_0 = (0, x_2)^T$ (also keine Beute) mit $x_2 \in \mathbb{R}$ exponentiell gegen $x^* = 0$, dies ist die sogenannte *stabile Mannigfaltigkeit* $M_s(x^*)$, hier wiederum ein Unterraum, nämlich $M_s(x^*) = \langle (0, 1)^T \rangle$.

Auf x^+ trifft keiner der Fälle in Satz 2.4 zu, da hier beide Eigenwerte wegen $ca > 0$ offenbar die Realteile 0 besitzen. Wir wissen also, dass Lösungen weder exponentiell konvergieren noch wegläuft können. Was aber passiert statt dessen? Um sich einen Überblick über das Verhalten dieses Systems zu verschaffen, empfiehlt sich hier die numerische Lösung und Darstellung in Kurvenform, die in Abbildung 2.4 mit $a = c = 1$ zu sehen ist.

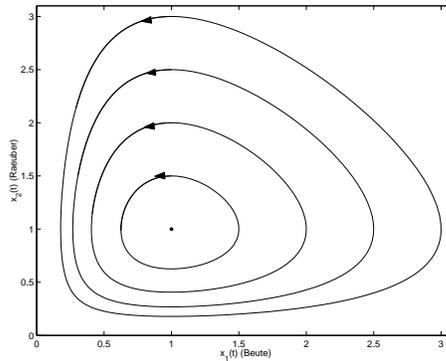


Abbildung 2.4: Lösungen der Räuber–Beute Modells (2.7) mit $a = c = 1$

Man erkennt in dieser Grafik gut, warum die Ruhelage $x^+ = (1, 1)^T$ weder exponentiell stabil noch exponentiell instabil ist: Alle Lösungen, die nicht auf $M_s(x^*)$ oder $M_i(x^*)$ liegen,

laufen auf periodischen Bahnen um dieses x^+ herum, weder konvergieren sie noch laufen sie weg. Formal nennt man eine Lösung $x(t; t_0, x_0)$ *periodisch*, falls ein $T > 0$ existiert, so dass

$$x(t; t_0, x_0) = x(t + T; t_0, x_0)$$

gilt für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Zeit $T > 0$ heißt die *Periode* der Lösung. (Wir verlangen hier i.A. nicht, dass T die minimale Periode ist.) Beachte, dass eine Lösung $x(t)$ einer autonomen Gleichung genau dann periodisch ist, wenn es zwei Zeiten $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x(t_1) = x(t_2) =: x_P$ gilt. Aus dieser Gleichheit folgt nämlich sowohl $x(t) = x(t; t_1, x_P)$ als auch $x(t) = x(t; t_2, x_P)$. Aus (1.5) folgt damit $x(t + t_2 - t_1) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also Periodizität für $T = t_2 - t_1$.

Wir wollen diese numerische Erkenntnis nun mathematisch rigoros beweisen. Dazu betrachten wir den Quotienten

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} = \frac{-cx_2(t)(1 - x_1(t))}{ax_1(t)(1 - x_2(t))}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$ax_1(t)\dot{x}_2(t) - ax_1(t)x_2(t)\dot{x}_2(t) = -cx_2(t)\dot{x}_1(t) + cx_2(t)x_1(t)\dot{x}_1(t)$$

und damit

$$c\dot{x}_1(t) - c\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} + a\dot{x}_2(t) - a\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} = 0.$$

Beachte, dass alle diese Gleichungen nur gelten, wenn alle Nenner ungleich Null sind, also nur für Lösungen $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, die sich in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ befinden und keine Gleichgewichte sind.

Integrieren wir diese Gleichung nun von 0 bis t , so erhalten wir

$$cx_1(t) - c \ln x_1(t) + ax_2(t) - a \ln x_2(t) = k(x(0))$$

mit $k(x(0)) = cx_1(0) - c \ln x_1(0) + ax_2(0) - a \ln x_2(0)$. Die auf $D_V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definierte Funktion

$$V(x) = cx_1 - c \ln x_1 + ax_2 - a \ln x_2 \tag{2.8}$$

ist also konstant entlang von Lösungen; es gilt

$$V(x(t; x_0)) = V(x_0) \text{ für alle } t \geq 0$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}V(x(t; x_0)) = 0.$$

V heißt *erstes Integral* oder auch *Konstante der Bewegung* für (2.7). Die Lösungen von (2.7) mit Anfangswert $x_0 \in D_V$ laufen also entlang der Höhenlinien $V^{-1}(l) := \{x \in D_V \mid V(x) = l\}$ von V , die in Abbildung 2.5 gemeinsam mit dem Graphen von V skizziert sind. Man sagt, die Höhenlinien $V^{-1}(l)$ sind *invariante Mengen* bezüglich (2.7). Beachte, dass V ein globales Minimum in x^+ mit $V(x^+) = c + a$ besitzt.

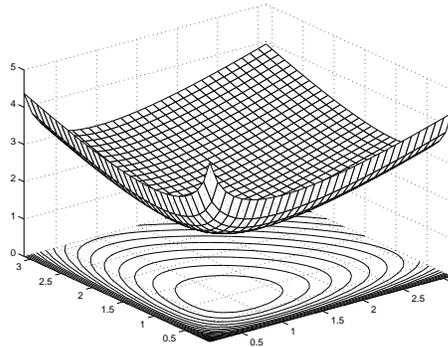


Abbildung 2.5: Graph und Höhenlinien von V aus (2.8) mit $a = c = 1$

Dass die Lösungen tatsächlich periodisch sind, folgt aus der Analyse des Vektorfeldes auf den Höhenlinien. Wir betrachten eine Höhenlinie $V^{-1}(l)$ für ein $l > V(x^+)$ und teilen $V^{-1}(l)$ in die vier Segmente

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in V^{-1}(l) \mid x_1 \leq x_2 \leq 2 - x_1\} \\ S_2 &= \{x \in V^{-1}(l) \mid x_2 \leq x_1 \leq 2 - x_2\} \\ S_3 &= \{x \in V^{-1}(l) \mid x_1 \geq x_2 \geq 2 - x_1\} \\ S_4 &= \{x \in V^{-1}(l) \mid x_2 \geq x_1 \geq 2 - x_2\} \end{aligned}$$

ein, vgl. Abbildung 2.6.

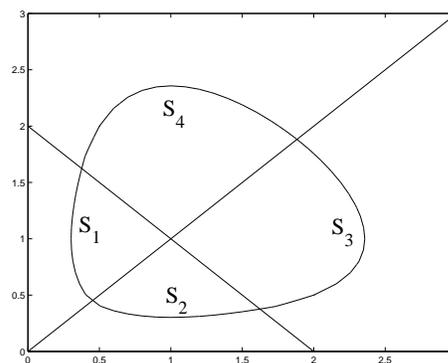


Abbildung 2.6: Segmente S_1 , S_2 , S_3 und S_4

Aus der Form der Höhenlinien folgt jetzt, dass ein $\alpha > 0$ existiert, so dass $|x_1 - 1| \geq \alpha$ gilt für alle $x \in S_1$ und $x \in S_3$ und $|x_2 - 1| \geq \alpha$ gilt für alle $x \in S_2$ und alle $x \in S_4$. Desweiteren existiert ein $\beta > 0$ mit $x_1 > \beta$ und $x_2 > \beta$ für alle $x \in V^{-1}(l)$. Aus der Gleichung 2.7

folgt man damit die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &< -c\beta\alpha, & \text{falls } x(t) \in S_1 \\ \dot{x}_1(t) &> a\beta\alpha, & \text{falls } x(t) \in S_2 \\ \dot{x}_2(t) &> c\beta\alpha, & \text{falls } x(t) \in S_3 \\ \dot{x}_1(t) &< -a\beta\alpha, & \text{falls } x(t) \in S_4 \end{aligned}$$

In jedem Sektor ist also eine der beiden Komponenten $x_1(t)$ oder $x_2(t)$ streng monoton wachsend oder fallend mit von 0 (gleichmäßig in t) verschiedener Steigung. Deswegen muss jeder Sektor nach einer endlichen Zeit verlassen werden, und zwar in der Reihenfolge $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_1$. Die Lösung ist also tatsächlich periodisch.

Um die Aussagen des Modells für die modellierten Populationsgrößen zu interpretieren, ist es sinnvoll, eine beispielhafte Lösung in Abhängigkeit von t darzustellen. In Abbildung 2.7 ist dies gemacht.

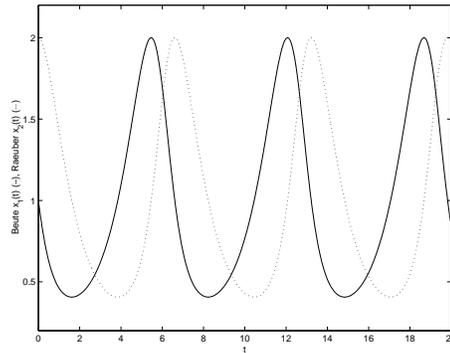


Abbildung 2.7: Lösung von (2.7) mit $x_0 = (1, 2)^T$ und $a = c = 1$

Beide Populationen schwanken also periodisch. Wenn (wie am Anfang) viele Räuber und wenig Beute vorhanden sind, nehmen beide Populationen ab. Wenn die Zahl der Räuber unter einer gewissen Schwelle liegt, nimmt die Beutepopulation wieder zu. Wenn genügend Beute vorhanden ist, beginnt auch die Räuberpopulation wieder zuzunehmen und wenn diese eine kritische Marke überschritten hat, nimmt die Zahl der Beute wieder ab, usw. Ein solches Verhalten ist in der Natur durchaus zu beobachten.

2.2.2 Das Räuber–Beute Modell mit beschränkten Ressourcen

Im Modell (2.6) hat die (unrealistische) Eigenschaft, dass sich die Beutepopulation in Abwesenheit der Räuber gemäß (2.2) verhält, also unbeschränkt wächst. Wir wollen dies durch das realistischere Modell (2.3) ersetzen, das wir hier mit $\mu = \lambda K$ und $e = \lambda$ als

$$\dot{x}(t) = \mu x_1(t) - e x_1(t)^2 \quad (2.9)$$

schreiben. Wir ändern damit die Modellannahme (i) wie folgt ab.

- (i') Die Beutepopulation x_2 verhält sich gemäß (2.9) mit $\mu = \gamma - \sigma$ und $e > 0$, wobei e und γ konstant sind und $\sigma = \tilde{\sigma} + b x_2$. Für die Beutetiere gibt es also begrenzte

Ressourcen und die Sterberate σ besteht aus einem konstanten Term $\tilde{\sigma} \in (0, \gamma)$ (natürlicher Tod) und einem zu x_2 proportionalen Term bx_2 (Tod durch Räuber). Für $x_2 = 0$ konvergiert die Populationsgröße gegen $K = a/e$ mit $a = \gamma - \tilde{\sigma} > 0$.

Damit erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) - ex_1(t)^2 \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Analog zu (2.6) können wir diese Gleichung durch eine lineare Koordinatentransformation vereinfachen. Hier transformieren wir $x_1 \rightarrow \frac{d}{c}x_1$, $x_2 \rightarrow \frac{bd}{da-ec}x_2$ und erhalten so

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t)(1 - x_2(t)) + \beta x_1(t)(1 - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_2(t)(1 - x_1(t))\end{aligned}\tag{2.11}$$

mit $\alpha = a - ec/d$ und $\beta = ec/d$. Hier muss man aufpassen, dass bei dieser Transformation positive x_1, x_2 wieder auf positive x_1, x_2 abgebildet werden. Da $a, b, c, d, e > 0$ sind, ist dies genau dann der Fall, wenn $\frac{bd}{da-ec} > 0$ ist, also wenn $ad > ec$ gilt. Wir wollen uns auf diesen Fall einschränken, nicht nur aus formalen Gründen, sondern auch aus Modellierungsgründen: Für $ad \leq ec$ kann man zeigen, dass die Räuberpopulation für $t \rightarrow \infty$ für alle Anfangswerte ausstirbt, wir wollen hier aber den Fall der langfristigen Koexistenz beider Arten betrachten, für den $ad > ec$ eine notwendige Bedingung ist.

Als Gleichgewichte erhält man hier $x^* = (0, 0)^T$, $x^{**} = ((\alpha + \beta)/\beta, 0)^T$ und $x^+ = (1, 1)^T$. Nur x^+ liegt in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, weswegen wir dieses Gleichgewicht genauer untersuchen wollen.

Die Linearisierung ergibt sich zu

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \alpha(1 - x_2) + \beta(1 - 2x_1) & -\alpha x_1 \\ cx_2 & -c(1 - x_1) \end{pmatrix}$$

also

$$Df(x^+) = \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha c}.$$

Falls die Wurzel komplex ist, sind die Realteile $-\beta/2$ negativ, falls die Wurzel reell ist, sind auch $\lambda_{1/2}$ reell und es gilt

$$\lambda_{1/2} \leq -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha c} < -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4}} = 0,$$

also erhalten wir in beiden Fällen negative Realteile, weswegen x^+ lokal exponentiell stabil ist. Wir wissen also insbesondere, dass es eine Umgebung von x^+ gibt, so dass alle Lösungen in dieser Umgebung gegen x^+ konvergieren. Was ist aber nun der Einzugsbereich $\mathcal{D}(x^+)$?

Dieser lässt sich hier analytisch ermitteln: Betrachte dazu das erste Integral (2.8)

$$V(x) = cx_1 - c \ln x_1 + \alpha x_2 - \alpha \ln x_2.$$

Im Gegensatz zu (2.7) ist diese Funktion für (2.11) nicht mehr konstant entlang von Lösungen, statt dessen gilt für jede Lösung $x(t)$ in D_V die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= c\dot{x}_1(t) - c\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} + \alpha\dot{x}_2(t) - \alpha\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} \\ &= \left(c\alpha x_1(t)(1 - x_2(t)) + c\beta x_1(t)(1 - x_1(t)) \right) \left(1 - \frac{1}{x_1(t)} \right) \\ &\quad - \alpha c x_2(t)(1 - x_1(t)) \left(1 - \frac{1}{x_2(t)} \right) \\ &= c\beta(1 - x_1(t))(x_1(t) - 1) = -c\beta(x_1(t) - 1)^2 \end{aligned}$$

Die Funktion $V(x(t))$ fällt also monoton in t , für $x_1(t) \neq 1$ sogar streng monoton. Beachte, dass $V(x)$ in $x = x^+$ ein globales Minimum besitzt; weitere lokale Minima existieren nicht. Eine solche Funktion wird in der Stabilitätstheorie auch *Lyapunovfunktion*⁵ genannt. Hier haben wir den Sonderfall einer *semidefiniten* Lyapunovfunktion, da die Ableitung entlang der Lösungen nicht strikt kleiner als Null ist (wie meist für eine Lyapunovfunktion verlangt) sondern nur ≤ 0 .

Wir beweisen nun $x(t) \rightarrow x^+$ für $t \rightarrow \infty$. Da $V(x(t))$ monoton fällt und nach unten beschränkt ist, konvergiert $V(x(t))$ gegen einen Wert V_∞ . Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.2 sieht man nun, dass $\frac{d}{dt}V(x(t)) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt, also muss $x_1(t) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow \infty$ gelten. Dies ist aber nur dann möglich, falls $x_2(t) \rightarrow 1$ konvergiert: Wäre $|x_2(t) - 1| \geq \delta$ so würde aus (2.11) für $x_1(t)$ in einer Umgebung der 1 entweder $\dot{x}_1(t) > \varepsilon$ oder $\dot{x}_1(t) < -\varepsilon$ folgen, was der Konvergenz $x_1 \rightarrow 1$ widersprechen würde. Also gilt $x_2(t) \rightarrow 1$ und damit $x(t) \rightarrow x^+$. Alle Lösungen mit Anfangswerten in D_V konvergieren also gegen x^+ , weswegen $\mathcal{D}(x^+) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ist. Die numerischen Ergebnisse in Abbildung 2.8 bestätigen dieses Ergebnis.

Die Argumentation, die wir hier verwendet haben, ist als *Lasalles Invarianzprinzip* bekannt und lässt sich auch allgemein als Satz formulieren, was wir hier aber nicht vertiefen wollen.

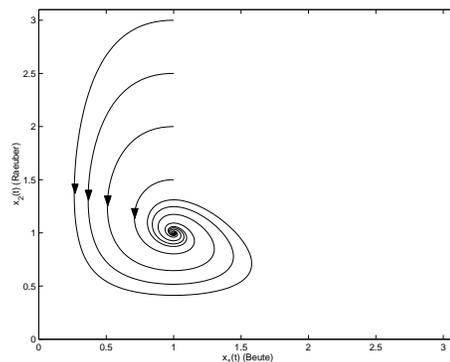


Abbildung 2.8: Lösungen des Räuber–Beute Modells (2.11) mit $a = c = 1$, $\beta = 0.5$

Zur Interpretation des Modells ist wieder die Darstellung einer Lösung in Abhängigkeit von t nützlich, wie sie in Abbildung 2.9 gegeben ist.

⁵A.M. Lyapunov, russischer Mathematiker, 1857–1918

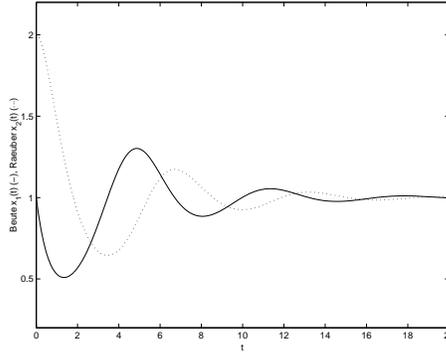


Abbildung 2.9: Lösung von (2.11) mit $x_0 = (1, 2)^T$ und $a = c = 1$, $\beta = 0.5$

Die Lösung zeigt zwar ein ähnliches Schwingungsverhalten wie in Abbildung 2.7, konvergiert aber mit wachsendem t gegen ein Gleichgewicht. Solche Gleichgewichte verschiedener gemeinsam existierender Arten sind in realen Ökosystemen oft zu beobachten, ebenso wie die charakteristischen Schwankungen, die auftreten, wenn das System durch äußere Einflüsse “aus dem Gleichgewicht” gebracht wurde.

Auf eine abschließende Diskussion dieses Modells können wir hier verzichten, da hier exakt die gleichen Unzulänglichkeiten wie in der Diskussion im Abschnitt 2.1.4 bestehen, mit Ausnahme des letzten Punktes natürlich.

2.2.3 Verallgemeinerung auf n Arten

Wir wollen in diesem Abschnitt abschließend auf die Verallgemeinerung des Modells (2.10) auf n verschiedene Arten x_1, \dots, x_n eingehen. Wenn wir für alle Arten die gleichen Modellannahmen treffen, nämlich, dass die Dynamik durch (2.9) gegeben ist, wobei die jeweilige Wachstumsrate μ affin linear von allen anderen Arten abhängt, so erhalten wir das Modell

$$\dot{x}_i(t) = k_i x_i(t) + b_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i(t) x_j(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

mit $k_i \neq 0$, $a_{ii} \leq 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und $b_i > 0$. Wir definieren mittels der a_{ij} die Matrix $A = (a_{ij})$. Der Koeffizient a_{ii} entspricht für jede Art gerade dem e aus (2.9), er modelliert also die Ressourcenbeschränkung, während die a_{ij} für $i \neq j$ die Interaktion der Arten beschreibt. Für Beute x_i und Räuber x_j muss die Bedingung $a_{ij} < 0$ und $a_{ji} > 0$ gelten. Die etwas seltsam anmutende Notation mit b_i^{-1} ergibt sich aus der ursprünglichen, etwas anderen Schreibweise des Modells. Beachte, dass die Modelle (2.6) und (2.10) Spezialfälle dieses Modells sind.

Der Spezialfall $a_{ii} = 0$ und $a_{ij} = -a_{ji}$ wird als *Volterra-Ökologie* bezeichnet. In diesem Fall ist die Matrix $A = (a_{ij})$ antisymmetrisch, d.h. $x^T A x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Wenn wir nach Gleichgewichten x^+ suchen, für die alle Arten koexistieren, so gilt $x_i^+ > 0$, also

$$k_i x_i^+ + b_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^+ x_j^+ = 0 \quad \Rightarrow \quad b_i k_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^+ = 0, \quad (2.13)$$

diese Gleichgewichte sind also als Lösungen eines linearen Gleichungssystems gegeben. Wenn A invertierbar ist, existiert also höchstens ein solches Gleichgewicht: es gibt genau eine Lösung x^* des linearen Gleichungssystems, für die aber nicht $x_i^* > 0$ gelten muss.

Die Konstruktion des ersten Integrals V lässt sich auf dieses Modell verallgemeinern. Wenn ein Gleichgewicht x^+ mit $x_i^+ > 0$ für $i = 1, \dots, n$ existiert, so kann man nachrechnen, dass die Funktion

$$V(x) = \sum_{i=1}^n b_i (x_i - x_i^+ \ln x_i) \quad (2.14)$$

die Gleichung

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = (x(t) - x^+)^T A (x(t) - x^+)$$

erfüllt. Falls A negativ semidefinit ist, so ist diese Ableitung ≤ 0 und wir können die obige Argumentation auf das n -dimensionale Modell übertragen. Im Falle einer Volterra-Ökologie ist A antisymmetrisch, weswegen $\frac{d}{dt} V(x(t)) = 0$ ist. Hier erhalten wir also wieder das Phänomen periodischer Lösungen.

2.3 Anwendungen der Populationsdynamik

2.3.1 Auswirkungen der Befischung

Die Volterra-Ökologie und speziell das Lotka-Volterra Modell gilt in der Biologie i.A. als zu stark vereinfacht, da hierbei in dem sowieso schon einfachen Modell (2.12) noch weitere strukturelle Vereinfachungen gemacht werden. Man muss aber berücksichtigen, dass dieses Modell zur Erklärung eines speziellen Sachverhaltes entwickelt wurde, für den es tatsächlich gut funktioniert. Wir wollen diese Anwendung nun erläutern.

In den 1920er Jahren beobachtete der italienische Biologe D'Ancona, dass der Anteil der Raubfische (Haie, Rochen, ...) am Gesamtfischfang während des 1. Weltkrieges im Mittelmeer deutlich höher als vorher und nachher war. Im Hafen Fiume in Italien wurden die folgenden Anteile der Raubfische am Gesamtfang festgestellt:

Jahr	1914	1915	1916	1917	1918
Raubfischanteil	11,9%	21,4%	22,1%	21,2%	36,4%
Jahr	1919	1920	1921	1922	1923
Raubfischanteil	27,3%	16,0%	15,9%	14,8%	10,7%

Natürlich war D'Ancona klar, dass während des Krieges weniger gefischt wurde, aber warum sollte dies die Raubfische mehr begünstigen?

Das Volterra-Modell wurde zur Erklärung dieses Phänomens entwickelt. Tatsächlich handelt es sich hier nur um zwei (Gruppen von) Arten, so dass sich (2.12) zu (2.6) vereinfacht, wenn man $k_1 = a$, $k_2 = -c$, $b_1 = d$, $b_2 = b$, $a_{12} = -bd$ und $a_{21} = bd$ setzt (dies zeigt insbesondere, dass (2.6) ein Spezialfall der Volterra-Ökologie ist). Wie kann dieses Modell mit den bekannten periodischen Lösungen aus den Abbildungen 2.4 und 2.7 das Phänomen beschreiben? Die Werte in der obigen Tabelle sind Jahresmittelwerte, weswegen es sich anbietet, auch die vom Modell gegebenen Werte zu mitteln. Hier gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.6 Sei $x(t)$ eine periodische Lösung von (2.6) mit Periode T . Dann gilt

$$\bar{x}_1 := \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt = \frac{c}{d} \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 := \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) dt = \frac{a}{b}.$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} = a - bx_2(t).$$

Für diesen Ausdruck gilt

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T a - bx_2(t) dt.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}}_{= \frac{d}{dt} \ln x_1(t)} dt &= \frac{1}{T} (\ln x(T) - \ln x(0)) = 0, \\ &= \frac{d}{dt} \ln x_1(t) \end{aligned}$$

da die Lösung periodisch mit $x(T) = x(0)$ ist. Also folgt

$$0 = \frac{1}{T} \int_0^T a - bx_2(t) dt = a - b\bar{x}_2$$

und damit die Behauptung für \bar{x}_2 . Analog berechnet man den Wert für \bar{x}_1 . \square

Die zunächst vielleicht etwas überraschende Erkenntnis dieses Lemmas ist, dass die Mittelwerte über eine Periode nicht vom Anfangswert abhängen. Der Anteil der Raubfische an der Gesamtmenge ist im Mittel also gegeben durch

$$\bar{x}_2^A = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}} = \frac{ad}{ad + cb}$$

Um die veränderten Anteile während des 1. Weltkrieges zu erklären, müssen wir den Fischfang in (2.6) berücksichtigen. Nimmt man hier proportionale Fangraten px_1 und px_2 an, so ergibt sich das Modell mit Fischfang zu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (a - p)x_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -(c + p)x_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

Der mittlere Raubfischanteil bei Fangrate p ist demnach

$$\bar{x}_2^A(p) = \frac{(a - p)d}{(a - p)d + (c + p)b}$$

oder als Kehrwert ausgedrückt

$$\bar{x}_2^A(p)^{-1} = \frac{(a - p)d + (c + p)b}{(a - p)d} = \frac{(c + p)b}{(a - p)d} + 1.$$

Wenn also die Fangrate p abnimmt, so verringert sich der Bruch $\frac{(c+p)b}{(a-p)d}$ ebenfalls (der Zähler wird kleiner und der Nenner größer), womit auch $\bar{x}_2^A(p)^{-1}$ kleiner wird, weswegen der Raubfischanteil $\bar{x}_2^A(p)$ zunimmt. Das Modell liefert also eine Erklärung dafür, warum bei geringerer Befischung der Raubfischanteil zunimmt.

