

# Mathematische Kontrolltheorie II: Nichtlineare Systeme

Lars Grüne  
Mathematisches Institut  
Fakultät für Mathematik und Physik  
Universität Bayreuth  
95440 Bayreuth  
[lars.gruene@uni-bayreuth.de](mailto:lars.gruene@uni-bayreuth.de)  
[www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/](http://www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/)

Vorlesungsskript  
Sommersemester 2006



# Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen einer gleichnamigen Vorlesung entstanden, die ich als zweiten Teil eines zweisemestrigen Zyklus im Sommersemester 2006 an der Universität Bayreuth gehalten habe.

Im Gegensatz zum ersten Teil dieses Skriptes wurde der Text zumeist auf Basis von Originalarbeiten und eigenen Ausarbeitungen erstellt, teilweise wurde allerdings auch auf Darstellungen aus dem Lehrbuchs [15] zurück gegriffen. Herzlich bedanken möchte ich mich bei allen aufmerksamen StudentInnen, die mich auf Fehler und Ungenauigkeiten hingewiesen haben.

Elektronische Versionen beider Teile dieses Skripts sowie die zugehörigen Übungsaufgaben finden sich im WWW auf der Seite <http://www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/> unter dem Link “Lehrveranstaltungen”.

Bayreuth, August 2006

LARS GRÜNE



# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Definition . . . . .	1
1.2 Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz . . . . .	2
<b>2 Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungen</b>	<b>5</b>
2.1 Vergleichsfunktionen . . . . .	6
2.2 Stabilität . . . . .	7
2.3 Beispiele . . . . .	8
2.4 Ljapunov-Funktionen . . . . .	10
2.5 Ljapunov-Funktion $\Rightarrow$ Asymptotische Stabilität . . . . .	11
2.6 Asymptotische Stabilität $\Rightarrow$ Ljapunov-Funktion . . . . .	14
<b>3 Asymptotische Kontrollierbarkeit. . .</b>	<b>21</b>
3.1 Definition . . . . .	21
3.2 Brocketts Bedingung . . . . .	23
3.3 Beispiel: Artsteins Kreise . . . . .	27
<b>4 Linearisierung</b>	<b>31</b>
4.1 Die linearisierte Differentialgleichung . . . . .	31
4.2 Approximation der Lösungstrajektorien . . . . .	32
4.3 Stabilität und Linearisierung . . . . .	33
4.4 Feedback-Stabilisierung mittels Linearisierung . . . . .	35
4.5 Tracking Kontrolle . . . . .	37
<b>5 Kontroll-Ljapunov-Funktionen</b>	<b>41</b>
5.1 Definition und alternative Darstellungen . . . . .	41
5.2 Ljapunov-Funktion $\Leftrightarrow$ asymptotische Kontrollierbarkeit . . . . .	45

<b>6</b>	<b>Konstruktive nichtlineare Methoden</b>	<b>51</b>
6.1	Sontags Universelle Formel . . . . .	51
6.2	Backstepping . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Stabilisierung mit Abtastfeedback</b>	<b>61</b>
7.1	Abtast-Lösungen . . . . .	61
7.2	Stabilität und Abtastung . . . . .	62
7.3	Abtastung und Ljapunov-Funktionen . . . . .	63
7.4	Existenz von Abtast-Ljapunov-Funktionen . . . . .	65
7.5	Schematische Übersicht der Stabilitäts-Ergebnisse . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Stabilität gestörter Systeme</b>	<b>69</b>
8.1	Input-to-state Stabilität . . . . .	69
8.2	Ein ISS-Anwendungsbeispiel: Stabilität von Kaskaden . . . . .	71
8.3	Gestörte Kontrollsysteme . . . . .	74
8.4	Praktische Stabilität . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Stabilität unter Digitalisierung</b>	<b>79</b>
9.1	Konsistenz . . . . .	79
9.2	Einbettung . . . . .	81
9.3	Stabilität unter Digitalisierung . . . . .	85
<b>10</b>	<b>Digitale Regelung mittels approximativer Systeme</b>	<b>91</b>
10.1	Ein einfaches numerisches Verfahren . . . . .	91
10.2	Approximative Systeme . . . . .	92
10.3	Beispiele für Stabilitätsverlust . . . . .	93
10.4	Einbettung und Robustheit . . . . .	96
10.5	Stabilität approximationsbasierter Feedbacks . . . . .	99
10.6	Hinreichende Bedingungen für ISS . . . . .	100
<b>11</b>	<b>Stabilität unter Messfehlern</b>	<b>107</b>
11.1	Messfehler . . . . .	107
11.2	Stabilität unter Messfehlern . . . . .	108
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>110</b>
	<b>Index</b>	<b>113</b>