2.3.2 Der Chemostat

Eine konkrete technische Anwendung von Räuber–Beute–Modellen ist der sogenannte *Chemostat*, eine Apparatur zur Züchtung von Mikroorganismen, die sowohl in der Forschung als auch der technischen Anwendung eine Rolle spielt, z.B. bei der Herstellung von Insulin. Schematisch besteht ein Chemostat aus drei Gefäßen, vgl. Abbildung 2.10: Ein Vorratsgefäß, in dem eine Nährlösung bereitgestellt wird, der eigentliche Chemostat, in dem sich die Mikroorganismen befinden und ein Auffanggefäß, in dem die entstehenden Organismen gesammelt werden. Im eigentlichen Chemostat wird dabei durch Rühren sicher gestellt, dass die enthaltenen Organismen und Nährstoffe homogen verteilt sind.

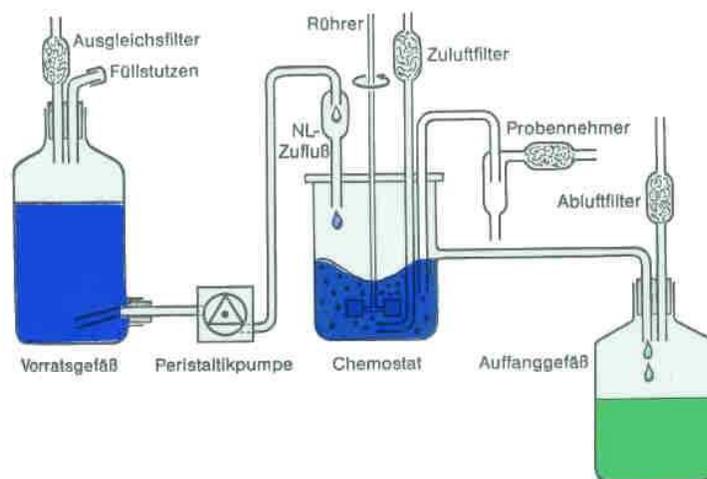


Abbildung 2.10: Chemostat, vgl. www.wb.fh-heilbronn.de/test/bionet/6.4.html

Für den einfachsten Fall mit einer Art Mikroorganismen ist die Idee der Modellierung nun relativ einfach: Wir modellieren die Nährlösung als Beute S und die Mikroorganismen x_1 als Räuber. Hierbei ergeben sich allerdings einige Änderungen gegenüber unseren bisherigen Modellen, die wir nun diskutieren werden.

Für die Nährlösung S entsprechen die “Geburten” nun der Menge der Zufuhr aus dem Vorratsbehälter. Im Gegensatz zu unserem bisherigen Modell hängt diese Größe nun aber nicht von der Anzahl der bereits vorhandenen Nährlösung S ab, sie wird daher durch einen konstanten positiven Term $k \cdot D > 0$ modelliert, der sich aus der Konzentration k der Lösung und der Menge der eingeleiteten Lösung D (Durchflussrate) ergibt. Die “Sterbefälle” setzen sich aus zwei Komponenten zusammen, nämlich aus dem Anteil der Nährstoffe, die in den Auffangbehälter gespült werden — dieser Anteil ist gerade gleich DS — und dem Anteil, der von den Mikroorganismen als Nahrung aufgenommen wird. Aus experimentellen Daten hat sich herausgestellt, dass der dafür bisher verwendete Term bsx_1 die experimentelle Realität nicht gut genug beschreibt. Für große Mengen an Nährlösung $S \gg 1$ steigt die Aufnahme nämlich nicht proportional zur Nahrungsmenge S , weil die Organismen natürlich nicht beliebig viel Nahrung aufnehmen können, selbst wenn diese zur Verfügung steht. Als

realistischer hat sich hier ein Term der Form

$$\frac{mS}{a+S} \frac{x_1}{\gamma}$$

herausgestellt. Insgesamt kommen wir damit auf die Gleichung

$$\dot{S}(t) = (k - S(t))D - \frac{mS(t)}{a+S(t)} \frac{x_1(t)}{\gamma}.$$

Die Population x_1 verhält sich nun wie im klassischen Lotka–Volterra Modell mit dem Unterschied, dass der von x_1 abhängige Term in der Wachstumsrate gleich $\frac{mS(t)}{a+S(t)}$ gewählt wird, was bewirkt, dass die Wachstumsrate bei sehr großem Nahrungsangebot nicht ins Unendliche steigt. Wir erhalten also

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) \left(\frac{mS(t)}{a+S(t)} - D \right).$$

Beachte, dass die Sterberate hier nicht dem natürlichen Tod entspricht (dieser taucht im Modell nicht auf), sondern dem Anteil der Organismen, die durch die nachströmende Flüssigkeit in das Auffanggefäß gespült werden. Durch die Koordinatentransformation $S \rightarrow \frac{S}{k}$ und $x_1 \rightarrow \frac{x_1}{k\gamma}$ und die Wahl einer geeigneten Zeiteinheit $t \rightarrow tD^{-1}$ vereinfacht sich das Modell zu dem normierten Chemostat–Modell (beachte, dass m und a sich bei diesen Transformationen auch verändern; der Einfachheit halber ändern wir die Notation aber nicht)

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= (1 - S(t)) - \frac{mS(t)}{a+S(t)} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) &= x_1(t) \left(\frac{mS(t)}{a+S(t)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für dieses erste einfache Modell ergeben sich die Gleichgewichte

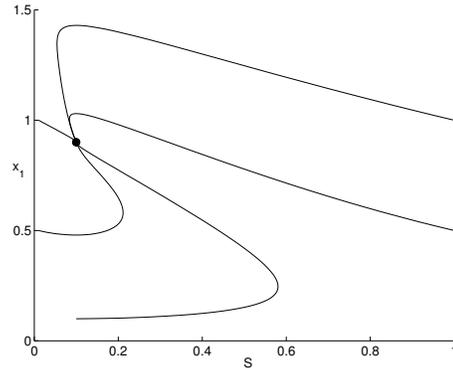
$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^+ = \begin{pmatrix} \frac{a}{m-1} \\ \frac{m-1-a}{m-1} \end{pmatrix}$$

Beachte, dass das Gleichgewicht x^+ für $a > 0$ nur für $m > 1 + a$ im positiven Quadranten liegt. Die Eigenwerte der Jacobi–Matrix in x^+ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = (am - m^2 + 2m - a - 1)/(am)$. Man rechnet nach, dass diese für $m > 1$ und $a > 0$ negativ sind, das Gleichgewicht x^+ ist also lokal exponentiell stabil. Abbildung 2.11 zeigt einige ausgewählte numerische Lösungen mit $a = 0.1$, $m = 2$

Die in Abbildung 2.11 dargestellten Lösungen legen nahe, dass der Einzugsbereich $\mathcal{D}(x^+)$ tatsächlich der ganze positive Quadrant ist. Ein rigoroser Nachweis dieser Eigenschaft kann ähnlich wie in Abschnitt 2.2.2 mittels einer geeigneten Lyapunovfunktion V durchgeführt werden.

Das Modell (2.15) lässt sich auf d Mikroorganismenkulturen x_1, \dots, x_d verallgemeinern, indem man weitere Gleichungen der gleichen Struktur hinzufügt und je nach den Abhängigkeiten entsprechende Kopplungsterme hinzugügt. Stellt z.B. x_j Nahrung von x_i dar, so fügt man zu den Gleichungen von x_j und x_i die Terme

$$\pm x_j(t) \frac{m_i x_i(t)}{a_i + x_j(t)}$$

Abbildung 2.11: Lösungen von (2.15) mit $a = 0.1$, $m = 2$

hinzu, mit Vorzeichen '−' für x_j und Vorzeichen '+' für x_i .

Beispielsweise ist ein Modell für $d = 3$ Kulturen gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= (1 - S(t)) - \frac{m_1 S(t)}{a_1 + S(t)} x_1(t) \\
 \dot{x}_1(t) &= x_1(t) \left(\frac{m_1 S(t)}{a_1 + S(t)} - 1 - \frac{m_2 x_2(t)}{a_2 + x_1(t)} \right) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_2(t) \left(\frac{m_2 x_1(t)}{a_2 + x_1(t)} - 1 - \frac{m_3 x_3(t)}{a_3 + x_2(t)} \right) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_3(t) \left(\frac{m_3 x_2(t)}{a_3 + x_2(t)} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

In diesem Beispiel stellt S Nahrung für x_1 dar, während x_1 Nahrung für x_2 und x_2 wiederum Nahrung für x_3 ist.

Durch die geschickte Skalierung der Parameter ergibt sich eine interessante Eigenschaft des Modells, die man zur Vereinfachung der entstehenden Gleichungen ausnutzt. Definieren wir die Variable $\Sigma(t) = 1 - S(t) - \sum_{k=1}^d x_k(t)$, so sieht man, dass für diese die Differentialgleichung

$$\dot{\Sigma}(t) = -\Sigma(t)$$

gilt, da sich die Kopplungsterme gerade gegenseitig aufheben. Es gilt also

$$\Sigma(t) = e^{-t} \Sigma(0).$$

Mit anderen Worten konvergieren alle Lösungen $(S(t), x_1(t), \dots, x_d(t))^T$ gegen die Menge

$$\Omega = \left\{ (S, x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^{d+1} \mid S + \sum_{k=1}^d x_k(t) = 1 \right\}.$$

Diese Menge wird *Omega-Limesmenge* des Systems genannt. Wenn wir also am Langzeitverhalten der Lösungen interessiert sind, genügt es die Lösungen auf Ω zu betrachten, da sich Lösungen in der Nähe von Ω aus Stetigkeitsgründen wie Lösungen auf Ω verhalten⁶.

⁶Obwohl diese Eigenschaft intuitiv anschaulich ist, ist der formale Beweis nicht trivial und nur unter geeigneten Annahmen an die Lösungen erfüllt.

Die Gleichungen auf Ω erhält man nun einfach, indem man $S = 1 - \sum_{k=1}^d x_k(t)$ setzt und diese Größe in die Gleichungen für x_1, \dots, x_d einsetzt. Für unser einfaches Modell (2.15) ergibt sich damit

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) \left(\frac{m(1 - x_1(t))}{a + 1 - x_1(t)} - 1 \right) = x_1(t) \left(\frac{m - 1}{1 + a - x_1(t)} \right) (1 - \lambda - x_1(t)) \quad (2.17)$$

mit $\lambda = \frac{a}{m-1}$. Die zweite Form der Gleichung ist deswegen nützlich, da man hier die Gleichgewichte $x_1^* = 0$ und $x_1^+ = 1 - \lambda$ sofort ablesen kann. Tatsächlich stimmen diese mit den oben bestimmten Gleichgewichten überein.

Für das Modell mit drei Organismen ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) \left(\frac{m_1(1 - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t))}{a_1 + 1 - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)} - 1 - \frac{m_2 x_2(t)}{a_2 + x_1(t)} \right) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) \left(\frac{m_2 x_1(t)}{a_2 + x_1(t)} - 1 - \frac{m_3 x_3(t)}{a_3 + x_2(t)} \right) \\ \dot{x}_3(t) &= x_3(t) \left(\frac{m_3 x_2(t)}{a_3 + x_2(t)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

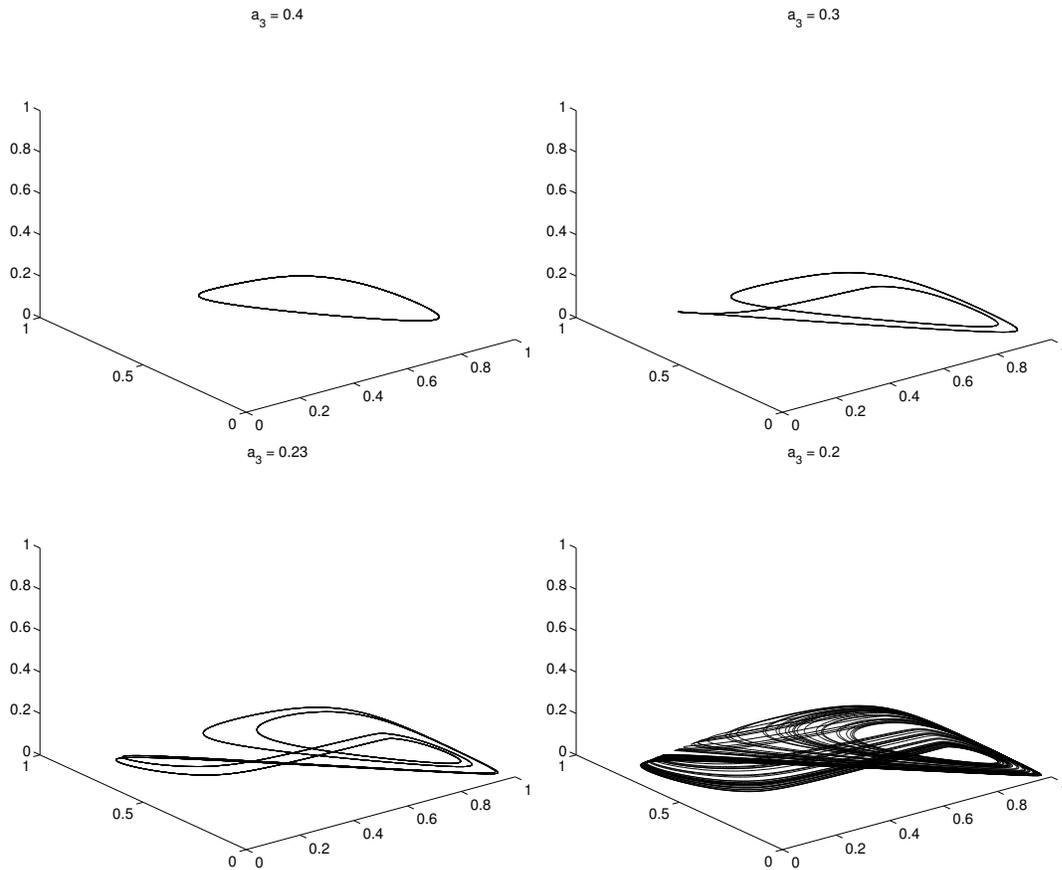
In diesem Modell stellt sich heraus, dass die Gleichgewichte leider keine wesentlichen Informationen über das Langzeitverhalten des Systems liefern, da sie antistabil sind und damit keine möglichen Grenzwerte sind. Tatsächlich existieren in diesem Modell kompliziertere Grenzlösungen, gegen die die Lösungen aus einer Umgebung streben. Eine theoretische Analyse ist hier zwar ebenfalls möglich, erfordert allerdings tiefliegende Resultate aus der Theorie der dynamischen Systeme, die wir hier nicht behandeln können. Wir begnügen uns daher mit numerischen Ergebnissen, und zwar für die Parameter $m_1 = 10$, $a_1 = 0.08$, $m_2 = 4.0$, $a_2 = 0.23$, $m_3 = 3.5$ und a_3 zwischen 0.2 und 0.4. Abbildung 2.12 zeigt die zugehörigen Lösungen.

Man sieht, dass mit kleiner werdendem a_3 die Perioden der Lösungen immer länger werden, man spricht von *Periodenverdopplung*. Tatsächlich ist für $a = 0.2$ keine Periodizität mehr feststellbar, die Lösung zeigt scheinbar unvorhersehbare Oszillationen. Man spricht hier von chaotischem Verhalten oder kurz Chaos. In allen vier Fällen ist es so, dass Lösungen aus einer Umgebung gegen die dargestellten Lösungen konvergieren, die Mengen sind also "anziehend" oder attrahierend und heißen deswegen *Attraktor*.

Bemerkung 2.7 Eine Variante des Modells entsteht, wenn man (z.B. durch einen geeigneten Regelmechanismus) sicher stellt, dass die vorhandenen Nährstoffe $S(t)$ konstant gehalten werden, also $S(t) \equiv S_0 > 0$ sind. In diesem Fall kann die S -Gleichung ebenfalls weggelassen werden, dafür muss aber wieder ein Kapazitätsterm eingeführt werden, um das unbeschränkte Wachstum zu vermeiden. \square

2.4 Ausbreitung von Epidemien

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir Modelle für die Ausbreitung von Epidemien betrachten.

Abbildung 2.12: Lösungen von (2.18) mit verschiedenen Werten von a_3

2.4.1 Modelle vom SI-Typ

Neben dem Epidemiemodell mit Latenz gibt es eine ganze Reihe weiterer Epidemiemodelle, von denen wir hier einige noch kurz ansprechen wollen. Dabei betrachten wir Modelle, in denen die Ansteckung über die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens infizierter und infizierbarer Individuen modelliert wird. Wir nehmen dazu an, dass es eine konstante Gesamtpopulation der Größe N gibt. Da im Folgenden immer Anteile an der Gesamtpopulation betrachtet werden, können wir N sofort auf 1 normieren. Nun sei $S \in [0, 1]$ der Anteil der Population, der infizierbar (engl. susceptible) und $I = (1 - S) \in [0, 1]$ der Anteil, der infiziert (engl. infected) ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Individuen aus beiden Gruppen zusammentreffen, ist dann proportional zu SI . Damit erhalten wir das sogenannte *SI-Modell*

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) &= \beta S(t)I(t),\end{aligned}$$

wobei $\beta > 0$ ein Parameter ist, der angibt, wie wahrscheinlich ein Zusammentreffen zweier Individuen ist und wie wahrscheinlich es ist, dass dabei ein nicht infiziertes Individuum

infiziert wird. Nutzt man aus, dass hier stets $S + I = 1$ gilt, kann man das zweidimensionale System zu der eindimensionalen Gleichung

$$\dot{I}(t) = \beta I(t)(1 - I(t))$$

vereinfachen. Dies ist gerade die logistische Gleichung mit $K = 1$, was auch erklärt, warum wir diese im vorherigen Modell verwendet haben. Aus der Analyse der logistischen Gleichung wissen wir bereits, dass die Lösungen für alle Anfangswerte $I_0 > 0$ gegen 1 konvergieren. Es werden also nach und nach alle Individuen infiziert.

Etwas interessanter wird die Dynamik, wenn wir die Möglichkeit hinzufügen, dass Individuen (mit konstanter Rate $\gamma > 0$) von der Krankheit genesen können. Dann ändern sich die Gleichungen zum sogenannten *SIS-Modell*

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t) \\ \dot{I}(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t).\end{aligned}$$

Auch diese Gleichungen können wir wegen $S + I = 1$ zu einer eindimensionalen Gleichung vereinfachen, nämlich

$$I(t) = \beta I(t)(1 - I(t)) - \gamma I(t) = \beta I(t) \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta} - I(t) \right).$$

Dies ist — im Fall $\beta > \gamma$ — wieder die logistische Gleichung, jetzt mit $K = (\beta - \gamma)/\beta$, deren Lösung demzufolge für $I_0 > 0$ gegen $(\beta - \gamma)/\beta$ konvergiert. In diesem Modell ist also für $\beta > \gamma$ langfristig ein konstanter Anteil der Bevölkerung infiziert. Im Fall $\beta \leq \gamma$ konvergiert der infizierte Anteil gegen Null.

Zuletzt betrachten wir noch den Fall, dass das Individuum nach überstandener Krankheit gegen die Krankheit immun (engl. resistant) ist. Für dieses Modell müssen wir eine weitere Variable $R \in [0, 1]$ hinzunehmen, die den immunen Anteil der Population beschreibt. Es gilt $S + I + R = 1$. Die Gleichungen des sogenannten epidemischen *SIR-Modells* sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\beta S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \dot{R}(t) &= \gamma I(t).\end{aligned}$$

Hier stellt man fest, dass die erste und die zweite Gleichung unabhängig von R sind. Zudem rechnet man nach, dass $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R}$ stets gleich Null sind, weswegen $S + I + R$ konstant ist, insbesondere also gleich 1, wenn $S_0 + I_0 + R_0 = 1$ sind.

Die nichtnegativen Gleichgewichte des Modells mit $S^* + I^* + R^* = 1$ errechnen sich als

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \geq 0, a + b = 1.$$

Es liegt also genau dann ein Gleichgewicht vor, wenn keine infizierten Individuen vorhanden sind. Die aus Anwendungssicht interessante Frage ist hier nun aber weniger, gegen welches

Gleichgewicht die Lösung konvergiert, sondern vielmehr, wie groß der Anteil der Infizierten im zeitlichen Verlauf maximal ist, da diese Zahl eine Aussage über die Größe der Epidemie angibt.

Die Antwort auf diese Frage hängt vom Anfangswert und von den Parametern der Gleichung ab. Im Fall $\beta \leq \gamma$ sieht man aus der Gleichung für \dot{I} , dass $\dot{I}(t) \leq 0$ ist. Daher wird der maximale Anteil an Infizierten stets am Anfangspunkt zur Zeit $t = 0$ angenommen. Die Epidemie kann also nicht wachsen.

Im Fall $\beta > \gamma$ ist das anders. Hier kann man (durch Lösen einer eindimensionalen Hilfs-Differentialgleichung) die Formel

$$I(S) = S(0) + I(0) - S + \frac{\gamma}{\beta} \ln \left(\frac{S}{S(0)} \right)$$

für I in Abhängigkeit von S herleiten. Es genügt nun, den Fall $R(0) = 0$ zu betrachten, da wir andernfalls den bereits resistenten Anteil der Population herausnehmen und den verbleibenden Anteil als neue Gesamtpopulation (skaliert auf Größe 1) ansehen können. Für $R(0) = 0$ gilt $S(0) + I(0) = 1$ vereinfacht sich die obige Formel zu

$$I(S) = 1 - S + \frac{\gamma}{\beta} \ln \left(\frac{S}{S(0)} \right).$$

Jetzt suchen wir ein Maximum dieses Ausdrucks, weswegen wir $I'(S) = 0$ setzen, also

$$-1 + \frac{\gamma}{\beta S} = 0,$$

was durch $S = \gamma/\beta$ gelöst wird. Einsetzen in die Formel für I liefert

$$I_{\max} = 1 + \frac{\gamma}{\beta} \left(\ln \left(\frac{\gamma}{\beta S(0)} \right) - 1 \right).$$

2.4.2 Ein Modell mit Verzögerung

Oft ist es so, dass Erreger sich nicht sofort nach dem Befall eines Individuums weiter verbreiten können, sondern erst nach einer sogenannten Latenzzeit. Das folgende Modell, das diesen Effekt berücksichtigt, wurde zur Modellierung einer Pflanzenkrankheit, der Kartoffelfäule, entwickelt.

Wir machen zunächst die Modellannahme, dass sich die Masse x der infizierten Pflanzen gemäß dem SI-Modell mit $\beta = \lambda$ und $I = x$ verhält, also

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)(1 - x(t)). \quad (2.19)$$

Hierbei wird angenommen, dass die Kartoffelpflanzen so gleichmäßig stehen, dass der Erreger sich konstant mit Infektionsrate λ ausbreiten kann.

Wir haben oben bereits gesehen, dass die Anzahl der insgesamt infizierten Pflanzen bei diesem Modell immer gegen 1 konvergiert. Insbesondere würde eine mittels (2.19) modellierte Epidemie immer den gesamten Bestand befallen. Dies ist nicht wirklich realistisch.

In einem realistischeren Modell sollten weitere aus der Biologie bekannte Tatsachen einbezogen werden. Wir werden hier nun den zeitlichen Verlauf einer Infektion berücksichtigen. Für die Kartoffelfäule ist bekannt, dass sich die Krankheit nach erfolgter Infektion zum Zeitpunkt t^* in zwei Stadien entwickelt:

- Das Latenzstadium $[t^*, t^* + p]$, in dem sich der Erreger nicht ausbreiten kann
- Das Infektionsstadium $[t^* + p, t^* + p + q]$, in dem sich der Erreger verbreiten kann

Nach der Zeit $t^* + p + q$ ist eine weitere Ausbreitung nicht möglich.

Mit $x(t)$ bezeichnen wir weiterhin die Masse der infizierten Pflanzen. Wir wollen nun eine Differentialgleichung für $x(t)$ aufstellen. Die Wahrscheinlichkeit einer Ansteckung wird durch den “ $\lambda x(t)$ ”-Term vor der Klammer modelliert. Wir ändern diesen Term so ab, dass er die Latenzzeit modelliert: Die Zunahme der Infektion ist nun proportional zur Größe des Anteils der infizierten Population, die sich zur Zeit t im Infektionsstadium befindet. Diese Größe ist gegeben durch die Menge aller Infektionen, die älter als p sind, also $x(t - p)$, minus der Anzahl der Infektionen, die älter als $p + q$ sind, also $x(t - p - q)$. Wir ersetzen $\lambda x(t)$ also durch $\lambda(x(t - p) - x(t - p - q))$ und erhalten so die Gleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda(1 - x(t))(x(t - p) - x(t - p - q)). \quad (2.20)$$

Dies ist jetzt keine gewöhnliche Differentialgleichung im üblichen Sinne mehr, da die rechte Seite nicht nur von $x(t)$ sondern auch von $x(t - p)$ und $x(t - p - q)$ abhängt. Eine solche Gleichung nennt man *Delay-Differentialgleichung*, auf deutsch auch *verzögerte Differentialgleichung*.

Allgemein kann man diese Gleichungen in der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_k))$$

für ein $f : (\mathbb{R}^n)^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ schreiben, wobei wir $\tau_k > \tau_{k-1} > \dots > \tau_1$ annehmen. Auch für diese Gleichungen gibt es einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, der dem Satz 1.4 sehr ähnlich ist (man benötigt wieder eine Lipschitz-Bedingung etc.). Ein wesentlicher Unterschied besteht aber bei der Wahl der Anfangsbedingung: Es genügt hier nicht, nur die Zeit t_0 und den Wert $x(t_0)$ festzulegen. Tatsächlich reicht es auch nicht, zusätzlich die Werte $x(t_0 - \tau_i)$ für $i = 1, \dots, k$ festzulegen, denn für jeden Zeitpunkt $t > t_0$ benötigt man zur Berechnung von $\dot{x}(t)$ ja insbesondere die Werte $x(t - \tau_k)$. Da $t - \tau_k$ das gesamte Intervall $[t_0 - \tau_k, t_0]$ durchläuft, müssen wir als Anfangs“wert” also zusätzlich zu $x(t_0) = x_0$ noch eine Funktion $\Psi : [t_0 - \tau_k, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ festlegen. Für die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage reicht es dabei aus, Ψ als stetige Funktion zu wählen, wobei es nicht nötig ist, dass Ψ in t_0 durch x_0 stetig fortgesetzt wird.

Wir wollen nun das Langzeitverhalten der Lösungen von (2.20) untersuchen um damit zu ermitteln, wie groß der für $t \rightarrow \infty$ befallene Pflanzenbestand bei der durch (2.20) modellierten Epidemie ist und wie dieser Wert von p und q abhängt. Wir wählen dabei die Anfangsfunktion $\Psi \equiv 0$ und einen Anfangswert $x(0) = x_0 \in (0, 1)$; die Infektion gelangt also zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ von außen in den Pflanzenbestand.

Unter dieser Annahme sieht man per Induktion über $n = 1, 2, 3, \dots$ aus (2.20), dass auf jedem Intervall $[(n - 1)(p + q), n(p + q)]$ die Ungleichungen $\dot{x}(t) \geq 0$ und $x(t) \in [0, 1)$ gelten.

Also ist $x(t)$ monoton wachsend und durch 1 beschränkt und konvergiert damit gegen einen Wert $\beta \in (0, 1]$. Mit $g(t) := x(t - p) - x(t - p - q)$ können wir (2.20) als

$$\dot{x}(t) = \lambda g(t)(1 - x(t))$$

schreiben. Dies ist nun wieder eine klassische gewöhnliche Differentialgleichung, für die man (mit einer Technik, die in Lehrbüchern unter dem Namen *Trennung der Variablen* zu finden ist) die explizite Lösung

$$x(t) = 1 - (1 - x_0) \exp\left(-\lambda \int_0^t g(\tau) d\tau\right)$$

berechnen kann. Durch Ableiten nach t prüft man leicht nach, dass dies tatsächlich die Lösung ist. Für $g(t)$ gilt nun wegen $x(\sigma) = \Psi(\sigma) = 0$ für $\sigma < 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_0^t g(\tau) d\tau &= \int_0^t x(\tau - p) d\tau - \int_0^t x(\tau - p - q) d\tau \\ &= \int_0^{t-p} x(\sigma) d\sigma - \int_0^{t-p-q} x(\sigma) d\sigma = \int_{t-p-q}^{t-p} x(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Wir erhalten somit

$$x(t) = 1 - (1 - x_0) \exp\left(-\lambda \int_{t-p-q}^{t-p} x(\sigma) d\sigma\right),$$

(was man wiederum durch Ableiten nach t überprüfen kann) und damit

$$\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 - (1 - x_0) \exp\left(-\lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-p-q}^{t-p} x(\sigma) d\sigma\right).$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \beta$ folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-p-q}^{t-p} x(\sigma) d\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} qx(t - p - \theta q) = q\beta.$$

Der Limes β ist also bestimmt durch die Gleichung

$$\beta = 1 - (1 - x_0)e^{-q\lambda\beta}.$$

Leider erlaubt diese Gleichung keine explizite Lösung. In Abbildung 2.13 ist $\beta(q, x_0)$ für $\lambda = 1$ und $x_0 = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ in Abhängigkeit von q dargestellt. Die Graphen wurden numerisch berechnet. Beachte, dass $\beta(0, x_0) = x_0$ gilt.

Die Graphen geben also den aus dem Modell (2.20) berechneten Anteil befallener Pflanzen für $t \rightarrow \infty$ in Abhängigkeit vom Anfangsbefall x_0 und der Infektionszeit q an. Für wachsendes q nähert sich die Größe der 1 an, d.h. fast der gesamte Bestand wird befallen. Für kleinere Infektionszeiten q hingegen wird nur ein Teil des Bestandes befallen. Für q gegen 0 nähert sich dieser Wert dem Anfangsbefall x_0 an. Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, dass zur Ausbreitung der Krankheit eine gewisse Anzahl (relativ) frischer Infektionen vorliegen muss. Wenn die Wachstumsrate $\dot{x}(t)$ abnimmt, so fehlt der ‘Nachschub’ an

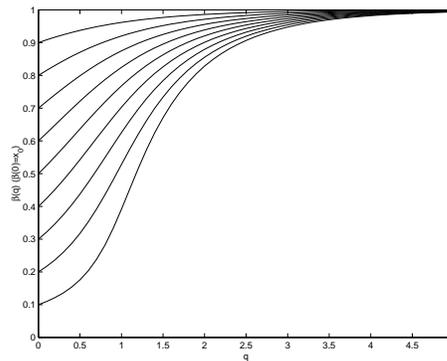


Abbildung 2.13: Die Funktion $\beta(q, x_0)$ für verschiedene x_0 in Abhängigkeit von q

frischen Infektionen, dadurch nimmt $\dot{x}(t)$ weiter ab usw., weswegen die Lösung gegen $\beta < 1$ konvergiert.

Auch dieses Modell ist sicherlich für viele praktische Zwecke zu einfach, weil viele wichtige Einflüsse unberücksichtigt bleiben, z.B. Resistenzen gegen die Krankheit oder die räumliche Verteilung der Pflanzen. Trotzdem kann es zum Verständnis der Abhängigkeiten zwischen Infektionszeiten und Ausbreitungen von Epidemien beitragen und hierbei insbesondere die Komplexität der möglichen Abhängigkeiten illustrieren.

2.5 Literaturhinweise

Eine umfassende Einführung in die mathematische Biologie bietet das (in der ersten und zweiten Auflage einbändige, in der dritten Auflage zweibändige) Buch

J.D. Murray, Mathematical Biology, Springer, 2002 (dritte Auflage).

Die Theorie des Chemostat ist in einer Reihe von Büchern beschrieben, z.B. in

H.L. Smith and P. Waltman, The Theory of the Chemostat, Cambridge University Press, 2003 (zweite Auflage)

Die Modelle für Epidemien finden sich in

M. Martcheva, An Introduction to Mathematical Epidemeology, Springer, 2010

und

J.W. Prüß, R. Schnaubelt, R. Zacher, Mathematische Modelle in der Biologie, Birkhäuser, 2008

Kapitel 3

Mechanik

Die mathematische Modellierung der klassischen Mechanik geht im Wesentlichen auf die Arbeiten von Isaac Newton¹, Joseph–Louis Lagrange² und William R. Hamilton³ zurück. Newton entwickelte die elementaren Bewegungsgleichungen (und nebenbei die Differentialrechnung), während Lagrange und Hamilton weiterführende mathematische Modellierungs- und Analysemethoden entwickelten. Diese werden heutzutage allgemein als der eleganteste mathematische Zugang betrachtet, weswegen wir uns auf ihn konzentrieren werden. Der Ansatz beruht darauf, die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Modellierung der Energie des Systems herzuleiten. Die Einzelnen Schritte der Herleitung werden jeweils an zwei Beispielen illustriert, dem linearen Oszillator (oder Schwinger) und dem Pendel.

3.1 Lagrange–Gleichungen

Die Idee der Lagrange–Gleichungen basiert auf der Betrachtung der Energie des Systems. Wir beschränken uns hierbei auf ein System s von N Massepunkten mit Positionen $r_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ und Massen m_i , $i = 1, \dots, N$, dessen kinetische Energie gerade durch

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \|v_i\|^2$$

gegeben ist.

Zur Modellierung der Tatsache, dass sich ein mechanisches System — bedingt durch die mechanische Struktur — nur auf vorgegebenen Bahnen bewegen kann, verwenden wir Nebenbedingungen der Form

$$c_j(r_1, \dots, r_N, t) = 0, \quad \text{für } j = 1, \dots, J,$$

wobei die $r_i = (x_i, y_i, z_i)^T \in \mathbb{R}^3$ die Positionen der Massepunkte beschreiben.

Beispiel Oszillator: Wir betrachten eine Masse, die an einer Feder an der Decke eines Raumes aufgehängt ist und sich nur vertikal (also auf und ab) bewegt, vgl. Abbildung 3.1.

¹englischer Mathematiker und Physiker, 1642–1727

²französischer Mathematiker, 1736–1813 (geboren als Giuseppe Lodovico Lagrangia in Turin, deshalb manchmal — vor allem in italienischen Büchern — auch als italienischer Mathematiker bezeichnet)

³irischer Mathematiker, 1805–1865

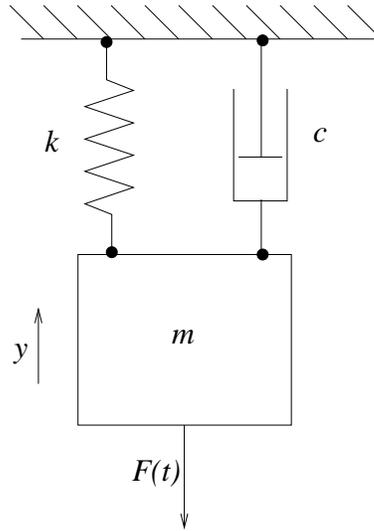


Abbildung 3.1: Mechanischer Oszillator

Da sich hier nur die y -Koordinate verändern kann, ergeben sich die beiden Gleichungen für $r = (x, y, z)^T$ zu

$$c_1(r) = x \text{ und } c_2(r) = z.$$

Beispiel Pendel: Wir betrachten ein im Nullpunkt aufgehängtes und in der xy -Ebene schwingendes starres Pendel mit Punktmasse m im Punkt $r(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ und Länge ρ , vgl. Abb. 3.2.

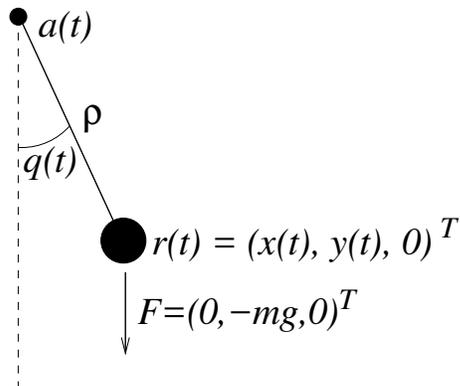


Abbildung 3.2: Pendelmodell

Die möglichen Positionen von r werden dann genau durch die Gleichungen

$$c_1(r) = \|r\|^2 - \rho^2 \text{ und } c_2(r) = z$$

beschrieben.

Wir nehmen nun an, dass die durch

$$M = \{(r_1, \dots, r_N)^T \mid c_j(r_1, \dots, r_N, t) = 0, \quad \text{für } j = 1, \dots, J\}$$

implizit definierte *Mannigfaltigkeit der verträglichen Konfigurationen* durch Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_l) \in Q$ mit einer offenen Menge $Q \subset \mathbb{R}^l$ parametrisieren lässt, d.h. dass stetig differenzierbare Funktionen $r_i(q, t)$ existieren mit

$$M = \{(r_1(q, t), \dots, r_N(q, t))^T \mid q \in Q\}.$$

Wir nehmen weiterhin an, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial q_i}(q, t) \in \mathbb{R}^{3N}$$

für $i = 1, \dots, l$ linear unabhängig sind. Die Größen q_1, \dots, q_l heißen *verallgemeinerte Koordinaten*.

Beispiel Oszillator: Offensichtlich können wir hier einfach $q = y$ wählen und erhalten

$$r(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $q = q_1 \in \mathbb{R}$ (die Tatsache, dass die Masse den Boden und die Decke nicht durchdringen kann, modellieren wir hier nicht).

Beispiel Pendel: Für das Pendel gilt

$$r(q) = \begin{pmatrix} \rho \sin q \\ -\rho \cos q \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $q = q_1 \in Q = (-\varepsilon, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$. Beachte, dass q hier gerade den Winkel des Pendels beschreibt, vgl. Abbildung 3.2.

Wir können das System nun vollständig mittels $q(t)$ beschreiben. Mittels der Kettenregel kann man die Geschwindigkeit über $q(t)$ ausdrücken. Es gilt

$$v_i(t) = \frac{d}{dt} r_i(q(t), t) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_j}(q(t), t) \dot{q}_j(t) + \frac{\partial r_i}{\partial t}(q(t), t), \quad i = 1, \dots, N.$$

Diese Gleichung kann wegen der linearen Unabhängigkeit der partiellen Ableitungen nach \dot{q}_j aufgelöst werden, was i.A. aber nicht explizit durchgeführt werden muss. Die Größen $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l$ heißen *verallgemeinerte Geschwindigkeiten*.

Beispiel Oszillator: Für den Oszillator gilt

$$v(t) = \dot{q}(t),$$

Beispiel Pendel: Für das Pendel gilt

$$v(t) = \begin{pmatrix} \rho \cos q(t) \\ \rho \sin q(t) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}(t),$$

Ebenso kann die kinetische Energie mittels q und \dot{q} als

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \|v_i\|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left\| \sum_{j=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial q_j}(q(t), t) \dot{q}_j(t) + \frac{\partial r_i}{\partial t}(q(t), t) \right\|^2 =: \mathcal{T}(q, \dot{q}, t)$$

geschrieben werden.

Beispiel Oszillator: Für den Oszillator gilt

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \dot{q}(t)^2.$$

Beispiel Pendel: Für das Pendel gilt

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \rho^2 \dot{q}(t)^2.$$

Für Kräfte $f^i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$, die jeweils auf den i -ten Massepunkt wirken, definiert man die *verallgemeinerten Kräfte*

$$F_j = \sum_{i=1}^N \left\langle f^i, \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right\rangle, \quad j = 1, \dots, l.$$

Wir nennen das mechanische System *konservativ*, falls eine reelle Funktion $W(r_1, \dots, r_N, t)$ existiert, so dass

$$f^i = -\frac{\partial W}{\partial r_i} =: -\nabla_i W$$

gilt. Für die verallgemeinerten Kräfte berechnet man dann

$$F_j = -\frac{\partial W(q, t)}{\partial q_j}$$

mit $W(q, t) = W(r(q), t)$. In Vektorform schreiben wir $F = -\nabla_q W(q, t)$. Die Funktion W kann physikalisch als die potentielle Energie des Systems interpretiert werden, weswegen man üblicherweise durch Addition einer geeigneten Konstanten die Bedingung $\min_q W(q, t) = 0$ sicher stellt. Beachte, dass die Addition einer Konstanten an $\nabla_q W$ nichts ändert.

Beispiel Oszillator: Auf die Masse wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft und die Federkraft. Die Schwerkraft ist von der Form $f^1 = (0, -mg, 0)^T$, die sich als $f^1 = -\nabla W_1$ mit $W_1(r) = mgy$ schreiben lässt.

Zudem wirkt die Federkraft, für die wir hier ein lineares Modell verwenden. Dabei wird zur Beschreibung das *Hooke'sche Gesetz* verwendet. Es sei y_F die Ausdehnung der Feder, wobei $y_F = 0$ der komplett entspannten Feder entspricht, in der die Feder gerade keine Kraft ausübt. Das Hooke'sche Gesetz besagt dann gerade, dass die Kraft gegeben ist durch

$$F(t) = ky_F(t), \tag{3.1}$$

wobei $k > 0$ die *Federkonstante* ist. Dieses Modell beschreibt eine reale Feder bei kleinen Auslenkungen i.A. hinreichend gut. Realistischere Ansätze verwenden einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen y und F , worauf wir hier aber nicht näher eingehen wollen. Offensichtlich gilt für die Auslenkung der Feder $y_F(t) = y_0 - y(t)$, für eine Konstante y_0 , wobei y_0 derjenigen Position der Masse entspricht, in dem die Feder (ohne Einwirkung der Schwerkraft) komplett entspannt ist. Wir erhalten so als Federkraft $f^2(t) = k(y_0 - y(t))$.

Auch die Federkraft lässt sich durch ein Potential darstellen. Es gilt $W_2(r) = \frac{1}{2}ky^2 - ky_0y$. Um das Potential als Funktion von q in eine einfache Form zu bringen, müssen wir das Koordinatensystem am Ende der Rechnung um den Wert \hat{y} verschieben. Dies bedeutet, dass wir die verallgemeinerten Koordinaten als $q = y + \hat{y}$ wählen müssen, um die Verschiebung zu berücksichtigen. Damit folgt $W_1(q, t) = mg(q + \hat{y})$ und $W_2(q, t) = \frac{1}{2}k(q + \hat{y})^2 - ky_0(q + \hat{y})$. Zusammen erhalten wir also

$$W(q, t) = W_1(q) + W_2(q) = (mg - ky_0)(q + \hat{y}) + \frac{1}{2}k(q + \hat{y})^2.$$

Wählen wir nun $\hat{y} = y_0 - mg/k$, so sieht man mit Einsetzen und Ausmultiplizieren, dass sich W vereinfacht zu

$$W(q, t) = \frac{1}{2}kq^2 + R,$$

wobei R Terme bezeichnet, die weder von q noch von t abhängen. Um das Minimum dieser Funktion auf Null zu setzen, verschieben wir den Wert von W um $-R$ und erhalten so

$$W(q, t) = \frac{1}{2}kq^2.$$

Beispiel Pendel: Beim Pendel ohne Reibung wirkt auf den Massenpunkt die Schwerkraft $f = (0, -mg, 0)^T$, die sich wieder als $f = -\nabla W$ mit $W(r) = mgy$ schreiben lässt. Mit der oben eingeführten Darstellung $r(q) = (\rho \sin q, -\rho \cos q, 0)^T$ gilt $W(q, t) = -mg\rho \cos q$. Um $\min_q W(q, t) = 0$ zu gewährleisten, addieren wir $mg\rho$, d.h. wir setzen $W(q, t) = -mg\rho \cos q + mg\rho$.

Definition 3.1 Die Funktion

$$L(q, \dot{q}, t) = \mathcal{T}(q, \dot{q}, t) - W(q, t)$$

heißt *Lagrange-Funktion* des konservativen mechanischen Systems. □

Die Variablen q und \dot{q} werden hier als (formal) unabhängige Variablen aufgefasst.

Aus der Lagrange-Funktion kann man nun die Bewegungsgleichungen des Systems herleiten: Es gelten die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.2)$$

Die Herleitung dieser Gleichungen ergibt sich aus der physikalischen Bedingung, dass das *Wirkungsfunktional*

$$I(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

entlang von Lösungen q extremal sein muss bzgl. aller differenzierbarer Funktionen, die die Punkte $(t_0, q(t_0))$ und $(t_1, q(t_1))$ verbinden. Dies *Prinzip der stationären Wirkung* ist ein

von Hamilton (nach Vorarbeiten von Euler und Lagrange) erkanntes physikalisches Gesetz, das sich z.B. an Hand einer fallenden Kugel plausibel machen lässt: Bei einer fallenden Kugel (im Vakuum) nimmt die kinetische Energie \mathcal{T} beständig zu und das Potential W des Schwerfelds beständig ab. Wäre $I(q)$ nicht extremal, so würde z.B. $\int \mathcal{T}$ langsamer zunehmen als auf einer anderen Bahn, d.h. die Kugel würde zunächst langsamer beschleunigen, als sie es könnte. Dies ist aber in physikalischen Experimenten nicht zu beobachten. Auch der entgegengesetzte Fall, dass die Kugel zunächst schneller beschleunigt, ist nicht möglich, denn um zum Zeitpunkt t_1 am gleichen Punkt $q(t_1)$ anzukommen, müsste sie später langsamer beschleunigen, was wiederum unphysikalisch ist. Das Prinzip formalisiert also eine gewisse Gleichmäßigkeit bei der Zu- und Abnahme der Energie.

Setzt man $g(\alpha) = I(q + \alpha z)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine beliebige differenzierbare Funktion z mit $z(t_0) = z(t_1) = 0$, so muss $g'(0) = 0$ gelten. Mit etwas Rechnung sieht man, dass

$$g'(0) = \sum_{j=1}^l \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) z(t) dt$$

ist. Nimmt man nun an, dass der Faktor vor $z(t)$ im Integranden für ein $j \in \{1, \dots, l\}$ und ein $t \in (t_0, t_1)$ nicht Null ist, z.B. positiv. Wegen der Stetigkeit ist der Integrand dann aber auf einem ganzen Intervall $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset (t_0, t_1)$ positiv. Wählen wir nun z so, dass z_k für $k \neq j$ gleich Null ist und z_j auf $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ positiv ist und sonst überall 0, so ist der gesamte Ausdruck positiv, was $g'(0) = 0$ widerspricht. Die Gleichung $g'(0) = 0$ kann also nur gelten, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind.

Beispiel Oszillator: Für den Oszillator ergibt sich die Lagrange-Funktion zu

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2.$$

Dafür gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) = m \dot{q}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t) = -kq.$$

Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$0 = \frac{d}{dt}(m\dot{q}(t)) + kq(t) = m\ddot{q}(t) + kq(t).$$

Offensichtlich ist der Nullpunkt ein Gleichgewicht dieser Gleichung. Das bedeutet, dass Schwerkraft und Federkraft im Nullpunkt gerade im Gleichgewicht sind. Erinnern wir uns, dass wir den Punkt y_0 , in dem die Feder entspannt ist, zur einfacheren Rechnung als mg/k gewählt haben, so beträgt die Federausdehnung im Gleichgewicht gerade mg/k .

Beispiel Pendel: Für das Pendel erhalten wir aus den obigen Überlegungen

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \rho^2 \dot{q}^2 + mg\rho \cos q - mg\rho,$$

also

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \rho^2 2\dot{q} = m\rho^2 \dot{q}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t) = -mg\rho \sin q.$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{q}(t)) + mg\rho \sin q(t) \\ &= m\rho^2\ddot{q}(t) + mg\rho \sin q(t). \end{aligned}$$

Da $\rho > 0$ und $m > 0$ ist, vereinfacht sich diese zu

$$0 = \rho\ddot{q}(t) + g \sin q(t). \quad (3.3)$$

Abbildung 3.3 zeigt einige Lösungen dieser Gleichung.

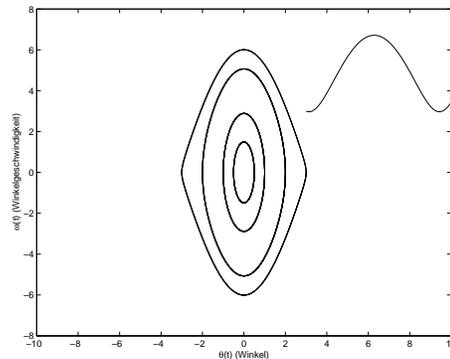


Abbildung 3.3: Lösungen des Pendelmodells (3.3) mit $\rho = 1$

Die periodischen Lösungen gehören hierbei zu Anfangswerten, für die das Pendel hin- und her schwingt. Da keine Reibung modelliert wurde, wird das Pendel nicht gebremst und die Pendel schwingt für alle Zeiten mit der gleichen Bewegung, daher die Periodizität. Die Lösung, die rechts aus dem Bild hinausläuft wurde mit größerer Anfangsgeschwindigkeit gestartet. Hier überschlägt sich das Pendel, und zwar — da keine Reibung vorhanden ist — nicht nur einmal sondern immer wieder. Beachte, dass die Winkel θ und $\theta + k2\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ die gleiche Pendelposition bedeuten, aber in in unserem Modell unterschieden werden. Die Gleichung besitzt übrigens genau die Gleichgewichte $(\theta_k^*, \omega_k^*) = (k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für gerades k ist dies gerade das herunterhängende Pendel, für ungerades k ist dies das aufrecht stehende Pendel. Die aufrechten Gleichgewichte sind exponentiell instabil (aber nicht antistabil), die herabhängenden sind weder exponentiell stabil noch instabil, denn die Realteile der Eigenwerte der Linearisierung sind gleich 0.

3.2 Dissipative Systeme

Wir haben die Euler-Lagrange-Gleichungen unter der Annahme hergeleitet, dass das mechanische System konservativ ist. Tatsächlich bedeutet dies, dass die wirkenden Kräfte nur von den Positionen r_i abhängen; weder externe noch geschwindigkeitsabhängige Kräfte (wie die Reibung) können hiermit modelliert werden.

Externe Kräfte können — wenn sie in verallgemeinerter Form F_j^e also mittels Ihrer Wirkung auf die q ausgedrückt sind — einfach durch Ersetzen der “0” durch F_j^e auf der rechten Seite von (3.2) eingeführt werden. Die Umrechnung von physikalischen externen Kräften f_e^i auf verallgemeinerte externe Kräfte F_j^e erfolgt dabei analog zu den konservativen Kräften mittels

$$F_j^e(q, t) = \sum_{i=1}^N \left\langle f_e^i(r(q), t), \frac{\partial r_i}{\partial q_j}(q) \right\rangle, \quad j = 1, \dots, l.$$

Bei der Reibung beschränken wir uns auf den einfachen Fall *viskoser Reibung*, bei der die Reibungskraft linear proportional zur Geschwindigkeit ist. Wir bezeichnen mit $f^i \in \mathbb{R}^3$ nun die Reibungskräfte, die durch $f^i = -C^i v_i$ mit einer Diagonalmatrix $C^i = \text{diag}(c_x^i, c_y^i, c_z^i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und den Geschwindigkeitsvektoren $v_i = (v_x^i, v_y^i, v_z^i)^T$ allgemein beschrieben werden können.