# Kapitel 1

## Einführung

Diese Vorlesung ist eine Fortsetzung des ersten Teils “Mathematische Kontrolltheorie I: Lineare Systeme” ([www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/kontrolltheorie0506/](http://www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/kontrolltheorie0506/)). Wie im ersten Teil werden wir uns mit kontinuierlichen Kontrollsystemen beschäftigen. Statt der im ersten Teil betrachteten linearen Dynamik werden wir nun allerdings allgemeine nichtlineare Systeme betrachten. Wir werden die zu betrachtende Systemklasse zunächst formal definieren.

### 1.1 Definition

**Definition 1.1** (i) Ein *Kontrollsystem* in *kontinuierlicher Zeit*  $t \in \mathbb{R}$  mit *Zustand*  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist gegeben durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1.1)$$

wobei  $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein *parameterabhängiges stetiges Vektorfeld* ist.

(ii) Die Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  heißt *Kontrollwertebereich*, und definiert die Werte, die  $u(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$  annehmen darf.

(iii) Mit  $\mathcal{U}$  bezeichnen wir den *Raum der zulässigen Kontrollfunktionen*, also

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U \mid u \text{ zulässig}\}$$

Welche Klassen von Funktionen wir als „zulässig“ definieren, werden wir im folgenden Abschnitt festlegen.  $\square$

**Bemerkung 1.2** Statt „ $\frac{d}{dt}x(t)$ “ werden wir meist kurz „ $\dot{x}(t)$ “ schreiben.  $\square$

Wir wollen diese Definition mit einem klassischen mechanischen Beispiel illustrieren.

**Beispiel 1.3** Wir betrachten ein auf einem Wagen befestigtes umgedrehtes starres Pendel, vgl. Abb. 1.1.

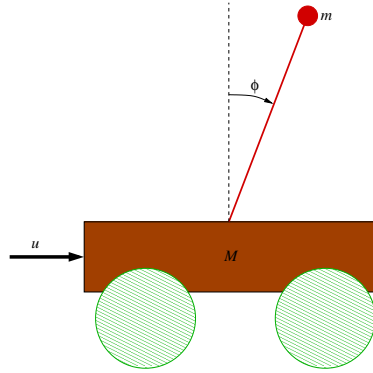


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Pendels auf einem Wagen

Die Kontrolle  $u$  ist hierbei die Beschleunigung des Wagens. Mittels physikalischer Gesetze kann ein Differentialgleichungsmodell<sup>1</sup> hergeleitet werden.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + g \sin x_1(t) + u(t) \cos x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= u \end{aligned} \right\} =: f(x(t), u(t)) \quad (1.2)$$

Hierbei besteht der Zustandsvektor  $x \in \mathbb{R}^4$  aus 4 Komponenten:  $x_1$  entspricht dem Winkel  $\phi$  des Pendels (vg. Abb. 1.1), der entgegen dem Uhrzeigersinn zunimmt, wobei  $x_1 = 0$  dem aufgerichteten Pendel entspricht.  $x_2$  ist die Winkelgeschwindigkeit,  $x_3$  die Position des Wagens und  $x_4$  dessen Geschwindigkeit. Die Konstante  $k$  beschreibt die Reibung des Pendels (je größer  $k$  desto mehr Reibung) und die Konstante  $g \approx 9.81m/s^2$  ist die Erdbeschleunigung. Herleitungen der Pendelgleichung ohne Wagen finden sich in B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997 (1. Auflage) bzw. 2004 (2. Auflage), [1, Beispiel 1.3.3], oder in dem Skript “Modellierung mit Differentialgleichungen” [6, Abschnitt 3.1.4].  $\square$