Wir wollen die Reibungskräfte analog zu den konservativen Kräften als Ableitung einer reellwertigen Funktion darstellen. Dazu definiert man die sogenannte *Rayleigh'sche Dissipationsfunktion*

$$\mathcal{D}(v_1, \dots, v_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (c_x^i v_x^{i2} + c_y^i v_y^{i2} + c_z^i v_z^{i2})$$

und definiert die Reibungskräfte f^i als

$$f^i = -\nabla_i \mathcal{D},$$

wobei $\nabla_i \mathcal{D}(v) \in \mathbb{R}^3$ den Gradienten von \mathcal{D} nach v^i bezeichnet.

Die Rayleigh-Funktion lässt sich als infinitesimale Arbeit des i -ten Partikels gegen die Reibungskraft interpretieren. Die von den Reibungskräften absorbierte Leistung ist gerade $2\mathcal{D}$ und wird als *Dissipationsrate* bezeichnet. Analog zu den verallgemeinerten Kräften lassen sich die *verallgemeinerten Reibungskräfte* als

$$F_j = -\frac{\partial \mathcal{D}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j(t)}$$

mit $\mathcal{D}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{D}(v(q, \dot{q}, t))$ berechnen. In Kurzform schreiben wir

$$F = -\nabla_{\dot{q}} \mathcal{D}(q, \dot{q}, t).$$

Die unter der Berücksichtigung der externen und Reibungskräfte erhaltenen *verallgemeinerten Lagrange-Gleichungen* lauten damit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t) = F_j^e(t), \quad j = 1, \dots, l \quad (3.4)$$

Beispiel Oszillator: Wir haben in Abbildung 3.1 bereits ein Reibungselement eingezeichnet, das wir jetzt auch in das Modell aufnehmen wollen. Wir setzen dazu $\mathcal{D}(v) = \frac{1}{2}(cv_y^2)$, also

$$\mathcal{D}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}(c\dot{q}^2).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) = c\dot{q}.$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich damit zu

$$0 = m\ddot{q}(t) + kq(t) + c\dot{q}.$$

Beispiel Pendel: Wir wollen unser Pendelmodell um einen Reibungsterm ergänzen und setzen $\mathcal{D}(v) = \frac{1}{2}(cv_x^2 + cv_y^2)$. Damit erhalten wir

$$\mathcal{D}(q, \dot{q}, t) = \frac{c}{2}\rho^2(\cos^2 q + \sin^2 q)\dot{q}^2 = \frac{c}{2}\rho^2\dot{q}^2$$

und folglich

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) = c\rho^2\dot{q}.$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich damit nach Division durch ρ zu

$$0 = m\rho^2\ddot{q}(t) + mg\rho \sin q(t) + c\rho\dot{q}(t). \quad (3.5)$$

Wir erhalten also wieder das bereits bekannte Modell, bei dem die Reibungskonstante c nun allerdings mit der Länge ρ multipliziert ist. Dies liegt daran, dass die Reibung hier an der Punktmasse wirkt, während sie im früheren Modell an der Drehachse wirkt. Abbildung 3.4 zeigt die Lösungen dieser Gleichung mit den gleichen Anfangswerten wie in Abbildung 3.3.

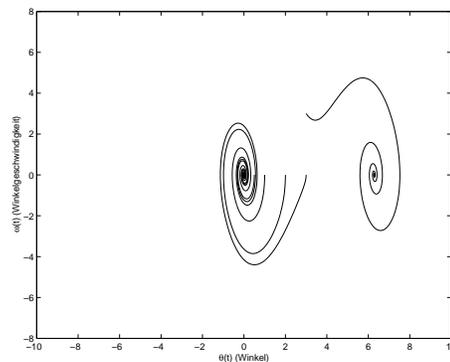


Abbildung 3.4: Lösungen des Pendelmodells (3.5) mit $M = \rho = c = 1$

Hier streben alle Lösungen dem Gleichgewicht $(0, 0)$, bzw. nach einmaligem Überspringen dem Gleichgewicht $(2\pi, 0)$ zu. Tatsächlich kann man zeigen, dass die Gleichgewichte der Form $(2k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ (herabhängendes Pendel) nun lokal exponentiell stabil sind. Die Gleichgewichte der Form $((2k+1)\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ (aufrechtes Pendel) bleiben exponentiell instabil. Beachte, dass sich (3.3) und (3.5) in diesen Simulationen wegen der Wahl der Parameter nur durch den Reibungsterm unterscheiden.

3.3 Die Hamilton'sche Methode

Die Lagrange-Gleichungen führen in natürlicher Weise auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, also eine Gleichung, in der q und \dot{q} auftreten. Der Hamilton-Formalismus, den wir abschließend behandeln wollen, ermöglicht es, für konservative mechanische Systeme direkt ein System erster Ordnung herzuleiten, in dem die dabei verwendete "Hilfsfunktion" H eine wohldefinierte physikalische Interpretation besitzt.

Hierzu definieren wir das *verallgemeinerte Moment* als

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) \in \mathbb{R}^l$$

und nehmen an, dass eine stetig differenzierbare Funktion $\dot{q}(q, p, t)$ existiert, so dass die Gleichung

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

gilt. Die Abbildung

$$(q, p, t) \mapsto (q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

heißt dabei *Legendre-Transformation*.

Definition 3.2 Die reellwertige Funktion

$$H(q, p, t) = p^T \dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

heißt *Hamilton-Funktion* eines konservativen mechanischen Systems. □

Beispiel Oszillator: Die Gleichung

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t) = m\dot{q}$$

ist gerade erfüllt für $\dot{q}(q, p, t) = \frac{p}{m}$. Also lautet die Hamilton-Funktion

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}kq^2.$$

Beispiel Pendel: Für das Pendel gilt

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t) = m\rho^2 \dot{q},$$

also ist

$$\dot{q}(q, p, t) = \frac{p}{m\rho^2}$$

wegen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}(q, p, t), t) = m\rho^2 \dot{q}(q, p, t) = m\rho^2 \frac{p}{m\rho^2} = p$$

die gesuchte Abbildung mit Legendre-Transformation

$$(q, p, t) \mapsto (q, p/(\rho^2 m), t).$$

Die Hamilton-Funktion unseres Pendels lautet demnach

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{m\rho^2} - \frac{m}{2}\rho^2 \left(\frac{p}{m\rho^2} \right)^2 - mg\rho \cos q + mg\rho = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m\rho^2} - mg\rho \cos q + mg\rho.$$

Sei nun $q(t)$ eine Lösung von (3.2) mit

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t).$$

Dann folgt aus der Definition von $\dot{q}(q, p, t)$ die Identität

$$\dot{q}(t)(q(t), p(t), t) = \dot{q}(t).$$

Für H gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_j}(q(t), p(t), t) &= \dot{q}_j(t) + p^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_j}(q(t), p(t), t) - \sum_{i=1}^l \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t)}_{=p_i(t)} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}(q(t), p(t), t) \\ &= \dot{q}_j(t) \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, l$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_j}(q(t), p(t), t) &= p^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_j}(q(t), p(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), p(t), t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^l \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t), t)}_{=p_i(t)} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}(q(t), p(t), t) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t), t) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \\ &= -\dot{p}_j(t) \end{aligned}$$

Also erfüllt die Funktion $(q(t), p(t))$ die DGL erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t) \end{aligned}$$

das sogenannte *Hamilton-System*.

Umgekehrt kann man nachweisen, dass jede Lösung des Hamilton-Systems eine Lösung der Lagrange-Gleichungen induziert. Die zwei Systeme sind also äquivalent.

Die Hamilton-Funktion ist deswegen eine schöne Form der Gleichung, da sie (in vielen Fällen) eine explizite physikalische Interpretation besitzt: $H(q, p, t)$ ist gerade die Gesamtenergie des Systems, die — aufgrund der Konservativität des Systems — entlang von Lösungen konstant ist.

Beispiel Oszillator: Wir erhalten

$$\frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) = \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) = kq.$$

Damit ergibt sich das Hamilton-System zu

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) &= -kq(t). \end{aligned}$$

Es ist nicht üblich, die Reibung in die Berechnung der Hamilton-Funktion einzubeziehen. Diese kann aber leicht wieder nachträglich hinzugefügt werden. Die zweite Gleichung ändert sich dann zu

$$\dot{p}(t) = -kq(t) - c\dot{q}(t).$$

Beispiel Pendel: Für das Pendel gilt

$$\frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) = \frac{p}{m\rho^2}$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) = mg\rho \sin q.$$

Wir erhalten also das Hamilton-System

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{p(t)}{m\rho^2} \\ \dot{p}(t) &= -mg\rho \sin q(t) \end{aligned}$$

Der Vorteil der in den Beispielen erhaltenen Skalierung gegenüber der direkten Herleitung eines Modells erster Ordnung liegt darin, dass die Hamilton-Funktion hier tatsächlich die Gesamtenergie des Systems beschreibt. Im Pendelbeispiel ist dies gerade

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m\rho^2} - mg\rho \cos q + mg\rho,$$

also die Summe der kinetischen Energie $\frac{1}{2} \frac{p^2}{m\rho^2}$ und der potentiellen Energie $-mg\rho \cos q + mg\rho$.

3.4 Das Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt

Wir wollen die Herleitung der Pendelgleichung noch einmal wiederholen, jetzt aber mit beweglichem Aufhängepunkt $a(t)$. Dabei nehmen wir an, dass a_1 und a_2 zweimal stetig differenzierbar sind und $a_3 \equiv 0$ ist.

Für die Funktionen c_1 und c_2 ergibt sich so

$$c_1(r, t) = \|r - a(t)\|^2 - \rho^2 \quad \text{und} \quad c_2(r) = z.$$

Die Parametrisierung der verallgemeinerten Koordinaten lautet dann

$$r(q, t) = \begin{pmatrix} \rho \sin q + a_1(t) \\ -\rho \cos q + a_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = \begin{pmatrix} \rho \cos q(t) \\ \rho \sin q(t) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q}(t) + \begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die kinetische Energie erhalten wir dann

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \rho^2 \dot{q}^2 + m\rho \left(\cos(q) \dot{a}_1(t) + \sin(q) \dot{a}_2(t) \right) \dot{q} + \frac{m}{2} \|\dot{a}(t)\|^2.$$

An der Schwerkraft ändert sich nichts, weswegen weiterhin $W(q, t) = -mg\rho \cos q$ gilt. Auf die Verschiebung des Nullpunkts durch einen additiven Term verzichten wir jetzt, da das Minimum jetzt ja vom beweglichen Punkt $a(t)$ abhängt. An der nachfolgenden Rechnung würde dieser Term sowieso nichts ändern, weil er beim Ableiten wieder wegfällt.

Für die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t) = \mathcal{T}(q, \dot{q}, t) - W(q, t)$ gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) &= \frac{m}{2} \rho^2 2\dot{q} + m\rho \left(\cos(q) \dot{a}_1(t) + \sin(q) \dot{a}_2(t) \right) \\ &= m\rho \left(\rho \dot{q} + \cos(q) \dot{a}_1(t) + \sin(q) \dot{a}_2(t) \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right] &= \\ m\rho \left(\rho \ddot{q}(t) - \sin(q(t)) \dot{q}(t) \dot{a}_1(t) + \cos(q(t)) \ddot{a}_1(t) + \cos(q(t)) \dot{q}(t) \dot{a}_2(t) + \sin(q(t)) \ddot{a}_2(t) \right), \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t) = m\rho \left(-\sin(q) \dot{a}_1(t) + \cos(q) \dot{a}_2(t) \right) \dot{q} - mg\rho \sin q.$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right] - \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) \\ &= m\rho \left(\rho \ddot{q}(t) + \cos(q(t)) \ddot{a}_1(t) + \sin(q(t)) \ddot{a}_2(t) + g \sin q(t) \right) \end{aligned}$$

Fügen wir wie oben Reibung hinzu (an der sich durch die Hinzunahme von $a(t)$ nichts ändert), so erweitert sich die Gleichung zu

$$0 = m\rho \left(\rho \ddot{q}(t) + \cos(q(t)) \ddot{a}_1(t) + \sin(q(t)) \ddot{a}_2(t) + g \sin q(t) \right) + c\rho \dot{q}(t).$$

Umrechnen in ein System erster Ordnung mittels der Hamilton-Funktion liefert

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \frac{p(t)}{m\rho^2} \\ \dot{p}(t) &= -m\rho \left(\cos(q(t))\ddot{a}_1(t) + \sin(q(t))\ddot{a}_2(t) + g \sin q(t) \right) - c\rho\dot{q}(t).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Das Bewegen des Aufhängepunktes kann die Pendelbewegung stark verändert. Z.B. ist es durch eine geeignete horizontale Bewegung des Pendels möglich, dass dieses nicht wie üblich in der unten hängenden Position verharrt, sondern sich statt dessen in die aufrechte Position bewegt und dort balanciert. Experimente hierzu werden in der Vorlesung gezeigt.

Durch eine periodische vertikale Bewegung, die durch die Wahl $a_1 \equiv 0$, $a_2(t) = A \cos \Omega t$ gegeben ist, woraus

$$\ddot{a}_2(t) = -A\Omega^2 \cos \Omega t$$

folgt, kann sogar eine chaotische Bewegung des Pendels erzeugt werden. Für die Parameter

$$\Omega = 1.57, \quad \frac{c}{m\rho} = 0.2, \quad \frac{g}{\rho} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{A\Omega^2}{\rho} = 1.42$$

erhält man das in Abbildung 3.5 dargestellte Verhalten.

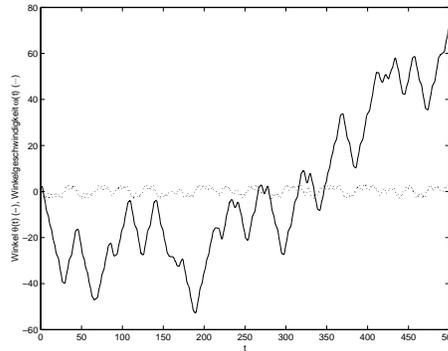


Abbildung 3.5: Lösungen des Pendelmodells (3.6) in Abhängigkeit von t

Das Ganze sieht recht “chaotisch” aus und tatsächlich ist dies ein Beispiel für eine Differentialgleichung mit sogenanntem *chaotischen* Verhalten. Die Lösungen der Gleichung zeigen einen quasi zufälligen Verlauf: es ist nicht vorhersagbar, wann sich das Pendel überschlägt, die Richtung ändert etc. Trotzdem lassen sich in diesem chaotischen Verhalten Gesetzmäßigkeiten erkennen. Hierzu muss man zunächst die vorhandenen Periodizitäten berücksichtigen: Man kann in der Gleichung alle Winkel θ_1, θ_2 mit $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ identifizieren, da diese Werte die gleichen Positionen darstellen. Mittels $\hat{\theta}(t) = \theta(t) - 2k(t)\pi$ (für das richtige $k(t)$) kann man die θ -Komponente der Lösung in das Intervall $[-\pi, \pi]$ “projizieren”. Zusätzlich kann man die Periodizität der Beschleunigung berücksichtigen: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\cos \Omega t = \cos \Omega(t + kT)$ für $T = 2\pi/\Omega$ und alle $k \in \mathbb{Z}$. Aufgrund dieser Beobachtung ist es sinnvoll, die Lösungen jeweils nach einer Periode der Beschleunigung darzustellen. Es zeigt sich, dass für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ eine (recht komplizierte)

Menge A_{t_0} existiert, so dass jede “periodisch ausgewertete” Lösung, also jede Folge der Form

$$x(t_0 + kT; t_0, x_0) \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots$$

gegen diese Menge konvergiert. Diese Menge A_{t_0} heißt *Attraktor*. Durch Darstellung der Punkte $x(t_0 + kT; t_0, x_0)$ für $k = k_0, \dots, k_1$ mit hinreichend großen $k_1 \gg k_0 \gg 0$ kann man einen Eindruck von dieser Menge gewinnen⁴. Abbildung 3.6 zeigt die Punkte $x(t_0 + kT; t_0, x_0)$ für $x_0 = (1, 1)^T$, $t_0 = T/2$ und $k = 101, \dots, 10000$.

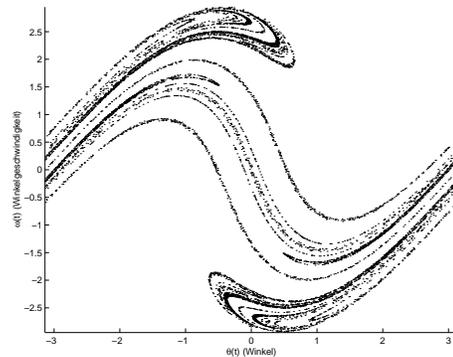


Abbildung 3.6: Approximation des Attraktors des Pendelmodells (3.6)

Diese numerischen Ergebnisse lassen sich durch reale Experimente bestätigen. Im Buch *R.W. Leven, B. Koch und B. Pompe, “Chaos in dissipativen Systemen”, Akademie Verlag 1989 (1. Auflage) und 1994 (2. Auflage)* finden sich in Kapitel 1 der Versuchsaufbau und experimentelle Resultate.

⁴Es gibt auch spezielle Algorithmen zur genaueren Berechnung von Attraktoren, diese werden in der Vorlesung “Numerik dynamischer Systeme” im kommenden Wintersemester behandelt.

Kapitel 4

Stochastische Differentialgleichungen

Stochastische Differentialgleichungen finden vor allem in zwei Bereichen Anwendung: in der Physik und in der Finanzmathematik. Die wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen ist, dass die Lösungen zufällige Funktionen, also stochastische Prozesse sind. Daher werden sie in der statistischen Physik zur Modellierung kleiner Teilchen verwendet, deren genaue Bewegungen man nicht kennt und in der Finanzmathematik zur Modellierung von Wertpapierkursen, deren zukünftige Entwicklung man ebenfalls nicht genau kennt.

Wir werden hier einige grundlegende Prinzipien dieser Gleichungen betrachten. Im nachfolgenden Kapitel werden wir diese dann verwenden, um die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung herzuleiten, die die zufällige Bewegung sehr vieler kleiner Teilchen “im Mittel” beschreibt.

4.1 Stochastische Differentialgleichungen

Um eine stochastische Differentialgleichung zu formulieren, müssen wir zunächst erklären, auf welche Weise der “Zufall” in unsere Differentialgleichung eingeht.

Vereinfacht kann man eine stochastische Differentialgleichung zunächst als eine Differentialgleichung der Form (1.1) mit der speziellen Wahl

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) := a(t, x(t)) + b(t, x(t))g(t) \quad (4.1)$$

schreiben¹. Hierbei sind $a, b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gewöhnliche Funktionen, der Zufall kommt durch die Funktion g ins Spiel, die nämlich keine “feste” Funktion ist, sondern eine Funktion, die abhängig vom Zufall verschiedene Gestalt annehmen kann. Für jedes mögliche g erhalten wir für einen festen Anfangswert weiterhin eine eindeutige Lösung. Da diese aber nun von g abhängt und g zufällig ist, ist in diesem Sinne auch die Lösungstrajektorie zufällig.

Natürlich ist g nicht “irgendwie” vom Zufall abhängig, sondern genügt gewissen statistischen Regeln. Um diese zu definieren, werden wir zuerst einige Grundbegriffe einführen.

¹Dies ist eine vorläufige Schreibweise, siehe (4.13) für die mathematisch gebräuchliche Formulierung.

4.1.1 Einige stochastische Grundbegriffe

Wir beginnen mit dem Konzept des *Wahrscheinlichkeitsraumes*. Dieser besteht aus einer Menge Ω von *Elementarereignissen*, einer Menge von *Ereignissen* \mathcal{A} , deren Elemente $A \in \mathcal{A}$ Teilmengen $A \subseteq \Omega$ sind und einem *Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, das jedem Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Man schreibt einen Wahrscheinlichkeitsraum als Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (\mathbb{P} steht für “Probability”=Wahrscheinlichkeit). Am Einfachsten lässt sich dieses abstrakte Konzept durch ein einfaches Beispiel erläutern:

Wenn der Raum z.B. das mathematische Modell eines Würfels ist, so kann das Ergebnis eines jeden Wurfs einen der Werte $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ annehmen. Bei einem idealen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Wert gleich groß. Da man in der Mathematik die Konvention macht, dass sich alle Einzelwahrscheinlichkeiten zu 1 aufsummieren (formal: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$) und gerade 6 Werte existieren deren Wahrscheinlichkeiten gleich groß sind, müssen diese also gleich $1/6$ sein. Man schreibt $\mathbb{P}(\omega) = 1/6$ für jedes $\omega \in \Omega$. Durch die Funktion $\mathbb{P}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung \mathbb{P} vollständig beschrieben. Hieraus kann man z.B. leicht die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, dass man eine gerade Zahl würfelt, da sich diese Wahrscheinlichkeit als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ergibt; mit $A = \{2, 4, 6\}$ ist nämlich

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Im endlichen Fall gilt die allgemein die einfache Formel

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega), \quad (4.2)$$

d.h. aus der Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse kann man die Wahrscheinlichkeit beliebiger Ereignisse $A \in \mathcal{A}$ durch Aufsummieren berechnen. Welche Ereignisse man in die Ereignismenge \mathcal{A} aufnimmt, hängt davon ab, welche Ereignisse man modellieren will. In jedem Fall muss Ω und \emptyset in \mathcal{A} enthalten sein und die Menge \mathcal{A} muss abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Durchschnittbildung sein. Diese Details sind für eine rigorose mathematische Betrachtung zwar wichtig, für uns hier aber eher nebensächlich, da wir sie nicht direkt verwenden werden.

Stattdessen benutzen wir ein weiteres Konzept, nämlich das der *Zufallsvariablen*. Eine Zufallsvariable X ist keine Variable im klassischen Sinne, sondern eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; jedem Element aus Ω wird durch X eine reelle Zahl zugeordnet. Wenn wie im obigen Würfelbeispiel $\Omega \subset \mathbb{R}$ gilt, kann man X im einfachsten Fall als Identität definieren. Der große Vorteil bei der Verwendung von Zufallsvariablen liegt darin, dass man auf den reellen Zahlen alle Techniken der Analysis zur Verfügung hat, was das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten deutlich vereinfacht. Wenn man zufällig einen Wert ω aus Ω “zieht”, so nennt man den Wert $X(\omega)$ eine *Realisierung* von X . Anders gesagt, ist eine Realisierung $X(\omega)$ von X gerade das Ergebnis eines mittels X ausgewerteten Zufallsexperimentes.

Um zu beschreiben, wie sich die zufälligen Realisierungen von X statistisch verhalten, benötigt man das Konzept der *Wahrscheinlichkeitsverteilung* \mathbb{P}_X von X . Für eine Menge $B \subset \mathbb{R}$ gibt $\mathbb{P}_X(B)$ die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine Realisierung $X(\omega)$ in B liegt.

Man kann \mathbb{P}_X ausgehend vom Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf Ω definieren, indem man einfach

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$$

setzt. Diese Definition setzt natürlich die Kenntnis von \mathbb{P} voraus. (Wir nehmen hier zudem implizit an, dass $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ in \mathcal{A} liegt, so dass wir \mathbb{P} darauf anwenden können.) Wir werden im Folgenden aber meist andersherum vorgehen, indem wir uns nämlich für X ein \mathbb{P}_X vorgeben, ohne dass wir das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf Ω näher betrachten oder auch nur kennen. Falls X nur endlich viele Werte annimmt, also $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$ ist (man sagt, X ist eine *diskrete Zufallsvariable*), so reicht es dazu wiederum aus, nur $\mathbb{P}_X(x_i)$ festzulegen und $\mathbb{P}_X(x) = 0$ für $x \notin X(\Omega)$ zu setzen. Analog zu (4.2) gilt dann

$$\mathbb{P}_X(B) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}_X(x), \quad (4.3)$$

Falls Ω eine unendliche Menge ist und X unendlich viele verschiedene Werte annimmt, so ist die Sache etwas komplizierter. Wir können uns für unsere Zwecke aber auf den Spezialfall einschränken, in dem $X(\Omega) = \mathbb{R}$ ist, also alle möglichen Werte in \mathbb{R} angenommen werden (man sagt, X ist eine *kontinuierliche Zufallsvariable*) und wir die Verteilung von X durch eine stetige Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die sogenannte *Dichtefunktion* beschreiben können. Diese Funktion p spielt in gewissem Sinne die Rolle der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}_X(x_i)$ für Elementarereignisse im endlichen Fall. Zwar gibt $p(x)$ hier nicht die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $X(\omega) = x$ an, man kann aber analog zu (4.3) eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_X(B)$ von Ereignissen $B \subseteq \mathbb{R}$ angeben. Diese ist gegeben durch

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x) p(x) dx, \quad (4.4)$$

wobei χ_B die sogenannte *charakteristische Funktion* der Menge B ist, die durch

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in B \\ 0, & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

gegeben ist. Die spezielle Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(a) = \mathbb{P}_X((-\infty, a]) = \int_{-\infty}^a p(x) dx$$

heißt (zu p gehörige) *Verteilungsfunktion*. An diesem Punkt stellen sich eine ganze Reihe von mathematischen Fragen: Wie ist das Integral (4.4) definiert (Antwort: als Lebesgue-Integral), für welche Mengen $B \subseteq \Omega$ existiert (4.4) (Antwort: gerade die Mengen, für die χ_B eine Lebesgue-messbare Funktion ist), etc. Diese Fragen werden wir hier nicht im Detail betrachten können; wir verweisen dazu auf die Einführung in die Stochastik.

Ereignisse $B \subset \mathbb{R}$, für die $\mathbb{P}_X(B) = 1$ gilt, nennt man *fast sicher*. Das Adjektiv “fast” ergibt sich hierbei aus einer Eigenschaft kontinuierlicher Zufallsvariablen, die am Anfang paradox erscheint: $\mathbb{P}_X(B) = 1$ garantiert nicht, dass $X(\omega)$ für *jedes* $\omega \in \Omega$ in B liegt. Die tiefere mathematische Begründung liegt in der Lebesgue-Integrationstheorie; intuitiv kann man

dies aber auch schon auf den natürlichen Zahlen erläutern: Nehmen wir an, dass der Wahrscheinlichkeitsraum einen “Würfel” mit N verschiedenen Seiten $\Omega = \{1, \dots, N\}$ beschreibt und X die Identität ist. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X \in B = \{2, \dots, N\}$ beträgt offenbar $\mathbb{P}_X(B) = (N - 1)/N = 1 - 1/N$. Je größer die Seitenanzahl N wird, desto näher ist $\mathbb{P}_X(B)$ an 1. Für einen hypothetischen Würfel mit $N = \infty$ Seiten gilt demnach $\mathbb{P}_X(B) = 1$, trotzdem ist es nicht unmöglich, dass eine 1 geworfen wird, also $X(\omega) = 1$ ist. Dieses Ereignis ist nur extrem unwahrscheinlich in dem Sinne, dass es unendlich viele andere mögliche Ergebnisse gibt. Beim Rechnen mit kontinuierlichen Zufallsvariablen muss man zwischen “fast sicher” und “sicher” nicht unterscheiden, da man die sehr unwahrscheinlichen anderen Ereignisse einfach vernachlässigen kann, was sich wiederum mathematisch rigoros aus der Lebesgue–Integrationstheorie ergibt.

Wir werden uns im Folgenden nur mit einer ganz speziellen kontinuierlichen Zufallsvariablen X beschäftigen, nämlich der sogenannten *Gauß-verteilten Zufallsvariablen*. Für diese Zufallsvariable hängt die Dichte p von zwei (konstanten) Parametern $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$ ab und ist gegeben durch

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.5)$$

Für Gauß-verteilte (auch *normalverteilte* oder kurz *Gauß'sche*) Zufallsvariablen schreibt man oft $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Eine Zufallsvariable $X \sim N(0, 1)$ heißt *standard-normalverteilt*. Abbildung 4.1 zeigt die Dichtefunktion p für die Standard-Normalverteilung.

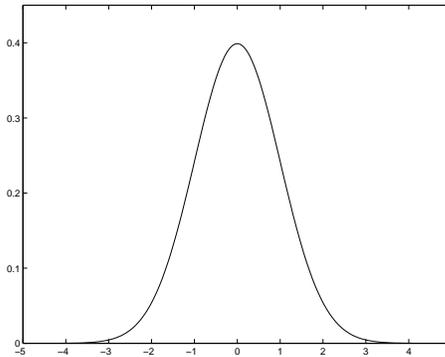
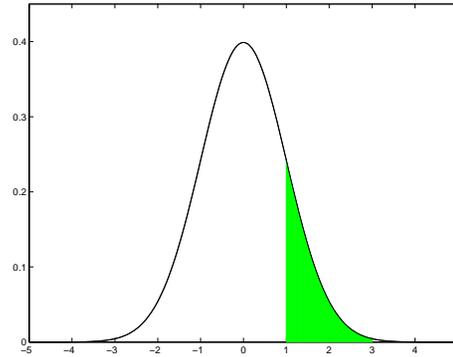


Abbildung 4.1: Dichtefunktion der Gauß'schen Zufallsvariablen für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

Grafisch kann man sich (4.4) so vorstellen: Falls $B = [a, b]$ ein Intervall ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung $X(\omega)$ von X in B liegt, gerade gleich der Fläche unter dem Graphen von p . In Abbildung 4.2 ist dies für $B = [1, 3]$ dargestellt.

Die Gauß'sche Zufallsvariable kann also Werte in ganz \mathbb{R} annehmen (p ist nirgends gleich 0), allerdings ist die Wahrscheinlichkeit betragsmäßig großer Werte sehr gering, da p für große $|x|$ sehr klein wird.

Ausgehend von der eben betrachteten Verteilung kann man eine Reihe von Kenngrößen für X definieren; zwei davon sind für uns wichtig. Wir beschränken uns hierbei auf kontinuierliche Zufallsvariablen.

Abbildung 4.2: Wahrscheinlichkeit von $B = [1, 3]$ als Fläche unter p

Die erste wichtige Größe ist der *Erwartungswert* von X , der mit $\mathbb{E}(X)$ bezeichnet wird. Anschaulich ist dies nichts anderes als der Mittelwert, den man erhält, wenn man über alle möglichen Realisierungen $X(\omega)$ von X bezüglich ihrer Wahrscheinlichkeit mittelt, für eine Folge $X(\omega_1), X(\omega_2), \dots$ von Realisierungen also

$$\mathbb{E}(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(\omega_i). \quad (4.6)$$

Formal definiert man den Erwartungswert geeigneter über die Dichtefunktion, nämlich als

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x_i \in X(\Omega)} x \mathbb{P}_X(x) \quad (4.7)$$

für diskrete und, analog,

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, \quad (4.8)$$

für kontinuierliche Zufallsvariablen, wobei wir voraussetzen, dass dieses Integral existiert. Für die Gauß-Verteilung errechnet man $\mathbb{E}(X) = \mu$. Es ist im übrigen nicht trivial zu beweisen, dass diese beiden Definitionen von $\mathbb{E}(X)$ übereinstimmen.

Man rechnet leicht nach, dass der Erwartungswert linear in X ist, d.h. für zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 \mathbb{E}(X_1) + \alpha_2 \mathbb{E}(X_2)$. Beachte hierbei, dass Summen, Differenzen und reelle Vielfache von Zufallsvariablen wieder Zufallsvariablen sind.

Die zweite wichtige Größe ist die *Varianz* von X , geschrieben $\text{Var}(X)$. Sie gibt an, wie weit sich die einzelnen Realisierungen im Mittel vom Erwartungswert entfernen können, man sagt auch, wie weit die Werte “streuen”. Sie ist definiert durch

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2).$$

Eine einfache Rechnung ergibt wegen $\mathbb{E}(X) = \mu$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu \mathbb{E}(X) + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2.$$

Für die Gauß-Verteilung errechnet man $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Zuletzt wollen wir noch kurz das Prinzip der *Unabhängigkeit* von Zufallsvariablen betrachten. Zwei auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierte Zufallsvariablen $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *unabhängig*, wenn eine Realisierung $X_1(\omega)$ von X_1 keine Informationen über die Realisierung $X_2(\omega)$ von X_2 (für das gleiche ω) enthält, und umgekehrt. Auf die mathematisch präzise Beschreibung dieser informellen Definition wollen wir verzichten; wir wollen sie aber an einem Beispiel erläutern.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ der Wahrscheinlichkeitsraum, der das (gleichzeitige) Würfeln mit zwei Würfeln beschreibt. Jedes Elementarereignis ist also ein Paar $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ von Würfelwerten, wobei die erste Komponente ω_1 das Ergebnis des ersten Würfels und ω_2 das Ergebnis des zweiten Würfels beschreibt (wir nehmen an, dass die zwei Würfel unterscheidbar sind). Dies führt zu $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\} \subset \mathbb{N}^2$. Als \mathcal{A} wählen wir alle möglichen Teilmengen von Ω . Offenbar ist (für ideale Würfel) $\mathbb{P}(\omega) = 1/36$ für jedes Element $\omega \in \Omega$, da Ω gerade $36 = 6 \times 6$ Elementarereignisse enthält, die alle gleich wahrscheinlich sind. Wir betrachten nun drei Zufallsvariablen, die als Wert das Ergebnis des ersten Würfels, des zweiten Würfels und die Summe der Würfelwerte ausgeben, also $X_1(\omega) = \omega_1$, $X_2(\omega) = \omega_2$ und $X_3(\omega) = \omega_1 + \omega_2$. Jede Realisierung dieser Variablen entspricht nun einem (simultanen) Wurf der zwei Würfel. Offenbar kann man aus dem Ergebnis des ersten Würfels keinerlei Rückschlüsse auf das Ergebnis des zweiten Würfels ziehen: Unabhängig davon, was beim ersten Würfel herauskam, ist beim zweiten Würfel jeder Wert $1, \dots, 6$ weiterhin gleich wahrscheinlich. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind also *unabhängig*. Wenn wir aber X_1 und X_3 betrachten, so ändert sich die Situation: Die Wahrscheinlichkeit, dass $X_3(\omega)$ den Wert 12 annimmt, ist gerade $1/36$ (von den 36 möglichen Würfelkombinationen liefert gerade eine die Summe 12). Wenn wir aber wissen, dass die Realisierung $X_1(\omega) = \omega_1 = 1$ ist, so kann die Summe $X_3(\omega) = \omega_1 + \omega_2 = 1 + \omega_2$ höchstens den Wert 7 annehmen; die Wahrscheinlichkeit für $X_3(\omega) = 12$ ist unter dieser Vorinformation also gleich 0. Diese Wahrscheinlichkeit unter zusätzlicher Vorinformation nennt man *bedingte Wahrscheinlichkeit*. Da sich nun die bedingte Wahrscheinlichkeit der Zufallsvariablen X_3 unter Vorinformation aus X_1 von der unbedingten Wahrscheinlichkeit unterscheidet, ist hier gerade der Fall *nicht unabhängiger* Zufallsvariablen gegeben.

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 gelten eine Reihe von Eigenschaften, z.B. gilt

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2), \quad (4.9)$$

was für beliebige Zufallsvariablen im Allgemeinen nicht gilt.

4.1.2 Der Wiener Prozess

Zur Definition der stochastischen Differentialgleichung benötigen wir nun einen Begriff für zufällige Funktionen. Eine “zufällige Funktion” ist dabei nichts anderes als eine Funktion $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die für jedes feste t gerade eine Zufallsvariable $X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist, wobei für alle t der gleiche Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zu Grunde liegt. Solch eine Funktion nennt man *stochastischen Prozess*. Beachte, dass wir keinerlei Annahmen über den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ voraussetzen; wichtig ist nur, dass alle Zufallsvariablen X auf dem selben Raum definiert sind. Für jedes feste $\omega \in \Omega$ ist die Realisierung $X(\cdot, \omega) :$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine “normale” reelle Funktion. Statt Realisierung spricht man bei stochastischen Prozessen vom *Pfad*.

Der stochastische Prozess, den wir hier näher betrachten wollen und aus dem das obige g später hervorgehen wird, ist der sogenannte *Wiener Prozess*, der üblicherweise mit W bezeichnet wird und für $t \geq 0$ definiert ist. Die Definition des Wiener Prozesses ergibt sich aus der von N. Wiener² eingeführten mathematischen Beschreibung der *Brown’schen Bewegung*, die in der Physik die zufällige Bewegung eines auf einer Wasseroberfläche schwimmenden Teilchens beschreibt. Formal verlangt man die folgenden Bedingungen:

- (i) $W(t)$ ist eine Gauß-verteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(W(t)) = 0$ und $\text{Var}(W(t)) = t$
- (ii) Für $t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die *Inkrement*e $W(t_1) - W(t_0)$ Gauß-verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(W(t_1) - W(t_0)) = 0$ und $\text{Var}(W(t_1) - W(t_0)) = t_1 - t_0$
- (iii) Für $s_1 \geq s_0 \geq t_1 \geq t_0 \geq 0$ sind die Inkrementen $W(t_1) - W(t_0)$ und $W(s_1) - W(s_0)$ unabhängige Zufallsvariablen.

Beachte, dass wir oben die Gauß-Verteilung nur für $\sigma > 0$ definiert haben. Hier erhalten wir für $t = 0$ die Bedingung $\text{Var}(W(0)) = 0$, womit einfach $\mathbb{P}_{W(0)}(\mu) = 1$ gemeint ist. Mit anderen Worten nimmt die Zufallsvariable $W(0)$ also fast sicher ihren Erwartungswert μ (hier $\mu = 0$) an.

Ein Pfad $W(t, \omega)$ von W ist also gerade eine der vielen möglichen zufälligen Funktionen, die (in ihrer Gesamtheit) den obigen Bedingungen genügen. Für diese Pfade kann man beweisen, dass sie fast sicher stetig in t sind (zur Erinnerung: dies bedeutet, dass das Ereignis $A = \{\omega \in \Omega \mid X(t, \omega) \text{ ist stetig in } t\}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) = 1$ besitzt) aber auch fast sicher nirgends differenzierbar. Abbildung 4.3 zeigt drei verschiedene Pfade des Wiener Prozesses.

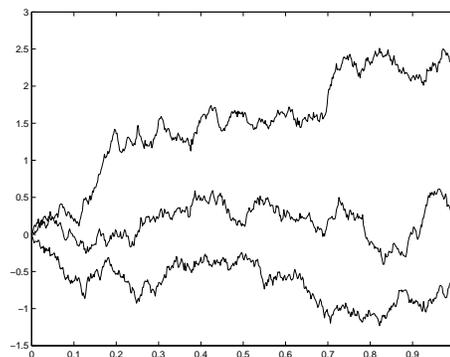


Abbildung 4.3: Verschiedene Pfade des Wiener Prozesses

Die Bedingung (i) besagt gerade, dass die Streuung der Werte der Pfade $W(t, \omega)$ um so größer wird, je größer t wird. Der Mittelwert ist dabei zu jedem Zeitpunkt gleich 0. Die Bedingung (ii) bedeutet, dass der stochastische Prozess $\widetilde{W}(t) = W(t + t_0) - W(t_0)$ wieder

²US-amerikanischer Mathematiker, 1894–1964

ein Wiener Prozess ist. Wenn wir also ein “Endstück” eines Pfades abschneiden und dessen Anfangspunkt in den Nullpunkt verschieben, so erhalten wir wieder einen Pfad des Wiener Prozesses. Diese zwei Eigenschaften kann man anhand der Grafik gut nachvollziehen. Bedingung (iii) schließlich besagt, dass man aus der Kenntnis eines Teilstücks eines Pfades auf einem Teilintervall $[t_0, t_1]$ keinerlei Vorhersagen über den Verlauf auf einem anderen Teilintervall $[s_0, s_1]$ mit $s_0 \geq t_1$ machen kann, wenn man nur die Informationen über die Anfangswerte durch Abziehen der Werte $W(s_0)$ und $W(t_0)$ “löscht”. Der Pfad kann sich also zu jedem Zeitpunkt mit exakt der gleichen Wahrscheinlichkeit nach oben oder unten bewegen, egal welchen Verlauf er bis zu diesem Zeitpunkt genommen hat.

4.1.3 Das Itô–Integral

Betrachtet man die Pfade in Abbildung 4.3, so kann man durchaus eine vage Ähnlichkeit mit den Kursdiagrammen z.B. von Aktienkursen erkennen. Selbst für eine sehr grobe Modellierung von solchen Kurswerten ist der Wiener Prozess aber doch noch zu einfach, denn es gibt keine Parameter, an denen man “drehen” könnte, um den modellierten Verlauf einem echten Kursverlauf anzupassen: Der Wiener Prozess besitzt noch zu wenig Struktur.

Er ist aber bestens geeignet, um als “Zutat” in der Definition stochastischer Differentialgleichungen eine wichtige Rolle zu spielen; vereinfachend gesagt soll die zufällige Funktion g in (4.1) gerade die Ableitung des Wiener Prozesses sein. Um die dabei auftretenden mathematischen Probleme und ihre Lösung zu erläutern, wollen wir hier zunächst die denkbar einfachste stochastische Differentialgleichung betrachten und dann zur allgemeinen Formulierung übergehen.

Zunächst einige Anmerkungen zur Notation: Da die Lösung einer SDG über den eingehenden Wiener Prozess wieder eine zufällige Funktion — also ein stochastischer Prozess — ist, verwenden wir hier für den gesuchten unbekanntem Prozess die groß geschriebene Bezeichnung $X(t)$, bzw. mit Anfangswert $X_0 \in \mathbb{R}^n$ und Anfangszeit $t_0 \in \mathbb{R}$ die Schreibweise $X(t; t_0, X_0)$. Wir erlauben hierbei, dass X vektorwertig, also aus dem \mathbb{R}^n ist, was einfach bedeutet, dass $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ist, wobei die X_i reellwertige stochastische Prozesse im oben eingeführten Sinne sind. Zu jedem Pfad $W(t, \omega)$ des eingehenden Wiener Prozesses gehört dann ein Lösungspfad des X -Prozesses, den wir mit $X(t; t_0, X_0, \omega)$ bezeichnen.

Die technische Hauptschwierigkeit in der mathematischen Formulierung stochastischer Differentialgleichungen zeigt sich nun bereits bei einer scheinbar trivialen Aufgabe, nämlich dem Problem, eine stochastische Differentialgleichung aufzustellen, deren Lösung gerade der Wiener Prozess ist. Scheinbar trivial ist die Aufgabe deswegen, weil wir ja den Wiener Prozess als gegeben voraussetzen und in der Formulierung verwenden dürfen, weswegen es nahe liegt, einfach die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}W(t) \tag{4.10}$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = W(0)$ zur Anfangszeit $t_0 = 0$ zu verwenden. Das Problem ist jetzt aber: Was verstehen wir unter “ $\frac{d}{dt}W(t)$ ”? Man würde vielleicht versuchen, die Ableitung pfadweise auffassen, d.h., wir berechnen die Ableitung für jeden Pfad $W(t, \omega)$. Nur ist ein typischer Pfad $W(t, \omega)$, wie oben erwähnt, nirgends differenzierbar.

Zunächst einmal bietet es sich an, die Gleichung (4.10) analog zu (1.3) in Integralform

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \frac{d}{d\tau} W(\tau) d\tau$$

zu schreiben. Jetzt könnten wir formal integrieren, was uns aber bei der Frage “was ist $\frac{d}{dt}W(t)$?” nicht weiter bringt. Für das obige sogenannte *stochastische Integral* haben sich in der Literatur die kürzeren Schreibweisen

$$\int_0^t dW(\tau) \quad \text{oder} \quad \int_0^t dW_\tau$$

eingebürgert, die wir hier übernehmen wollen. Dies zeigt die Richtung auf, die wir zur Lösung unseres Problems einschlagen wollen: Anstatt die Ableitung $\frac{d}{dt}W(t)$ zu betrachten, werden wir versuchen, diesem stochastischen Integral eine mathematische Definition zu geben, die

- (i) wohldefiniert ist, obwohl $\frac{d}{dt}W(t)$ nicht existiert
- (ii) das gewünschte Ergebnis, nämlich $X(t) = W(t)$, liefert
- (iii) sich auf allgemeinere Integrale der Form

$$I(F) := \int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t \tag{4.11}$$

verallgemeinern lässt, damit wir auch kompliziertere SDGs formulieren können. Hierbei ist F wiederum ein stochastischer Prozess, der auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum wie W definiert ist.

Wir wollen dieses Konzept nun für Integrale der Form (4.11) angeben. Die hier vorgestellte Lösung geht auf Kiyosi Itô³ zurück und wurde in den 1940er Jahren entwickelt. Die Idee besteht darin, das Integral (4.11) für jedes Paar von Pfaden $F(t, \omega)$ und $W(t, \omega)$ durch den Limes einer geeigneten Summe zu approximieren. Wir wählen dazu ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Zeiten $\tau_i^{(N)}$, $i = 0, 1, \dots, N$ mit

$$t_0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \dots < \tau_N^{(N)} = t_1$$

und definieren für jedes $\omega \in \Omega$

$$I^{(N)}(F)(\omega) := \sum_{i=0}^{N-1} F(\tau_i^{(N)}, \omega) (W(\tau_{i+1}^{(N)}, \omega) - W(\tau_i^{(N)}, \omega)).$$

Das Integral (4.11) wird nun über den Limes dieser Summe definiert. Betrachte eine Familie von Folgen $\tau_i^{(N)}$ für $N \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta(N) = 0$, wobei $\delta(N) := \max_{i=1, \dots, N} \tau_i^{(N)} - \tau_{i-1}^{(N)}$ ist. Dann definieren wir

$$I(F) := \lim_{N \rightarrow \infty} I^{(N)}(F). \tag{4.12}$$

³japanischer Mathematiker, 1915–2008, auch Itô geschrieben

Diese Definition wirft zunächst eine Reihe von Fragen auf, denn da die Pfade des Wiener Prozesses sehr unangenehme Funktionen sein können, ist nicht garantiert, dass dieser Limes für jedes ω überhaupt existiert. Tatsächlich lag der Haupttrick von Itô darin, zu definieren, was der Limes in (4.12) eigentlich bedeuten soll. Dieser Limes ist nämlich *nicht* pfadweise zu verstehen (in dem Sinne, dass wir $\lim_{N \rightarrow \infty} I^{(N)}(F)(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ bilden), sondern man muss die Werte $I^{(N)}(F)$ ebenso wie das Integral $I(F)$ wieder als Zufallsvariablen $I^{(N)}(F) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $I(F) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen. Für Zufallsvariablen gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe und der hier geeignete ist der Begriff der *Quadrat-Mittel-Konvergenz*, der wie folgt definiert ist: Eine Folge von Zufallsvariablen $X_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert im Quadrat-Mittel-Sinne gegen eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_N - X|^2) = 0$$

gilt. Mit diesem Konvergenzbegriff kann man zeigen, dass die Folge $I^{(N)}(F)$ (unter geeigneten Bedingungen an F) tatsächlich konvergiert und (4.12) also wohldefiniert ist. Das resultierende Integral wird *Itô-Integral* genannt und es besitzt tatsächlich die oben aufgeführten gewünschten Eigenschaften (i)–(iii).

Mit Hilfe des Itô-Integrals können wir die informelle Schreibweise (4.1) mathematisch präzise formulieren. Statt der üblichen Differentialgleichungsschreibweise schreibt man *Itô-stochastische Differentialgleichungen* nämlich als

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW_t. \quad (4.13)$$

Dies ist nur eine symbolische Schreibweise; was mit (4.13) tatsächlich gemeint ist, ist die längere Integralschreibweise

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau, X(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau, X(\tau))dW_\tau,$$

bei der das zweite Integral gerade das Itô-Integral ist. Dies liefert eine mathematisch fundierte und brauchbare Definition stochastischer Differentialgleichungen. Falls $b(t, x) \equiv 0$ ist, also kein stochastischer Anteil vorhanden ist, reduziert sich (4.13) auf

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau, X(\tau))dt \iff \frac{d}{dt}X(t) = a(t, X(t)),$$

also auf die wohlbekannte deterministische gewöhnliche Differentialgleichung. Der deterministische Anteil der Gleichung $a(t, X(t))$ wird oft *Drift* genannt, der stochastische Anteil $b(t, X(t))$ oft als *Diffusion* bezeichnet.

Natürlich lässt sich (4.13) in vielfacher Hinsicht erweitern, z.B. kann man statt nur einem W mehrere unabhängige Wiener Prozesse W^1, \dots, W^m eingehen lassen, was zur Gleichung

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{j=1}^m b_j(t, X(t))dW_t^j$$

führt.

Für das Itô-Integral lassen sich eine Reihe von Eigenschaften beweisen; auf die meisten können wir hier nicht näher eingehen. In Lemma 4.2 werden wir eine wichtige Eigenschaft kennen lernen, eine weitere Eigenschaft ist die Tatsache, dass

$$\mathbb{E} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t \right) = 0 \quad (4.14)$$

ist, falls die Zufallsvariablen $F(t)$ und $W(s) - W(t)$ unabhängig sind für $s > t \geq 0$ (dies gilt immer, falls F die Lösung einer SDE bzgl. W ist). Eigenschaft (4.14) gilt zunächst für die Approximationen $I^{(N)}(F)$, weil nach Annahme an W und wegen der Unabhängigkeit und (4.9) die Gleichung

$$\mathbb{E}(F(\tau_i)(W(\tau_{i+1}) - W(\tau_i))) = \mathbb{E}(F(\tau_i)) \underbrace{\mathbb{E}(W(\tau_{i+1}) - W(\tau_i))}_{=0} = 0 \quad (4.15)$$

gilt, und überträgt sich durch die Limesbildung auf $I(F)$.

Bemerkung 4.1 Es sollte hier erwähnt werden, dass es eine weitere sinnvolle stochastische Integraldefinition gibt, die auf R. Stratonovich⁴ zurück geht. Das Stratonovich-Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) \circ dW_t$$

wird über eine ähnliche Limes-Bildung wie das Itô-Integral definiert und liefert ebenfalls eine mathematisch fundierte Definition stochastischer DGLs. Die beiden Integrale unterscheiden sich allerdings in den Rechenregeln ebenso wie in der Form der Lösungen. Die zugehörigen *Stratonovich-SDGs* werden in der Form

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t)) \circ dW_t$$

geschrieben. Aus Zeitgründen können wir auf diese zweite Definition und auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum Itô-Integral hier nicht näher eingehen. \square

4.1.4 Das Itô-Lemma

Um mit dem Itô-Integral zu rechnen, benötigt man geeignete Rechenregeln. Falls $x(t)$ eine Lösung einer eindimensionalen deterministischen DGL $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ist, so rechnet man für eine beliebige Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mittels der Kettenregel leicht nach, dass die Funktion $y(t) = g(t, x(t))$ die Gleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t))$$

erfüllt.

Das Itô-Lemma liefert nun eine Verallgemeinerung dieser Gleichung für die Lösung Itô-stochastischer DGL, und wird daher oft auch als stochastische Verallgemeinerung der Kettenregel bezeichnet.

⁴russischer Mathematiker, 1930–1997

Lemma 4.2 Sei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zwei mal stetig differenzierbare Funktion und sei $X(t)$ die Lösung einer reellwertigen Itô–SDG vom Typ (4.13). Dann erfüllt $Y(t) = g(t, X(t))$ die Gleichung

$$\begin{aligned} dY(t) &= \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))a(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))b(t, X(t))^2 \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))b(t, X(t))dW_t, \end{aligned}$$

wobei W hier gerade der Wiener Prozess aus der SDG ist, die $X(t)$ erfüllt. Diese Formel wird auch *Itô-Formel* genannt.