## 1.2 Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Die Schreibweise der Kontrollfunktion  $u(t)$  in (1.1) abhängig von der Zeit  $t$  soll betonen, dass es sich bei  $u \in U$  um einen Parameter handelt, der sich mit der Zeit verändern kann, um ein gewünschtes Verhalten der Lösungen zu erzielen. Dies bedeutet aber nicht, dass die Kontrollfunktionen  $u(t)$  explizit als Funktion von  $t$  berechnet werden muss. Tatsächlich werden wir uns in weiten Teilen dieser Vorlesung mit Kontrollfunktionen der Form  $u(t) = F(x(t))$  (oder Verallgemeinerungen dieser Form) beschäftigen, d.h. der aktuelle Kontrollparameter  $u(t)$  hängt über eine *Feedback-* (auch *Rückführungs-* oder *Rückkopplungs-*) *Funktion*  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  vom aktuellen Zustand  $x(t)$  ab. In diesem Fall erhält man nach Einsetzen

<sup>1</sup>Das Modell (1.2) ist etwas vereinfacht: es wurde angenommen, dass das Pendel so leicht ist, dass sein Einfluss auf die Bewegung des Wagens vernachlässigbar ist. Zudem wurde eine Reihe von Konstanten so gewählt, dass sie sich gegeneinander aufheben.



von  $F$  in  $f$  eine unkontrollierte gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t))) =: g(x(t)),$$

für die die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung — unter geeigneten Voraussetzungen an  $g$  — aus den üblichen Sätzen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen abgeleitet werden kann.

Betrachten wir zeitabhängige Kontrollfunktionen  $u(t)$ , so müssen wir zunächst klären, welche Regularitätseigenschaften diese besitzen sollen. Hierber spielen zwei Kriterien eine Rolle: Zum einen wollen wir eine hinreichend große Menge an Funktionen zulassen, zum anderen wollen wir eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die Lösungen von (1.1) formulieren.

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass z.B. die Wahl  $\mathcal{U} = C(\mathbb{R}, U)$  (also die Menge aller stetigen Funktionen mit Werten in  $U$ ), zusammen mit der Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  in  $x$  einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz erlaubt. Stetige Kontrollfunktionen sind allerdings für viele Anwendungen zu einschränkend, z.B. in der optimalen Steuerung, wo man bereits für sehr einfache Probleme nachweisen kann, dass optimale Steuerstrategien unstetig in  $t$  sind. Zudem ist es sowohl für die theoretische als auch für die numerische Behandlung von Kontrollsystemen sehr nützlich, wenn zu je zwei Kontrollfunktionen  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  auch die durch die *Konkatenation zur Zeit*  $\tau \in \mathbb{R}$

$$u_1 \&_{\tau} u_2(t) := \begin{cases} u_1(t), & t < \tau \\ u_2(t), & t \geq \tau \end{cases}$$

gegebene Funktion wieder in  $\mathcal{U}$  liegt, was für den Raum der stetigen Funktionen ebenfalls nicht zutrifft.

Im ersten Teil dieser Vorlesung haben wir deshalb den Raum der stückweise und rechtsseitig stetigen Funktionen verwendet, der für unsere Zwecke ausreichend war.

Hier werden wir eine noch größere Klasse von Kontrollfunktionen zulassen, die zwar am Anfang etwas formalen Aufwand bei der Einführung verlangt, später aber einige Vorteile (und auch technische Vereinfachungen) bringen wird. Wir erinnern dazu an die folgende Definition.