Beweisidee: Wir werden hier keinen vollständigen Beweis betrachten, wollen aber begründen, warum die (im Vergleich zur deterministischen Formel ungewöhnliche) zweite Ableitung von g nach x hier auftritt. Wir betrachten dazu zwei Zeitpunkte t und $t + \Delta t$. Dann gilt $X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta X(t)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta X(t) &= \int_t^{t+\Delta t} a(s, X(s))ds + \int_t^{t+\Delta t} b(s, X(s))dW_s \\ &\approx a(t, X(t))\Delta t + b(t, X(t))\Delta W_t, \end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei $\Delta W_t = W(t + \Delta t) - W(t)$ ist. Die Approximation (4.16) folgt hierbei aus der Limes-Definition des Itô-Integrals, wenn wir $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta t$ setzen. Wir betrachten nun die Größe

$$\Delta Y := g(t + \Delta t, X(t) + \Delta X(t)) - g(t, X(t)).$$

Aus der Taylor-Entwicklung von g folgt

$$\begin{aligned} \Delta Y &\approx \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X)^2 \\ &\approx \frac{\partial g}{\partial x} \left(a(t, X(t))\Delta t + b(t, X(t))\Delta W_t \right) + \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(a(t, X(t))^2 (\Delta t)^2 + 2a(t, X(t))b(t, X(t))\Delta t \Delta W_t + (b(t, X(t))\Delta W_t)^2 \right), \end{aligned}$$

wobei alle Ableitungen in $(t, X(t))$ ausgewertet werden. Um aus dieser Approximation die ‘‘Ableitung’’

$$dY(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta Y$$

zu berechnen, müssen wir alle Terme der Ordnung $O(\Delta t)$ berücksichtigen. Wären alle Größen deterministisch, so blieben hier gerade die Terme mit den ersten Ableitungen von g stehen. Im stochastischen Fall ist aber auch $(\Delta W_t)^2$ ein Term der Ordnung $O(\Delta t)$, denn es gilt

$$\mathbb{E}((\Delta W_t)^2) = \mathbb{E}(\underbrace{(\mathbb{E}(\Delta W_t) - \Delta W_t)}_{=0})^2 = \text{Var}(W_t) = \text{Var}(W(t + \Delta t) - W(t)) = \Delta t.$$

Der Term

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} b(t, X(t))^2 (\Delta W_t)^2$$

muss also mit berücksichtigt werden. Führt man nun den Grenzübergang für $\Delta t \rightarrow 0$ im richtigen stochastischen Sinne durch, so erhält man gerade die behauptete Formel. \square

Bemerkung 4.3 Es existiert auch eine Version des Itô-Lemmas für mehrdimensionale SDGs. In diesem Fall gehen — durch die im Beweis verwendete Taylor-Entwicklung für g — alle gemischten zweiten Ableitungen der Form $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$ in die Gleichung ein. \square

4.1.5 Beispiele für SDG-Modelle

Brown'sche Bewegung

In der Physik wird die *Brown'sche Bewegung* als Modell für die zufällige Bewegung kleiner Partikel verwendet. Die Gleichung ist in ihrer einfachsten Form in \mathbb{R} gegeben durch

$$dX(t) = a dt + \sigma dW_t.$$

Die Größe $a \in \mathbb{R}$ gibt dabei den Drift, also die “mittlere” Richtung der Teilchen an, die Größe $\sigma > 0$ die Größe des stochastischen Schwankens.

Für $a = 0$ und $\sigma = 1$ erhält man als Lösung den (um X_0 verschobenen) Wiener-Prozess $X(t) = X_0 + W_t$. Für $a = 0$ und $\sigma > 0$ erhält man den um σ skalierten Prozess $X(t) = X_0 + \sigma W_t$. Für $a \neq 0$ ergibt sich $X(t) = X_0 + at + \sigma W_t$.

Kompliziertere Modelle dieser Art sind vektorwertig und verwenden x - und/oder t -abhängige Funktionen $a(t, X_t)$ und $\sigma(t, X_t)$ an Stelle der Konstanten a und σ .

Geometrische Brown'sche Bewegung

Die *geometrische Brown'sche Bewegung* ist das einfachste sinnvolle Modell zur Modellierung von Aktienkursen. Zwar weiß man seit längerem, dass die statistischen Eigenschaften dieses Modells mit echten Börsendaten nicht perfekt übereinstimmen. Wegen der einfachen Struktur des Modells kann man mit ihm aber sehr gut rechnen, weswegen es nach wie vor viel verwendet wird.

Die absolute Minimalanforderung, die man an ein Modell für Aktienkurse stellt, ist das Vorhandensein von zwei Parametern: Ein Parameter μ , mit dem ein “Trend” des Kurses nach oben oder unten erzielt werden kann und ein weiterer Parameter σ , mit dem man die stochastische Streuung, also die Varianz des Kurses beeinflussen kann. Dabei sollen Wachstum und Schwankung proportional zum Wert der Aktie X_t sein sein (dies ist der wesentliche Unterschied zur Brown'schen Bewegung).

Das denkbar einfachste SDG-Modell, das diese Anforderungen erfüllt ist gegeben durch

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW_t. \quad (4.17)$$

In der Finanzmathematik wird der Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ als *Rücklaufquote* oder auch *Rendite* bezeichnet, während $\sigma > 0$ die *Volatilität* genannt wird.

Das Schöne an dieser einfachen Gleichung ist die Tatsache, dass man auch hier die Lösungen noch per Hand angeben kann, wenngleich die Berechnung schon mehr Arbeit macht als bei der einfachen Brown'schen Bewegung: mit Hilfe des Itô-Lemmas rechnet man nach, dass

$$X(t; X_0) = X_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right) \quad (4.18)$$

die Lösung von (4.17) ist: Wir betrachten die SDG $dZ_t = dW_t$ (also $a \equiv 0$ und $b \equiv 1$) und wenden das Itô-Lemma an auf $Y(t) = g(t, Z(t))$ mit

$$g(t, x) = X_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma x \right).$$

Wegen

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = g(t, x) \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right), \quad \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = g(t, x) \sigma \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) = g(t, x) \sigma^2$$

und $Y(t) = g(t, Z(t)) = X(t)$ (weil $Z(t) = W(t)$ ist) folgt aus dem Itô-Lemma mit $a \equiv 0$ und $b \equiv 1$ die SDG

$$dX(t) = dY(t) = \left(X(t) \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 X(t) \right) dt + X(t) \sigma dW_t = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW_t,$$

was zeigt, dass (4.18) tatsächlich eine Lösung der SDG (4.17) ist, wegen der Eindeutigkeit der Lösung also die einzige.

Für $\sigma = 0$ erhalten wir aus (4.17) gerade die bekannte lineare DGL $\dot{x}(t) = \mu x(t)$ und ihre zugehörige Lösung $x(t) = x(0)e^{\mu t}$. Durch diese Gleichung ist der Erwartungswert $\mathbb{E}(X(t; X_0))$ bestimmt. Für die Lösungen von (4.17) gilt nämlich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t; X_0)) &= \mathbb{E}(X(0)) + \mathbb{E} \left(\int_0^t \mu X(\tau; X_0) d\tau \right) + \underbrace{\mathbb{E} \left(\int_0^t \sigma X(\tau; X_0) dW_\tau \right)}_{=0, \text{ wegen (4.14)}} \\ &= \mathbb{E}(X(0)) + \int_0^t \mu \mathbb{E}(X(\tau; X_0)) d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $e(t) = \mathbb{E}(X(t, x_0))$ erfüllt also gerade die lineare DGL $\dot{e}(t) = \mu e(t)$ mit Anfangswert $e(0) = \mathbb{E}(X_0) = X_0$, weswegen $\mathbb{E}(X(t, x_0)) = X_0 e^{\mu t}$ ist.

Ebenso wie den Erwartungswert kann man auch die Varianz der Lösungen von (4.17) explizit berechnen: Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}(S(t)) &= E \left(S_0^2 \exp(2((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W(t))) - S_0^2 e^{2\mu t} \right) \\ &= E \left(S_0^2 e^{2\mu t} (\exp(-\sigma^2 t + 2\sigma W(t)) - 1) \right) \\ &= S_0^2 e^{2\mu t} (E(\exp(-\sigma^2 t + 2\sigma W(t))) - 1). \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Erwartungswert lässt sich nun schreiben als

$$\exp(-\sigma^2 t + 2\sigma W(t)) = \tilde{S}_0 \exp\left(\left(\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)t + \tilde{\sigma}W(t)\right)$$

mit $\tilde{S}_0 = 1$, $\tilde{\mu} = \sigma^2$ und $\tilde{\sigma} = 2\sigma$. Er ist also gerade wieder eine geometrische Brownsche Bewegung, für die folglich

$$E\left(\tilde{S}_0 \exp\left(\left(\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)t + \tilde{\sigma}W(t)\right)\right) = \tilde{S}_0 e^{\tilde{\mu}t} = e^{\sigma^2 t}$$

gilt. Also erhalten wir für die Varianz

$$\text{Var}(S(t)) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Für einen zu modellierenden Kurs können die zwei Parameter üblicherweise aus vergangenen Kursverläufen geschätzt werden, vereinfacht gesagt gibt μ den Trend des bisherigen Kursverlaufs an, während sich σ aus der Streuung der vergangenen Werte ergibt. Dies zeigt, dass diese Art der Modellierung keine echten Voraussagen über den Kurs zulässt; sie erlaubt nur eine stochastische Modellierung des Verlaufes auf Basis vergangener Werte. Mehr kann man in der (seriösen) Finanzmathematik aber auch nicht erwarten.

Falls man dieses Modell in der Optionsbewertung einsetzt und eine sogenannte *risiko-neutrale* Optionsbewertung durchführen will, so setzt man $\mu = r$, wobei r die risikofreie Zinsrate am Markt ist. In diesem Fall muss der Parameter also nicht geschätzt werden.

Ornstein-Uhlenbeck Prozess

Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess ist die Lösung der SDG

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\theta, \sigma > 0$.

Wenn der Wert von X_t deutlich größer als μ ist, ist der Driftterm der Gleichung sehr negativ, weswegen dX_t mit hoher Wahrscheinlichkeit negativ ist und der Wert daher fällt. Ist umgekehrt X_t deutlich kleiner als μ , so steigt der Wert mit hoher Wahrscheinlichkeit. Der Wert schwankt also um den langfristigen Mittelwert μ . Dies wird auch aus der (fast expliziten) analytischen Lösung klar

$$X_t = e^{-\theta t} X_0 + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s$$

die man wiederum mit dem Itô-Lemma berechnen kann. Da das Integral in diesem Ausdruck wegen (4.14) den Erwartungswert Null hat, schwankt der Wert um den ersten Term, der gegen μ konvergiert.

Dieses Modell wird z.B. zur Modellierung von Rohstoffpreisen aber auch im Rahmen des sogenannten Vasicek-Modells bei der Modellierung von Zinssätzen verwendet.

Mean reversion Modell

Beobachtet man reale Aktienkurse, so fällt auf, dass diese

Wir wollen uns hier nur kurz auf die Modellierung von Kursverläufen eingehen, da wir noch zur Anwendung dieser Modelle in der Optionspreisbewertung kommen wollen. Um zu zeigen, dass es durchaus noch kompliziertere Modelle als (4.17) gibt, wollen wir hier nur ein mehrdimensionales Modell angeben. Dieses ist gegeben durch den dreidimensionalen Prozess $X(t) = (S(t), \sigma(t), \zeta(t))^T$, der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW_t^1 \\ d\sigma(t) &= -(\sigma(t) - \zeta)dt + \alpha\sigma(t)dW_t^2 \\ d\zeta(t) &= \beta(\sigma(t) - \zeta(t))dt \end{aligned}$$

mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ gegeben ist. In der ersten Komponente erkennen wir (4.17) wieder, allerdings ist σ nun kein fester Parameter sondern ebenfalls ein stochastischer Prozess, was die Realität sicherlich deutlich angemessener widerspiegelt. Um zu verstehen, wie sich σ hier in der Zeit verändert, ist es sinnvoll, zunächst die Gleichung für ζ anzuschauen. Für jeden Pfad $\sigma(t, \omega)$ ist dies eine einfach inhomogene lineare DGL, für sie man die exakte Lösung als

$$\zeta(t) = e^{-\beta t} \zeta(0) + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \sigma(s, \omega) ds$$

angeben kann. Der Wert ζ kann also als (durch $e^{-\beta(t-s)}$ gewichteter) Mittelwert für σ aufgefasst werden. Die Gleichung für σ bewirkt dann, dass die Volatilität σ ihrem Mittelwert folgt. Wäre dies eine deterministische Gleichung, so wäre das Verhalten langweilig da (für $\beta > 0$) sowohl ζ als auch σ gegen Null konvergieren würden. Da die Gleichung für σ aber durch einen zweiten Wiener Prozess W^2 wiederum stochastisch gestört wird, ergibt sich ein durchaus interessantes Verhalten der Gleichung.

4.2 Literaturhinweise

Dieses Kapitel wurde zusammengestellt auf Basis der Bücher

P.E. Kloeden and E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, 1999 (3. Auflage)

und

R. Seydel, Tools for Computational Finance, Springer-Verlag, 2nd edition, 2004,

von dem es auch die deutsche Ausgabe

R. Seydel, Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten, Springer-Verlag, 2000

gibt (die englische Ausgabe ist allerdings ausführlicher und aktueller). Diese Bücher sind — wie die Titel bereits andeuten — numerisch orientiert, liefern aber auch eine knappe Darstellungen der zu Grunde liegenden Theorie, auf die hier zurück gegriffen wurden.

Kapitel 5

Die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung

In diesem Kapitel werden wir die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung herleiten, die Ausbreitungsphänomene beschreibt, z.B. von einer Flüssigkeit in einer anderen Flüssigkeit oder von Wärme in einem Medium, z.B. einem Metallstab oder einer Metallplatte. Wir werden die Gleichung auf zwei Wegen herleiten; die resultierende Gleichung wird dabei in beiden Fällen die gleiche sein. Danach werden wir verschiedene Varianten und Erweiterungen dieser Gleichung betrachten.

5.1 Mikroskopische Herleitung

Die erste Herleitung beruht auf einer mikroskopischen Formulierung, die der Ausbreitung von Flüssigkeiten in anderen Flüssigkeiten entspricht, z.B. Farbstoff in Wasser in einem Wassertank. Die Modellierungsannahme dabei ist, dass keinerlei Strömungen o.Ä. auftreten, die Verteilung der Flüssigkeit also nur auf Grund der Eigenbewegung der Moleküle — der sogenannten Diffusion — geschieht. Für diese wiederum nehmen wir an, dass sie in jeder Koordinatenrichtung einer Brown'schen Bewegung, im einfachsten Fall also einem Wiener-Prozess folgen. Wir betrachten bei der Herleitung zunächst nur eine Koordinatenrichtung, die Position ist also durch eine skalare reelle Variable x bestimmt, die Zeit bezeichnen wir wie immer mit t .

Mit $u(t, x)$ bezeichnen wir dann die erwartete Konzentration (vereinfacht gesagt also die Anzahl der Moleküle an diesem Ort) der sich ausbreitenden Flüssigkeit (also z.B. des Farbstoffs) zur Zeit $t \geq 0$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$. Die Anfangskonzentration zur Zeit $t_0 = 0$ ist durch $u_0(x)$ gegeben. Die Bewegung eines Moleküls, das sich zur Zeit $t > 0$ fast sicher im Punkt x befindet, wird nun gemäß der Modellierungsannahme durch einen Wiener-Prozess $W_\tau - W_t + x$ modelliert. Zum Zeitpunkt $\tau = 0$ befindet sich das Molekül also in der (zufälligen) Position $-W_t + x$. Da $-W_t$ wieder ein Wiener-Prozess ist, können wir die Position auch als

$$W_t^x := W_t + x$$

schreiben; der Übergang von $-W_t$ zu W_t ändert nichts an den statistischen Eigenschaften.

Wir können W_t^x also als Anfangsposition eines zur Zeit $t > 0$ im Punkt x befindlichen Moleküls auffassen.

Damit können wir nun die Konzentration $u(t, x)$ der Moleküle zur Zeit t im Punkt x bestimmen: Die Größe $u_0(W_t^x)$ gibt gerade die zufällige Anzahl der Moleküle an, die sich zur Zeit t im Punkt x befinden. Man kann sich das so vorstellen, dass man die zufälligen Pfade der Moleküle rückwärts in der Zeit von x zu ihrem Anfangszustand W_x^t verfolgt. Ist die Konzentration $u_0(W_t^x)$ am Anfangspunkt hoch, so werden viele Moleküle diesen Weg gehen, ist sie niedrig, dann nur wenige. Die erwartete Konzentration ist nun gerade der Erwartungswert über diesen Wert, also

$$u(t, x) = \mathbb{E}[u_0(W_t^x)].$$

Mit Hilfe des Itô-Lemmas 4.2 können wir nun eine partielle Differentialgleichung für u herleiten: W_t^x erfüllt die triviale stochastische Differentialgleichung

$$dW_t = dW_t,$$

also (4.13) mit $a \equiv 0$ und $b \equiv 1$. Für $Y(t) = u_0(W_t^x)$ gilt also nach Lemma 4.2

$$dY(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(W_t^x) dt + \frac{\partial}{\partial x} u_0(W_t^x) dW_t.$$

Bilden wir nun auf beiden Seiten den Erwartungswert, so fällt gemäß (4.14) der zweite Summand auf der rechten Seite weg und wir erhalten

$$du(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) dt,$$

wobei wir annehmen, dass die Funktionen so regulär sind, dass das Vertauschen von Erwartungswertbildung (also Integration) und Differentiation erlaubt ist. Da wir jetzt rein deterministische Größen haben, können wir das in üblicher Schreibweise als

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)$$

schreiben. Dies ist gerade die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung. Wir werden im folgenden partielle Ableitungen gelegentlich mit der Indexschreibweise bezeichnen, die in der Theorie partieller Differentialgleichungen üblich ist. So schreiben wir

$$\frac{\partial}{\partial t} u = u_t \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = u_{xx}.$$

Die Wärmeleitungsgleichung schreibt sich so kurz als

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}.$$

In höheren Raumdimensionen mit $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ folgt jede Komponente x_i der Bewegung eines Moleküls einer (von den anderen unabhängigen) Brown'schen Bewegung. Durch Anwendung der obigen Herleitung auf alle Komponenten¹ erhalten wir so

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(t, x) + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u(t, x) =: \frac{1}{2} \Delta u(t, x).$$

¹Formal wendet man hier das mehrdimensionale Itô-Lemma an mit $b \equiv \text{Id}$.

Hierbei heißt

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (5.1)$$

der *Laplace-Operator*.

Anstelle der Standard-Brownschen Bewegung kann man auch eine skalierte Brown'sche Bewegung $B_t = 2\kappa W_t$ mit $\kappa > 0$ für die Modellierung der Moleküle verwenden. Kleine κ führen dazu, dass sich die Moleküle weniger schnell bewegen, größere führen zu schnellerer Bewegung. Die obige Herleitung ändert sich nur dahingehend, dass nun $b \equiv \kappa$ gilt, womit wir

$$u_t(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) \quad (5.2)$$

erhalten. Die Größe $\kappa > 0$ heißt Diffusionskoeffizient.

Aus der Darstellung $u(t, x) = \mathbb{E}[u_0(B_t)]$ kann man im skalaren Fall leicht die Lösung der Gleichung erhalten: Es gilt

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{\kappa(x-y)^2}{t}} dy.$$

Beachte, dass das Gebiet, auf dem wir die Gleichung lösen, dabei unbeschränkt ist. Beschränkte Gebiete betrachten wir in Abschnitt 5.3.

5.2 Makroskopische Herleitung

Während die mikroskopische Herleitung auf die Modellierung von Diffusionsprozessen von Molekülen "passt", ist die makroskopische Herleitung auf die Modellierung der Veränderung der Wärmeverteilung in einem Medium zugeschnitten. Wir führen dies wiederum für den eindimensionalen Fall aus und stellen uns dafür einen Stab vor, bei dem die Temperatur sich nur in Längsrichtung ändert und bei dem keine Wärmeenergie an die Umgebung abgegeben oder von ihr aufgenommen wird.

Die Herleitung verwendet drei physikalische Gesetze bzw. Zusammenhänge:

- **Wärmeenergie:** Die Wärmeenergie eines Körpers ist gegeben durch die Größe $E = cmu$, wobei m die Masse, u die Temperatur und c die spezifische Wärmekapazität des Materials ist (das ist die Menge an Energie, die benötigt wird, um die Temperatur einer Masseneinheit des Materials um eine Temperatureinheit zu erhöhen).
- **Fourier'sches Gesetz der Wärmeleitung:** Dieses besagt, dass die Wärmeübergangsrate Φ pro Flächeneinheit proportional zum Gradient der Temperaturen an der Übergangsfläche ist. In Formeln:

$$\frac{\Phi}{A} = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x},$$

wobei K_0 die Wärmeleitfähigkeit und A die Querschnittsfläche des Stabs bezeichnet.

- **Energieerhaltung:** Die Wärmeenergie E in dem Stab ändert sich nur durch Abgabe oder Aufnahme von Wärmeenergie von außen

Wir unterteilen jetzt den Stab in Teilstücke der Form $[x, x + \Delta x]$ mit Länge $\Delta x > 0$. Wenn wir die Teilstücke klein wählen, ist die Temperatur darin näherungsweise konstant gleich $u(t, x)$ und wir können die Wärmeenergie des Teilstücks näherungsweise² als

$$E(t) = c\rho A\Delta x u(t, x) + O(\Delta x^2)$$

angeben, wobei ρ die Dichte des Materials angibt, $\rho A\Delta x$ also die Masse m eines Teilstücks beschreibt. Nach dem Gesetz der Energieerhaltung kann sich die Energie nur durch Abgabe und Aufnahme von Wärme aus den benachbarten Teilstücken des Stabs ändern. Also gilt für die Wärmeenergie E in jedem Teilstück in einem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$

$$E(t + \Delta t) - E(t) = \int_t^{t+\Delta t} \Phi(\tau, x) - \Phi(\tau, x + \Delta x) d\tau.$$

Einsetzen der obigen Größen liefert

$$c\rho A\Delta x \left(u(t + \Delta t, x) - u(t, x) \right) + O(\Delta x^2) = AK_0 \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) d\tau.$$

Nach Umstellen und Vereinfachen erhalten wir

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = \frac{K_0}{c\rho} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)}{\Delta x} d\tau + \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta t \Delta x}.$$

Lassen wir nun $\Delta x \rightarrow 0$ gehen, so erhalten wir

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = \frac{K_0}{c\rho} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) d\tau.$$

woraus wir mit $\Delta t \rightarrow 0$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x),$$

jetzt mit $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ erhalten.

In praktischen Anwendungen ist κ selten konstant. Man muss aber aufpassen, wie man ein nichtkonstantes κ in die Gleichung einbezieht. Nehmen wir in der gerade durchgeführten Herleitung an, dass $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ eine Funktion von x ist. Dann erhalten wir am Ende die Gleichung

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\kappa(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)}{\Delta x} d\tau + \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta t \Delta x}.$$

Beim Grenzübergang $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ ergibt sich daraus

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{d}{dx} \kappa(x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x).$$

Die Funktion κ rutscht also “zwischen” die beiden Ableitungen und darf nicht einfach vor Δu geschrieben werden. Bei der Schreibweise verwenden wir hier die Konvention, dass $\partial/\partial x$ immer nur auf die direkt nachfolgende Funktion wirkt, d/dx aber auf alle nachfolgenden Ausdrücke.

²Wir setzen voraus, dass alle involvierten Funktionen hinreichend oft differenzierbar sind, um die entsprechenden Approximationen Grenzübergänge durchführen zu können.

5.3 Randbedingungen

In der Praxis sind unendliche lange Stäbe oder Körper mit unendlicher Ausdehnung eher selten. Daher möchte man sich auf ein beschränktes (und offenes) Definitionsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einschränken und die Gleichung (5.2) nur auf Ω lösen. Dazu muss man aber festlegen, was am Rand mit der Wärme geschieht — man muss sogenannte Randbedingungen festlegen. Die vielleicht einfachste Möglichkeit dafür ist, die Temperatur selbst festzulegen, also für eine auf $\partial\Omega$ definierte Funktion $u_R : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Bedingung

$$u(t, x) = u_D(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega, t \geq 0$$

zu fordern. Dies ist die sogenannte *Dirichlet-Randbedingung*. Im skalaren Fall kann man die Wärmeleitungsgleichung mit dieser Randbedingung immer noch explizit lösen: Für $\Omega = (0, 1)$ und Randbedingung $u_D(0) = u_D(1) = 0$ erhält man z.B. die Lösung

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t},$$

mit

$$B_n := 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx.$$

Eine andere Art Randbedingung ist die *Neumann-Randbedingung*, bei der nicht der Wert von $u(t, x)$ sondern die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} u(t, x)$ am Rand festgelegt wird, der nach dem oben angegebenen Fourier'schen Gesetz proportional zum Wärmefluss über den Rand ist. Formal betrachtet man dazu in jedem Randpunkt $x \in \partial\Omega$ einen Normalenvektor $n(x)$, der senkrecht auf der Tangente an $\partial\Omega$ steht. Die Bedingung verlangt dann, dass

$$u_x(t, x)n(x) = u_D(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega, t \geq 0.$$

Auch für diese Randbedingung lässt sich im eindimensionalen eine explizite Lösung in Form einer unendlichen Reihe angeben (worauf wir hier verzichten wollen).

Neben diesen beiden gibt es weitere Randbedingungen, auf die wir hier nicht näher eingehen. Wichtig ist, dass man mit Hilfe der Randbedingungen Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen machen kann.

Typisch ist, dass in der Praxis nicht in jedem $x \in \partial\Omega$ die gleiche Randbedingung verwendet wird. Als Beispiel betrachte die folgende Modellierung einer Wärmedämmung am Fenster.

In Abbildung 5.1 ist ein Problem der Wärmedämmung an einem Fenster illustriert. Hier gibt es verschiedene Materialien mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten: Das Fenster (hell gepunktet), das Mauerwerk (dunkler gepunktet) sowie zwei Dämmmaterialien (schraffiert bzw. ganz dunkel gepunktet). Die Modellierung würde also ein x -abhängiges κ verwenden.

An den "realen" Außen- und Innenrändern (also den Randabschnitten zwischen C und D bzw. A und B) wählt man in diesem Modell Dirichlet-Randbedingungen, während man an den "unechten" Rändern (also den Randabschnitten zwischen A und D und zwischen B und C) Neumann-Randbedingungen wählen kann, die die physikalische Realität hier zumindest approximativ gut modellieren, da die Wärme vom Innen- zum Außenrand fließt, also parallel zu den unechten Rändern.

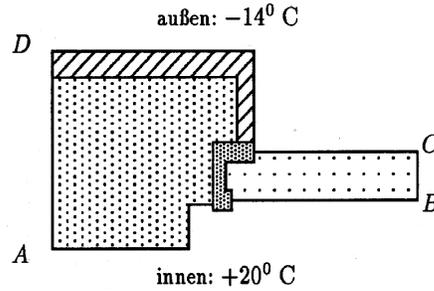


Abbildung 5.1: Beispiel: Wärmedämmung am Fenster

5.4 Erweiterungen

Die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung kann auf mehrere naheliegende Arten verallgemeinert werden. Bei der Interpretation als Diffusion können wir z.B. annehmen, dass neben der molekularen Bewegung auch Strömungen auftreten. Zudem kann die sich bewegende Flüssigkeit an gewissen Orten in Ω produziert werden. Letzteres würde im Falle der Wärmemodellierung dem Heizen an bestimmten Stellen im Raum entsprechen, eine Strömung würde einer Luftströmung entsprechen, die die Wärme im Raum transportiert.

Wir integrieren diese Strömung in die zweite Herleitung, indem wir im Fourier'schen Gesetz auf der rechten Seite den Term $u(t, x)\hat{f}(t, x)$ addieren; der zusätzliche Wärmefluss hängt also von der Strömungsgeschwindigkeit f und der vorhandenen Wärme u ab. Dann erhalten wir mit analogen Rechnungen wie oben die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{K_0}{c\rho} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)}{\Delta x} \\ &\quad - \frac{1}{c\rho} \frac{u(t, x + \Delta x)\hat{f}(t, x + \Delta x) - u(t, x)\hat{f}(t, x)}{\Delta x} dt \\ &\quad + \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta t \Delta x}, \end{aligned}$$

Mit $f = \hat{f}/(c\rho)$ ergibt sich so für $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ die Gleichung

$$u_t(t, x) = \kappa u_{xx}(t, x) - \frac{d}{dx} \left(u(t, x) f(t, x) \right).$$

Der zusätzliche Term auf der rechten Seite wird als *Konvektionsterm* oder *Advektionsterm* bezeichnet.

Bemerkung 5.1 Interessanterweise ist es nicht so einfach, den Advektionsterm in die erste Herleitung einzubeziehen. Der naheliegende Ansatz, die Gleichung für die Moleküle zu

$$dB_t = f(t, B_t)dt + 2\kappa dW_t$$

zu erweitern führt mit etwas Rechnung auf einen Advektionsterm der Form

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) f(t, x).$$

Dieser stimmt offensichtlich nur im Fall, dass $-u(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0$ ist, mit dem aus der vorherigen Herleitung überein, ansonsten fehlt gerade der Term $-u(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$. Der Grund ist, dass die Formel $u(t, x) = \mathbb{E}(u_0(B_t))$ nur dann die Konzentration korrekt wiedergibt, wenn die Moleküle im Mittel nicht zusammen- oder auseinanderlaufen. Wenn sie zusammen- oder auseinanderlaufen, reicht es nicht aus, die Ausbreitung der Anfangskonzentration u_0 entlang der Pfade zu betrachten, sondern es muss auch die Änderung der Konzentration durch die Änderung der Dichte der Partikel berücksichtigt werden. Diese wird gerade durch $-u(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ beschrieben, was eine anschauliche Interpretation dieses Terms liefert. In der Herleitung kann dieser Term dadurch berücksichtigt werden, indem man den Ansatz $u(t, x) = \mathbb{E}(u_0(B_t))$ zu $u(t, x) = \mathbb{E}(u_0(B_t)) \exp^{-\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}(f(s, B_s)) ds}$ ändert. Dann werden die Rechnungen zur Herleitung der Gleichung aber deutlich komplizierter als oben. \square

Als zweite Erweiterung betrachten wir einen sogenannten Reaktionsterm, mit dem die Konzentration bzw. Wärme erhöht (oder auch verringert) werden kann. Dies ist einfach ein weiterer Term der Form $r(t, x)$ auf der rechten Seite, so dass die Gleichung zu

$$u_t(t, x) = \kappa u_{xx}(t, x) - \frac{d}{dx} \left(u(t, x) f(t, x) \right) + r(t, x)$$

wird. Diese Gleichung wird Reaktions-Advektions-Diffusionsgleichung oder auch Transportgleichung genannt. Die vektorwertige Version mit allgemeinen orts- und zeitabhängigen Koeffizienten lautet

$$u_t(t, x) = \operatorname{div} \left(\kappa(t, x) \nabla u(t, x) \right) - \operatorname{div} \left(u(t, x) f(t, x) \right) + r(t, x). \quad (5.3)$$

Dabei ist $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)^T$ der Gradient und $\operatorname{div} f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ die Divergenz (auch als $\nabla \cdot f$ bezeichnet). Für den mehrdimensionalen Advektionsterm werden wir in Abschnitt 7.2 eine alternative Herleitung auf Basis der Erhaltung der Masse kennen lernen.

5.5 Die stationäre Gleichung

Genau wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man bei partiellen Differentialgleichungen von Gleichgewichten sprechen. Z.B. im Falle der einfachen Wärmeleitungsgleichung entspricht ein Gleichgewichtszustand einer Wärmeverteilung, welche sich unter den gegebenen Randbedingungen nicht mehr verändert. Statt eines Punktes im \mathbb{R}^n ist das Gleichgewicht jetzt also eine Funktion, und statt eines Nullstellenproblems muss man zur Berechnung des Gleichgewichts eine weitere partielle Differentialgleichung lösen, die man gerade dadurch erhält, dass man $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)$ gleich Null setzt. Im allgemeinsten Fall ergibt sich für das Gleichgewicht also die Gleichung

$$0 = \operatorname{div} \left(\kappa(t, x) \nabla u(t, x) \right) - \operatorname{div} \left(u(t, x) f(t, x) \right) + r(t, x),$$

die natürlich noch durch geeignete Randbedingungen ergänzt werden muss.

Bemerkung 5.2 Die in diesem Kapitel betrachteten Gleichungen unterscheiden sich von den vorher betrachteten gewöhnlichen Differentialgleichungen dadurch, dass die unbekannt Lösungen nicht nur von einer eindimensionalen Variablen (bei uns immer mit “ t ” bezeichnet) abhängen, sondern von mehreren Variablen t und x , die im Falle von x zudem noch mehrdimensional sein können. Es treten also partielle Ableitungen der unbekannt Funktion in der Gleichung auf, woher der Name “partielle Differentialgleichung” stammt. Neben der Anfangsbedingung werden bei partiellen Differentialgleichungen immer auch Randbedingungen benötigt, damit man eine eindeutige Lösung erhält. Oftmals besitzen Differentialgleichungen keine hinreichend oft stetig differenzierbaren Lösungen. Um trotzdem Lösungen finden zu können, werden sogenannte schwache Ableitungen verwendet, was im Wesentlichen darauf hinausläuft, die partielle DGL als Integralgleichung zu schreiben und — meist mit partieller Integration — geeignet umzuformen. Diese sogenannten schwachen Lösungen wollen wir hier aber nicht vertiefen und verweisen statt dessen auf Vorlesungen zur Höheren Analysis oder entsprechende Lehrbücher. \square

5.6 Populationsmodelle mit Diffusion

In unseren Modellen für die Populationsdynamik in Kapitel 2 haben wir die Migration zwar erwähnt, aber in keinem unserer Modelle berücksichtigt. Eine Möglichkeit, Migration in Populationsmodelle einzubeziehen, ist die Modellierung als Diffusion. Das Modell wird dann eine partielle Differentialgleichung, die in einem Gebiet Ω die vom Ort x abhängige Dichte der Räuber- und Beute-Populationen beschreibt.

Um dies zu erreichen, betrachten wir zunächst das Modell für n Spezies der Form (2.12), bei dem wir zur Vereinfachung $b_i = 1$ setzen, also

$$\dot{u}_i(t) = k_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i(t) u_j(t) =: f_i(u(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Die Größen der Populationen wurden hier mit u_i statt mit x_i bezeichnet, weil $x \in \mathbb{R}^d$ nun die räumliche Variable bezeichnet, von der die u_i zusätzlich abhängen. Dies repräsentiert die räumliche Verteilung der Spezies. Um die räumliche Veränderung der Population zu modellieren, fügen wir nun zu jeder Gleichung einen Diffusionsterm wie in (5.3) mit Diffusionskoeffizient $\kappa_i > 0$ (der von t , x und ggf. auch den u_i abhängen kann; wir lassen zur Vereinfachung der Notation die Argumente von κ_i im Folgenden weg) ein. Wir betrachten also die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(t, x) = f_i(u(t, x)) + \operatorname{div} (\kappa_i \nabla u_i(t, x)), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

für $x \in \Omega$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet ist. Über die Grenzen des Gebiets hinaus findet keine Migration statt, weswegen wir auf $\partial\Omega$ die Randbedingung

$$\nabla u(x) n(x) = \frac{\partial}{\partial x} u(x)^T n(x) = 0$$

für die äußere Normale n und $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ annehmen.

Wie im Endlichdimensionalen interessiert man sich für die Stabilität der Gleichgewichte dieser Gleichung. Beachte, dass für jede Lösung $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \dots, \bar{u}_d^*)^T \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems

$$0 = k_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{u}_j^*, \quad i = 1, \dots, n$$

die Funktion $u^* \equiv \bar{u}^*$ ein Gleichgewicht für (5.5) ist. Dieses nennen wir zulässig, wenn $\bar{u}_i^* > 0$ gilt für alle $i = 1, \dots, n$.

Zur Untersuchung der Stabilität kann man einen ähnlichen Ansatz wie im Endlichdimensionalen machen. Dort hatten wir ein erstes Integral bzw. eine Lyapunovfunktion betrachtet. Hier gehen wir ähnlich vor. Für $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ definieren wir zunächst

$$\widehat{V}(\bar{u}) = \sum_{i=1}^d c_i \left(\bar{u}_i - \bar{u}_i^* - \bar{u}_i^* \ln \left(\frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_i^*} \right) \right).$$

Dabei wählen wir die $c_i > 0$ so, dass die Matrix $CA + A^T C$ negativ definit ist, wobei $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ist (dies geht natürlich nicht für beliebige Koeffizienten α_{ij} ; hier “versteckt” sich also eine Bedingung an die α_{ij}). Für diese c_i kann man nachrechnen, dass $D\widehat{V}(\bar{u})f(\bar{u}) \leq -C_1 \|\bar{u} - \bar{u}^*\|_2^2$ für ein $C_1 > 0$ gilt³ für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ aus (5.4).

Nun definieren wir für $u : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$V(u(t, \cdot)) = \int_{\Omega} \widehat{V}(u(t, x)) dx.$$

Die Behauptung ist nun, dass ein $\gamma > 0$ existiert, so dass für alle differenzierbaren Lösungen u von (5.5) die Ungleichung

$$\frac{d}{dt} V(u(t, \cdot)) \leq -\gamma V(u(t, \cdot)) \quad (5.6)$$

gilt. Die Funktion V nimmt daher exponentiell ab, woraus $V(u(t, \cdot)) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ folgt.

Da aus der Taylor-Reihe des Logarithmus für ein $C_2 > 0$ die Abschätzung

$$\widehat{V}(\bar{u}) \geq C_2 \|\bar{u} - \bar{u}^*\|_2^2$$

folgt, gilt $V(u(t, \cdot)) \geq C_2 \|u(t, \cdot) - \bar{u}^*\|_{L^2}^2$ für die quadrierte L^2 -Norm

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} \|f\|_2^2 dx.$$

Also folgt aus der Konvergenz von V gegen Null, dass $u(t, \cdot)$ für $t \rightarrow \infty$ in der L^2 -Norm exponentiell gegen das Gleichgewicht u^* konvergiert.

³Genauer gilt $D\widehat{V}(\bar{u})f(\bar{u}) = 1/2(\bar{u} - \bar{u}^*)^T (CA + A^T C)(\bar{u} - \bar{u}^*)$

Zum Beweis von (5.6) berechnen wir (mit der Kurzschreibweise $D\widehat{V} = \partial\widehat{V}/\partial u$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u(t, \cdot)) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt}\widehat{V}(u(t, x))dx \\ &= \int_{\Omega} D\widehat{V}(u(t, x))\frac{d}{dt}u(t, x)dx \\ &= \int_{\Omega} \left[D\widehat{V}(u(t, x))f(u(t, x)) + \sum_{i=1}^n D\widehat{V}(u(t, x))_i \operatorname{div}(\kappa_i \nabla u_i(t, x)) \right] dx. \end{aligned}$$

Das erste Teilintegral können wir nun abschätzen mittels

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D\widehat{V}(u(t, x))f(u(t, x))dx &\leq \int_{\Omega} -C_1 \|\bar{u}(t, x) - \bar{u}^*\|_2^2 dx \\ &= -C_1 \|\bar{u}(t, x) - \bar{u}^*\|_{L^2}^2 \leq -\frac{C_1}{C_2} V(u(t, \cdot)). \end{aligned}$$

Auf die Summanden des zweiten Teilintegrals wenden wir den Satz von Gauß an (vgl. (5.8)) und erhalten so

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D\widehat{V}(u(t, x))_i \operatorname{div}(\kappa_i \nabla u_i(t, x)) dx &= \int_{\partial\Omega} D\widehat{V}(u(t, s))_i \kappa_i \nabla u_i(t, s) n(s) ds \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dx} (D\widehat{V}(u(t, x))_i) \right) (\kappa_i \nabla u_i(t, x)) dx. \end{aligned}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite verschwindet nun wegen der Randbedingung und das zweite kann wegen $\frac{d}{dx} D\widehat{V}(u(t, x))_i = \frac{\partial}{\partial u} D\widehat{V}(u(t, x))_i \frac{\partial}{\partial x} u(t, x)$ und $\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} D\widehat{V}(u(t, x))_i = 0$ für $i \neq j$ umgeschrieben werden zu

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (D\widehat{V}(u(t, x))_i) (\kappa_i \nabla u_i(t, x)) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} \widehat{V}(u(t, x))_i \kappa_i \nabla u_i(t, x)^T \nabla u_i(t, x) dx.$$

Wegen $\kappa_i > 0$, $\nabla u_i(t, x)^T \nabla u_i(t, x) \geq 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial u_i^2} \widehat{V}(u(t, x))_i \geq 0$ ist dieses Integral ≥ 0 , weswegen wir die gewünschte Ungleichung

$$\frac{d}{dt}V(u(t, \cdot)) \leq -\gamma V(u(t, \cdot))$$

mit $\gamma = C_1/C_2$ erhalten.

5.7 Anhang: Der Satz von Gauß

Wir haben eben den Satz von Gauß in einer speziellen Form verwendet. Die Aussage des Satzes in der üblichen Version lautet für $q: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} q(x) dx = \int_{\partial\Omega} q(s)^T n(s) ds, \quad (5.7)$$

wobei $n(s)$ der nach außen zeigende Normalenvektor im Punkt $s \in \partial\Omega$ ist. Für eine zusätzliche skalare Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ folgt aus dem Satz die Identität

$$\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} q(x) + \frac{\partial}{\partial x} f(x) q(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(s) q(s)^T n(s) ds. \quad (5.8)$$

In dieser Form haben wir den Satz oben angewendet mit $q(x) = \kappa_i \nabla u_i(t, x)$ und $f(x) = D\widehat{V}(u(t, x))_i$.

5.8 Literaturhinweise

Dieses Kapitel wurde zusammengestellt auf Basis der Bücher

Gregory F. Lawler, Random Walk and the Heat Equation
American Mathematical Society, 2010

und

Walter A. Strauss, Partielle Differentialgleichungen, Vieweg, 1995.

Abschnitt [5.6](#) folgt der Arbeit

Alan Hastings, Global stability in Lotka-Volterra systems with diffusion, Journal of Mathematical Biology 6(1978), pp. 163–168.

Kapitel 6

Die Wellengleichung

6.1 Herleitung

Die Wellengleichung ist eine weitere wichtige elementare partielle Differentialgleichung. Sie beschreibt die Ausbreitung von Wellen in einem Medium, wobei einige mathematische Vereinfachungen gemacht werden. Zur Erläuterung der Herleitung betrachten wir die vielleicht einfachste physikalische Situation, in der Wellen entstehen: die schwingende Saite. Die Herleitung folgt dabei der am Ende des Kapitels angegebenen Internetquelle.

Wir betrachten dazu ein Stück einer schwingenden Saite wie in Abbildung 6.1 dargestellt. Die Größe $u(t, x)$ bezeichne die Auslenkung der Saite im Punkt x zur Zeit t gegenüber der Ruhelage.

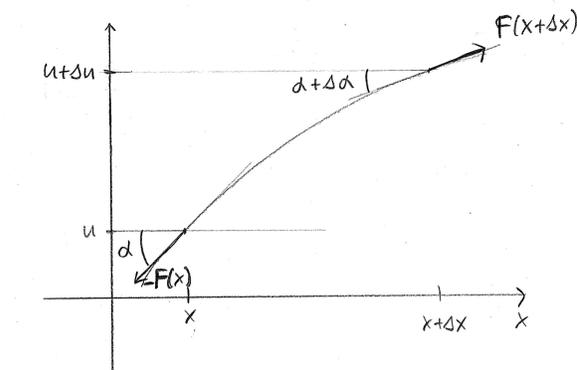


Abbildung 6.1: Skizze zur Herleitung der Wellengleichung

Die Modellierungsannahmen sind nun wie folgt:

- Die einzelnen Massepunkte bewegen sich auf der Saite nur vertikal, also nach oben und unten, aber nicht seitwärts.
- Die tangential in jedem Punkt auf die Saite wirkende Kraft $F(x)$ ist nicht von der Zeit abhängig. Diese Annahme ist näherungsweise erfüllt, wenn die Auslenkung der Saite

nur sehr gering im Vergleich zu ihrer Länge ist, weil dann die zeitliche Längenänderung der Saite die Kraft nur unwesentlich ändert.

- Die Masse des Saitenstücks über dem Abschnitt $[x, x + \Delta x]$ beträgt $\Delta m = A\rho\Delta x$. Dies ist ebenfalls näherungsweise erfüllt, wenn die Auslenkungswinkel klein sind.

Wir betrachten nun einen kleinen Abschnitt der Saite im Intervall $[x, x + \Delta x]$. Auf dieses Stück Saite wirken die Kräfte $F(x + \Delta x)$ und $-F(x)$, die tangential zur Saite selbst angreifen und — gemäß der Skizze — unterschiedliches Vorzeichen besitzen. Diese Kräfte zerlegen wir nun in ihre vertikalen und horizontalen Komponenten. Für $F(x + \Delta x)$ sind diese gegeben durch

$$F_v(x + \Delta x) = F(x + \Delta x) \sin(\alpha + \Delta\alpha) \text{ und } F_h(x + \Delta x) = F(x + \Delta x) \cos(\alpha + \Delta\alpha)$$

sowie

$$F_v(x) = F(x) \sin(\alpha) \text{ und } F_h(x) = F(x) \cos(\alpha).$$

Daraus ergibt sich

$$F_v(x) = F_h(x) \tan \alpha.$$

Da $\tan \alpha$ gerade die Steigung der Tangente an die Funktion u im Punkt x angibt, gilt zudem

$$\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x), \quad \text{also} \quad F_v(x) = F_h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x). \quad (6.1)$$

Da sich die Massepunkte nur vertikal bewegen, müssen sich die horizontalen Kräfte ausgleichen. Es muss also gelten, dass

$$F_h(x) - F_h(x + \Delta x) = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Δx gilt, folgt, dass $F_h(x)$ unabhängig von x ist.

Aus dem zweiten Newton'schen Gesetz " $F = ma$ " können wir nun die vertikale Beschleunigung $\partial^2 u / \partial t^2(t, x)$ als

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = F_v(x) - F_v(x + \Delta x) + O(\Delta m \Delta x) \quad (6.2)$$

angeben. Diese Gleichung gilt nur näherungsweise bis auf den Fehlerterm $O(\Delta m \Delta x)$, weil die Kräfte ja nicht nur auf den Punkt x sondern auf das gesamte Seitenstück von x bis $x + \Delta x$ wirken, links also eigentlich die mittlere Beschleunigung

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \xi) d\xi$$

stehen müsste. Wenn wir nun annehmen, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ Lipschitz-stetig in x ist, ist die Differenz zwischen diesem Integral und dem Wert $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)$ von der Ordnung $O(\Delta x)$, weswegen der Fehler nach Multiplikation mit Δm von der Ordnung $O(\Delta m \Delta x)$ ist.

Einsetzen der Modellierungsannahme $\Delta m = A\rho\Delta x$ in (6.2) und Teilen durch Δx liefert nun

$$A\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F_v(x) - F_v(x + \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Lassen wir nun Δx gegen Null gehen, so erhalten wir im Grenzwert

$$A\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d}{dx} F_v(x).$$

Aus (6.1) und der Tatsache, dass F_h nicht von x abhängt, ergibt sich

$$\frac{d}{dx} F_v(x) = \frac{d}{dx} \left[F_h \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] = F_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x).$$

Zusammen ergibt dies mit $c^2 = \frac{F_h}{A\rho}$ die Gleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (6.3)$$

Dies ist die sogenannte Wellengleichung in \mathbb{R} .

Diese Gleichung zweiter Ordnung kann man in zwei Gleichungen erster Ordnung umschreiben. Wir führen dazu eine weitere Funktion $v : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ein und betrachten die Gleichungen

$$u_t + cu_x = v, \quad v_t - cv_x = 0. \quad (6.4)$$

Erfüllen u und v (6.4) und ist u eine C^2 -Funktion, so gilt

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u}_{=v} = 0.$$

Also erfüllt u die Gleichung (6.3). Mit der gleichen Rechnung sieht man, dass für u mit (6.3) und $v = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u$ auch (6.4) erfüllt ist.

6.2 Lösungen

Mit Hilfe der Darstellung (6.4) kann man nachrechnen, dass für die Wellengleichung mit x aus dem unendlichen Intervall $(-\infty, \infty)$, jede Funktion der Form

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (6.5)$$

mit C^2 -Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung ist. Zum Beweis betrachten wir zunächst nur die rechte Gleichung in (6.4). Wir setzen $h = 2cf' \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $v(t, x) = h(x + ct)$. Dann gilt

$$v_t(t, x) - cv_x(t, x) = ch'(x + ct) - ch'(x + ct) = 0,$$

also löst dieses v die Gleichung. Zudem folgt für $\tilde{u}(t, x) = f(t + cx)$

$$\tilde{u}_t(t, x) + c\tilde{u}_x(t, x) = ch(x + ct)/2c + ch(x + ct)/2c = h(x + ct) = v(t, x).$$

Also lösen $\tilde{u}(t, x) = f(x + ct)$ und $v(t, x) = h(x + ct)$ die Wellengleichung (6.4). Mit einer ähnlichen Rechnung sieht man, dass $w(t, x) = g(x - ct)$ die Gleichung $w_t + cw_x = 0$ löst. Also lösen $u = \tilde{u} + w$ und v ebenfalls die Gleichung (6.4), weswegen alle Funktionen der Form (6.5) Lösungen der Wellengleichung sind. Die Lösungsdarstellung (6.5) besitzt eine

anschauliche Interpretation: Die Funktion f beschreibt die Wellen, die nach links wandern und die Funktion g die Wellen, die sich nach rechts bewegen.

Eine zeitliche Anfangsbedingung für die Wellengleichung wird üblicherweise nicht für u und v sondern für u und die zeitliche Ableitung u_t definiert. Die Bedingungen

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x)$$

legen dann die Funktionen f und g fest. Man rechnet nach, dass für f und g gegeben durch

$$f(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s \Psi(s) ds, \quad g(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(s) ds$$

die Lösung (6.5) gerade die gewünschten Anfangsbedingungen erfüllt. Die daraus resultierende Lösungsformel lautet

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Diese Gleichung ist als *Formel von d'Alembert* bekannt.

6.3 Die mehrdimensionale Wellengleichung

Die mehrdimensionale Verallgemeinerung der Wellengleichung lautet

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \tag{6.6}$$

wobei Δ der Laplace-Operator aus (5.1) ist. In zwei Raumdimensionen ergibt sich die Gleichung ausgeschrieben also zu

$$u_{tt} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Die Einflüsse der verschiedenen Koordinatenrichtungen werden auf der rechten Seite also einfach addiert. Dahinter steckt die Modellierungsannahme, dass die Wellenhöhen in den unterschiedlichen Richtungen sich bei Überlagerung einfach addieren. Mit den Anfangsbedingungen wie oben (jetzt aber in \mathbb{R}^2 mit Variablen x und y)

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y)$$

kann man auch hier die Lösung angeben. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \frac{1}{2\pi c} \iint_{B_{ct}(x,y)} \frac{\psi(s, r)}{(c^2 t^2 - (s-x)^2 - (r-y)^2)^{1/2}} ds dr \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi c} \iint_{B_{ct}(x,y)} \frac{\varphi(s, r)}{(c^2 t^2 - (s-x)^2 - (r-y)^2)^{1/2}} ds dr, \end{aligned}$$

wobei $B_{ct}(x, y)$ den euklidischen Ball mit Radius ct um den Punkt (x, y) im \mathbb{R}^2 bezeichnet.

6.4 Randbedingungen

Bisher haben wir die Wellengleichung immer auf einem in alle Richtungen unbeschränkten Gebiet betrachtet. Das ist aber i.A. nicht realistisch. Begrenzt man das Gebiet in gewisse Richtungen, braucht man allerdings wieder Randbedingungen an den Rändern des Gebiets. Wir betrachten dies exemplarisch im eindimensionalen Fall für das Gebiet $\Omega = (0, \infty)$ und betrachten die Lösung für alle $t \geq 0$ mit $t_0 = 0$ als Anfangszeit. Als Randbedingung am Rand $x = 0$ nehmen wir hier an, dass die Saite fest eingespannt ist. Es gilt also die Dirichlet-Randbedingung $u(t, 0) = 0$ für alle $t \geq 0$. Dieses Einspannen bewirkt, dass ankommende Wellen am Punkt $x = 0$ mit umgekehrter Auslenkung reflektiert werden.

Als Anfangsbedingungen verwenden wir wiederum

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x),$$

jetzt aber nur für alle $x \geq 0$. Damit die Randbedingung erfüllt ist, muss auch $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ gelten. Zur Ermittlung der Lösung setzen wir φ und ψ mittels $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ und $\psi(-x) = -\psi(x)$ auf $(-\infty, 0)$ fort, bezeichnen die solchermaßen erweiterten Funktionen mit $\hat{\varphi}$ und $\hat{\psi}$, und betrachten die zugehörige Lösung \hat{u} der Wellengleichung auf \mathbb{R}

$$\hat{u}(t, x) = \frac{1}{2} [\hat{\varphi}(x + ct) + \hat{\varphi}(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \hat{\psi}(s) ds.$$

Aus der Definition von $\hat{\varphi}$ und $\hat{\psi}$ folgt $\hat{u}(t, 0) = 0$, also ist die Einschränkung von $\hat{u}(t, x)$ auf $(0, \infty)$ die gesuchte Lösung. Wir können die Lösungsformel auch mit den ursprünglichen Funktionen φ und ψ schreiben. Dazu beobachtet man, dass für $x - ct \geq 0$ nur nichtnegative Argumente in der Formel auftreten, für die $\hat{\varphi}$ und φ sowie $\hat{\psi}$ und ψ übereinstimmen. Für $x \geq ct$ gilt also die übliche Formel

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Dies kann man anschaulich so begründen, dass zur Zeit t im Punkt $x \geq ct$ noch keine Welle angekommen ist, die am Rand reflektiert wurde. Für $x < ct$ müssen wir $\hat{\varphi}$ bzw. $\hat{\psi}$ für negative Argumente in der Formel ersetzen. Wir erhalten so

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(s) ds.$$

Dieser Ansatz lässt sich auf beidseitig beschränkte Intervalle erweitern, wird dann aber deutlich komplizierter, siehe Abschnitt 3.2 im Buch von Strauss.

6.5 Literaturhinweise

Dieses Kapitel wurde zusammengestellt auf Basis des Buchs

Walter A. Strauss, *Partielle Differentialgleichungen*, Vieweg, 1995

sowie der Internetseite

www.icp.uni-stuttgart.de/~hilfer/lehre/100-online/skriptum/html_book00/node74.html

Kapitel 7

Die Navier-Stokes-Gleichungen

7.1 Grundlegendes

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind die grundlegende Gleichungen der Strömungsdynamik, welche die Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen (zusammenfassend: Fluiden) beschreibt. Die drei Größen, die wir zur Beschreibung dieser Bewegung benötigen, sind

$$\begin{aligned}\rho(t, x) &\in \mathbb{R} && \text{Massendichte} \\ u(t, x) &\in \mathbb{R}^d && \text{Fluidgeschwindigkeit} \\ p(t, x) &\in \mathbb{R} && \text{Druck.}\end{aligned}$$

Jede dieser Größen ist von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und der Position $x \in \mathbb{R}^d$ abhängig. Hierbei ist die Raumdimension $d = 2$ oder 3 .

Wir überlegen uns nun zuerst, wie sich die Beschleunigung eines Teilchens mit Position $x(t) \in \mathbb{R}^d$, das in der Strömung mit der Geschwindigkeit des Fluids mitschwimmt, formal beschreiben lässt. Für die Geschwindigkeit des Teilchens gilt

$$\dot{x}(t) = u(t, x(t)),$$

weswegen seine Beschleunigung gegeben ist durch

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}u(t, x(t)) = u_t(t, x(t)) + u_x(t, x(t))\dot{x}(t) = u_t(t, x(t)) + u_x(t, x(t))u(t, x(t)),$$

also kurz

$$\ddot{x} = u_t + u_x u.$$

Definieren wir für eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ die *substantielle Ableitung* als

$$\frac{D}{Dt}f := f_t + f_x u,$$

so gilt also

$$\ddot{x} = \frac{D}{Dt}u.$$

Die substantielle Ableitung $\frac{D}{Dt}u$ beschreibt also die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit u aus Sicht eines mitschwimmenden Partikels. Dies gilt analog für beliebige andere Funktionen von t und x . So beschreibt z.B. $\frac{D}{Dt}\rho$ die Änderung des Drucks entlang eines mitschwimmenden Partikels.

7.2 Herleitung der Euler-Gleichungen

Die Euler-Gleichungen beschreiben die Dynamik idealer und isentropischer Fluide — was das ist, werden wir im Verlauf dieses Abschnitts erklären. Sie stellen also einen vereinfachten Spezialfall der Navier-Stokes-Gleichungen dar. Die Modellierung, wie wir sie hier beschreiben, stützt sich auf die Betrachtung von Erhaltungsgrößen (engl. *conserved quantities*), also physikalischen Größen, die über die Zeit konstant bleiben bzw. die wir als Modellierungsannahme als konstant annehmen.

Als erste Erhaltungsgröße betrachten wir die *Masse*. Wir nehmen an, dass die Masse im Inneren jedes Teilvolumens $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$, gegeben durch

$$\int_{\widehat{\Omega}} \rho(t, x) dx$$

sich nur durch Ein- und Ausfließen von Masse durch den Rand $\partial\widehat{\Omega}$ ändern kann. Die Durchflussrate der Masse durch den Rand ist gegeben durch

$$\int_{\partial\widehat{\Omega}} \rho(t, s) n^T(s) u(t, s) ds,$$

wobei $n(s)$ für jeden Punkt $s \in \partial\widehat{\Omega}$ einen äußeren Normalenvektor bezeichnet; $n^T(s)u(t, s)$ gibt also die Durchflussgeschwindigkeit des Randes im Punkt s an. Eine positive Geschwindigkeit bedeutet dabei einen Fluss nach außen, also einen Verlust von Masse. Die Erhaltung der Masse lässt sich dann durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\widehat{\Omega}} \rho(t, x) dx + \int_{\partial\widehat{\Omega}} \rho(t, s) n^T(s) u(t, s) ds = 0$$

beschreiben. Wenden wir nun den Satz von Gauß (5.7) auf das zweite Integral an, so erhalten wir

$$\int_{\partial\widehat{\Omega}} \rho(t, s) n^T(s) u(t, s) ds = \int_{\widehat{\Omega}} \operatorname{div}(\rho(t, x) u(t, x)) dx$$

(dies ist sehr ähnlich zum Advektionsterm in (5.3); dort ist auch die Divergenz $\operatorname{div} f$ definiert). Im ersten Integral können wir (geeignete Regularität des Integranden vorausgesetzt) Ableitung und Integral vertauschen. Fassen wir die beiden Integrale dann zusammen, ergibt sich die Gleichung

$$\int_{\widehat{\Omega}} \rho_t(t, x) + \operatorname{div}(\rho(t, x) u(t, x)) dx = 0.$$

Diese muss auf jedem Gebiet $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ gelten, was nur möglich ist, wenn der Integrand für alle x gleich Null ist (bzw. außerhalb einer Nullmenge). Es folgt also die Gleichung

$$\rho_t(t, x) + \operatorname{div}(\rho(t, x) u(t, x)) = 0. \quad (7.1)$$

Diese sogenannte Kontinuitätsgleichung ist tatsächlich nichts anderes als eine Advektionsgleichung (also (5.3) ohne Diffusion und Reaktion) mit Vektorfeld $f = u$.

Als zweite Erhaltungsgröße betrachten wir nun den Impuls (engl. *momentum*). Impulserhaltung bedeutet für unser System, dass das zweite Newton'sche Gesetz — Kraft ist gleich

Masse mal Beschleunigung — für alle Teilchen im Fluid gilt. Um dies in Formeln zu fassen, müssen wir zunächst die wirkenden Kräfte betrachten. Dabei unterscheidet man zwischen inneren und äußeren Kräften.

Die *inneren Kräfte* wirken auf das Fluid in jedem Teilvolumen $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ über den Rand des Volumens $\partial\widehat{\Omega}$. Die oben erwähnte Annahme, dass wir in diesem Abschnitt nur ideale Fluide betrachten bedeutet nun, dass diese Kräfte immer senkrecht auf dem Rand $\partial\widehat{\Omega}$ stehen. In diesem Fall ist die interne Kraft in jedem Punkt gerade gleich dem Druck mal der negativen Normalen, also $-pn$ (negativ weil die Normale wegzeigt von $\widehat{\Omega}$, der Druck aber in Richtung von $\widehat{\Omega}$ wirkt). Insgesamt ergibt das die Kraft

$$F_{int} = - \int_{\partial\widehat{\Omega}} p(t, s) n(s) ds = - \int_{\widehat{\Omega}} \nabla p(t, x) dx$$

wobei wir für die zweite Gleichung wieder den Satz von Gauß angewendet haben, in dem sich die Divergenz zum Gradienten vereinfacht wegen $p(t, s) \in \mathbb{R}$ (genauer wendet man den Satz von Gauß (5.7) für $i = 1, 2, 3$ an auf $\tilde{p}_i^T n$ mit $\tilde{p}_i = p e_i$ und dem i -ten Einheitsvektor e_i).

Die *äußeren (oder externen) Kräfte* wirken gleichermaßen auf alle Teilchen in $\widehat{\Omega}$. Dies sind z.B. die Gravitation, elektrische oder magnetische Kräfte. Bezeichnen wir die durch die externen Kräfte in jedem Punkt $x \in \widehat{\Omega}$ induzierte Beschleunigung durch $b(t, x) \in \mathbb{R}^d$, so wirkt gemäß dem (hier in Integralform verwendeten) zweiten Newton'schen Gesetz insgesamt die Kraft

$$F_{ext} = \int_{\widehat{\Omega}} \rho(t, x) b(t, x) dx.$$

Innere und äußere Kräfte zusammen bilden also die Gesamtkraft

$$F = F_{int} + F_{ext} = \int_{\widehat{\Omega}} -\nabla p(t, x) + \rho(t, x) b(t, x) dx.$$

Die Impulserhaltung sagt nun, dass für diese Kraft wiederum das zweite Newton'sche Gesetz in Integralform gilt, was

$$F = \int_{\widehat{\Omega}} \rho(t, x) \frac{D}{Dt} u(t, x) dx$$

ergibt. Wie bei der Herleitung von (7.1) können diese beiden Integrale nur dann gleich sein, wenn ihre Integranden (fast) überall übereinstimmen. Daraus folgt die Impulsgleichung

$$\rho(t, x) \frac{D}{Dt} u(t, x) = -\nabla p(t, x) + \rho(t, x) b(t, x). \quad (7.2)$$

Offenbar spielt die Dichte in beiden bisher hergeleiteten Gleichungen eine wichtige Rolle. Aus der Thermodynamik weiß man, dass die Dichte von Druck und Temperatur abhängt, dass sich also ein Zusammenhang

$$\rho = \rho(p, T)$$

herstellen lässt. Die zweite Annahme an das Fluid in diesem Abschnitt — die Isentropie — bedeutet nun, dass die Dichte nicht von der Temperatur abhängt, dass also $\rho = \rho(p)$ gilt. Falls das Fluid zusätzlich *inkompressibel* ist (was für viele Flüssigkeiten näherungsweise

gilt), ist die Dichte unabhängig vom Druck, d.h. $\rho(p)$ ist konstant in p , also $\partial\rho/\partial p = 0$. Die Dichte des fließenden Fluids ist damit in der Fließrichtung konstant und es folgt $D\rho/Dt = 0$. Also folgt

$$\operatorname{div} u = \frac{1}{\rho} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} u \right) = \frac{1}{\rho} (\rho_t + \nabla(\rho \cdot u)) = 0.$$

Wir können (7.1) also durch $\operatorname{div} u = 0$ ersetzen. Zusammen mit (7.2) ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho u_t + \rho u_x u &= -\nabla p + \rho b \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned} \tag{7.3}$$

die sogenannten *inkompressiblen Euler-Gleichungen*, die von Leonhard Euler zuerst aufgestellt wurden. Beachte, dass der Druck durch diese Gleichungen nur bis auf eine additive Konstante c eindeutig bestimmt ist (jede Funktion $p + c$ erfüllt wegen $\nabla(p + c) = \nabla p$ ebenfalls die Gleichungen). Deswegen wird der Druck mit Hilfe der Gleichung

$$\int_{\Omega} p(x) dx = 0$$

normiert.

Das Fluid heißt *kompressibel*, wenn die Dichte mit dem Druck so schnell wächst, dass $\partial\rho/\partial p > 0$ gilt. Dies gilt für Gase. In diesem Fall ist $p \mapsto \rho(p)$ umkehrbar, wir können also die Umkehrfunktion $p = p(\rho)$ sowie die Kettenregel $\nabla p = p_\rho \nabla \rho$ verwenden. Damit erhalten wir aus (7.2) und (7.1) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho u_t + \rho u_x u &= -p_\rho \nabla \rho + \rho b \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \end{aligned} \tag{7.4}$$

die sogenannten *kompressiblen barotopen Euler-Gleichungen*.

Ist das Gebiet Ω beschränkt, muss man noch geeignete Randbedingungen vorgeben. An den Rändern, an denen kein Fluid ein- oder ausfließt, verwendet man die Randbedingung $n^T u = 0$ (Geschwindigkeit in Richtung des Rands ist gleich Null). An den Rändern, an denen Fluid ausfließt, wird keine Randbedingung benötigt, an den Rändern, an denen Fluid einfließt, muss die Dichte und die Einströmgeschwindigkeit vorgegeben werden.

7.3 Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen verzichten auf die wohl restriktivste Modellierungsannahme der Euler-Gleichungen, nämlich die Annahme des idealen Fluids. In der Realität können Teilchen nämlich auch Kräfte aufeinander ausüben, wenn sie tangential aneinander vorbei strömen. In diesem Fall wirken neben $-pn$ noch weitere Kräfte auf jedes Volumengebiet $\hat{\Omega}$.

Wir ersetzen die Annahme $F_{int} = -pn$ durch den folgenden allgemeineren Ansatz

$$F_{int} = (-p\operatorname{Id} + \sigma)n,$$

wobei Id wie üblich die Einheitsmatrix (im \mathbb{R}^d) bezeichnet und σ eine Matrix — der sogenannte Spannungstensor (engl. stress tensor) — mit den folgenden Eigenschaften ist.

- σ hängt nur von den Geschwindigkeitsunterschieden benachbarter Teilchen ab, also von $u_x = \partial u / \partial x$.
- $\sigma(u_x)$ ist invariant unter Rotation, d.h. für jede Rotationsmatrix Q gilt

$$\sigma(Q u_x Q^{-1}) = Q \sigma(u_x) Q^{-1}.$$

- σ ist symmetrisch, also $\sigma^T = \sigma$.

Man kann nachrechnen, dass es für gegebenes u nur eine solche von u_x abhängige Matrix gibt, nämlich

$$\sigma = \lambda(\operatorname{div} u)\operatorname{Id} + 2\mu\varepsilon,$$

mit Lamé-Viskositätskoeffizienten λ und μ und dem sogenannten Verzerrungstensor (engl. strain tensor)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(u_x + u_x^T).$$

Verwenden wir diese allgemeinere Definition in der Herleitung von (7.2), so erhalten wir

$$\rho(t, x) \frac{D}{Dt} u(t, x) = -\nabla p(t, x) + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} u(t, x)) + \mu \Delta u(t, x) + \rho(t, x) b(t, x). \quad (7.5)$$

Beachte, dass hier — im Gegensatz zu (7.2) — über den Term $\nabla (\operatorname{div} u(t, x))$ zweite Ableitungen von u auftreten. Wir brauchen daher für die zusätzlichen Ableitungen auch zusätzliche Randbedingungen. An den festen Wänden $\partial\Omega_W$ verwendet man üblicherweise die *no-slip-condition* $u|_{\partial\Omega_W} = 0$, die besagt, dass sich das Fluid am Rand wegen der Reibung nicht bewegt.

Die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen für *kompresseible* Fluide lauten damit

$$\begin{aligned} \rho u_t + \rho u_x u &= -p_\rho \nabla \rho + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} u) + \mu \Delta u + \rho b \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0 \\ u|_{\partial\Omega_W} &= 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Für *inkompresseible*, homogene Fluide und ohne äußere Kräfte gilt $\operatorname{div} u = 0$, $\rho \equiv \rho_0 > 0$ und $b \equiv 0$. Damit vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned} u_t + u_x u &= -\nabla \hat{p} + \nu \Delta u \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega_W} &= 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

mit skaliertem Druck $\hat{p} = p/\rho_0$ und skaliertem Viskosität $\nu = \mu/\rho_0$.

7.4 Dimensionslose Variante

Führt man für Geschwindigkeit, Position und Zeit die Transformationen

$$u \mapsto \hat{u} = \frac{u}{U}, \quad x \mapsto \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad t \mapsto \hat{t} = \frac{t}{T}$$

mit $T = L/U$ durch, so ändern sich die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen zu der dimensionslosen Variante

$$\begin{aligned}\hat{u}_t + \hat{u}_x \hat{u} + \nabla \hat{p} &= \frac{1}{\text{Re}} \hat{\Delta} \hat{u} \\ \hat{\text{div}} \hat{u} &= 0 \\ \hat{u}|_{\partial\Omega_W} &= 0\end{aligned}\tag{7.8}$$

mit der *Reynolds-Zahl*

$$\text{Re} = \frac{LU}{\nu}.$$

Für Reynolds-Zahlen größer als ca. 1000 bis 5000 (der genaue Wert hängt von den Randbedingungen ab) gibt es unter den Lösungen turbulente Strömungen, d.h. es bilden sich Wirbel und ein sehr kompliziertes mikroskopisches Strömungsverhalten aus.

7.5 Literaturhinweise

Dieses Kapitel wurde zusammengestellt auf Basis von Abschnitt 2.2 des Buchs

Peter Deuffhard und Martin Weiser, Numerische Mathematik 3, De Gruyter, 2011

Die Darstellung in diesem Buch wiederum basiert auf

*A.J. Chorin und J.E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Dynamics
Springer, 1993*

Index

- Advektionsterm, 76, 90
- Anfangsbedingung, 3
- Anfangswert, 3
- Anfangswertproblem, 3
- Anfangszeit, 3
- Antistabilität, 12
- Antisymmetrie, 26
- Attraktor, 32, 53
- autonome Differentialgleichung, 2

- Barbalat-Lemma, 11
- Brown'sche Bewegung, 61, 67, 73
 - geometrische, 67

- charakteristische Funktion, 57
- Chemostat, 29
 - normiert, 30

- Delay-Differentialgleichung, 36
- Dichtefunktion, 57
- Differentialgleichung
 - gewöhnlich, 2
 - partiell, 78
- Differenzgleichung, 7
- Diffusion, 64, 71
- Diffusionsgleichung, 71
- Diffusionskoeffizient, 73
- Dirichlet-Randbedingung, 75, 87
- Dissipation, 46
- Drift, 64

- Eigenwert, 13
- Eindeutigkeitssatz, 3
- Einzugsbereich, 14
- Elementarereignis, 56
- Energieerhaltung, 73
- Epidemien, 35
- Equilibrium, 11
- erstes Integral, 21
- Erwartungswert, 58

- Euler-Gleichungen, 90
- Existenzintervall, 3
- Existenzsatz, 3
- exponentielle Antistabilität, 12
- exponentielle Instabilität, 12
- exponentielle Stabilität, 12
- exponentielles Wachstum, 9

- Fangstrategie, 16
- fast sicher, 57
- Fischfang, 15, 27
- Fluid, 89
 - ideal, 91
- Formel von d'Alembert, 86
- Fourier'sches Gesetz, 73

- Gauß-Verteilung, 58
- Gauß
 - Satz von, 80
- Geburtenrate, 9
- geometrische Brown'sche Bewegung, 67
- Gleichgewicht, 11, 77
- Gompertz-Wachstum, 15
- grafische Darstellung
 - als animierte Kurve, 5
 - als Graph, 5
 - als Kurve, 5

- Hamilton-Funktion, 48
- Hamilton-System, 49
- Hooke'sches Gesetz, 42

- ideales Fluid, 91
- Impuls, 90
- Infektionsstadium, 36
- inkompressibel, 91
- Inkrement des Wiener Prozesses, 61
- instabile Mannigfaltigkeit, 20
- Instabilität, 12
- invariante Menge, 21

- Invarianzprinzip von Lasalle, 25
 Itô-Lemma, 65
 Ito-Integral, 64
- Jacobi-Matrix, 13
- Kapazität eines Lebensraums, 10
 Kartoffelfäule, 35
 kompressibel, 92
 Konstante der Bewegung, 21
 Konvektionsterm, 76
 Koordinatentransformation, 19, 24
 Kozykluseigenschaft, 4
 Kursverlaufsmodelle, 67
- Lagrange-Gleichungen, 43
 verallgemeinert, 47
 Laplace-Operator, 73, 86
 Lasalles Invarianzprinzip, 25
 Latenzstadium, 36
 Legendre-Transformation, 48
 Limesmenge, 31
 Linearisierung, 13
 logistisches Wachstum, 10
 Lösungskurve, 2
 Lösungstrajektorie, 2
 Lotka-Volterra Modell, 19
 Lyapunovfunktion, 25, 79
- Mannigfaltigkeit
 der verträglichen Konfigurationen, 40
 instabile, 20
 stabile, 20
- n-Arten Modell, 26
 Nährlösung, 29
 Navier-Stokes-Gleichungen, 89
 dimensionslos, 94
 Neumann-Randbedingung, 75
 Newton'sches Gesetz, 84, 90
 no-slip-condition, 93
 Normalverteilung, 58
- Omega-Limesmenge, 31
 optimale Fangstrategie, 16
 Optionsbewertung
 risikoneutral, 69
 Ornstein-Uhlenbeck Prozess, 69
- Periodenverdopplung, 32
 periodische Lösungen, 21
 Pfad eines stochastischen Prozesses, 60
 Populationsdynamik, 7
 mit Diffusion, 78
- Randbedingung
 Dirichlet, 75, 87
 Neumann, 75
 Räuber-Beute Modell
 beschränkte Ressourcen, 23
 unbeschränkte Ressourcen, 19
 Raubfischanteil, 27
 Rayleigh'sche Dissipationsfunktion, 46
 Reaktions-Advektions-Diffusionsgleichung, 77
 Reaktionsterm, 77
 Realisierung, 56
 Reynolds-Zahl, 94
 Rücklaufquote, 68
 Ruhelage, 11
- Satz von Gauß, 80
 Schäfers Modell, 15
 Schneiden von Lösungen, 4, 6
 schwache Lösung, 78
 schwingende Saite, 83
 Spannungstensor, 92
 stabile Mannigfaltigkeit, 20
 Stabilität, 12, 79
 Standard-Normalverteilung, 58
 stationäre Gleichung, 77
 Sterberate, 9
 stochastische Differentialgleichung, 55
 Itô, 64
 Stratonovich, 65
 stochastischer Prozess, 60
 Strömungsdynamik, 89
 substantielle Ableitung, 89
- Trajektorie, 2
 Transportgleichung, 77
- Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, 60
- Varianz, 59
 Vektorfeld, 2
 verallgemeinerte Geschwindigkeiten, 41
 verallgemeinerte Koordinaten, 41

- verallgemeinerte Kräfte, 42
- verallgemeinertes Moment, 48
- Verteilungsfunktion, 57
- verträgliche Konfigurationen, 40
- verzögerte Differentialgleichung, 36
- Verzerrungstensor, 93
- Volatilität, 68
- Volterra-Ökologie, 26

- Wärmeenergie, 73
- Wachstum
 - exponentiell, 9
 - Gompertz, 15
 - logistisch, 10
- Wachstumsrate, 9
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 56
- Wahrscheinlichkeitsraum, 56
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, 56
- Wärmeleitungsgleichung, 71
- Wellengleichung, 83
- Weltbevölkerungswachstum, 9
- Wiener Prozess, 61
- Wirkungsfunktion, 43
- Würfelmodell
 - ein Würfel, 56
 - zwei Würfel, 60

- Zufallsvariable, 56
 - diskret, 57
 - Gauß-verteilt, 58
 - kontinuierlich, 57
 - normalverteilt, 58