**Definition 1.4** Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall.

(i) Eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *stückweise konstant*, falls eine Zerlegung von  $I$  in endlich viele Teilintervalle  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  existiert, so dass  $g$  auf  $I_j$  konstant ist für alle  $j = 1, \dots, n$ .

(ii) Eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt (*Lebesgue-*) *messbar*, falls eine Folge von stückweise konstanten Funktionen  $g_i : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , existiert mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) = g(x)$  für fast alle<sup>2</sup>  $x \in I$ .

(iii) Eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt (*Lebesgue-*) *messbar*, falls für jedes abgeschlossene Teilintervall  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  die Einschränkung  $g|_I$  messbar im Sinne von (ii) ist.  $\square$

<sup>2</sup>d.h. für alle  $x$  aus einer Menge  $J \subseteq I$  mit der Eigenschaft, dass  $I \setminus J$  eine Lebesgue-Nullmenge ist

Der folgende Satz zeigt, dass die Wahl messbarer Kontrollfunktionen einen sinnvollen Lösungsbegriff für (1.1) liefert.

**Satz 1.5 (Satz von Carathéodory)** Betrachte ein Kontrollsystem mit folgenden Eigenschaften:

i) Der Raum der Kontrollfunktionen ist gegeben durch

$$\mathcal{U} = L_\infty(\mathbb{R}, U) := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U \mid u \text{ ist messbar und essentiell beschränkt}^3\}.$$

ii) Das Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig.

iii) Für jedes  $R > 0$  existiert eine Konstante  $L_R > 0$ , so dass die Abschätzung

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq L_R \|x_1 - x_2\|$$

für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  und alle  $u \in U$  mit  $\|x_1\|, \|x_2\|, \|u\| \leq R$  erfüllt ist.

Dann gibt es für jeden Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und jede Kontrollfunktion  $u \in \mathcal{U}$  ein (maximales) offenes Intervall  $I$  mit  $0 \in I$  und genau eine absolut stetige Funktion  $x(t)$ , die die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

für alle  $t \in I$  erfüllt.

**Definition 1.6** Wie bezeichnen die eindeutige Funktion  $x(t)$  aus Satz 1.5 mit  $\varphi(t, x_0, u)$  und nennen sie die *Lösung* von (1.1) zum *Anfangswert*  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und zur *Kontrollfunktion*  $u \in \mathcal{U}$ . □

Die folgende Beobachtung rechtfertigt diese Definition: Da  $\varphi(t, x_0, u)$  absolut stetig ist, ist diese Funktion für fast alle  $t \in I$  nach  $t$  differenzierbar. Insbesondere folgt also aus dem Satz 1.5, dass  $\varphi(t, x_0, u)$  die Differentialgleichung (1.1) für fast alle  $t \in I$  erfüllt, d.h. es gilt

$$\dot{\varphi}(t, x_0, u) = f(\varphi(t, x_0, u), u(t))$$

für fast alle  $t \in I$ .

**Bemerkung 1.7** Im Weiteren nehmen wir stets an, dass die Voraussetzungen (i)–(iii) von Satz 1.5 erfüllt sind, werden dies aber nur in wichtigen Sätzen explizit formulieren. □

Der Beweis von Satz 1.5 (auf den wir aus Zeitgründen nicht näher eingehen) verläuft ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Satzes für stetige gewöhnliche Differentialgleichungen, d.h. mit dem Banach'schen Fixpunktsatz angewendet auf einen passenden Funktionenraum. Er findet sich zusammen mit einer Einführung in die zugrundeliegende Lebesgue-Maßtheorie z.B. in dem Buch *Mathematical Control Theory* von E.D. Sontag [15, Anhang C].

<sup>3</sup>d.h. beschränkt außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge

## Kapitel 2

# Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungen

Die Analyse von Stabilitätseigenschaften nichtlinearer Differentialgleichungen und die Berechnung von Feedback-Kontrollen  $u(t) = F(x(t))$ , die ein nichtlineares Kontrollsystem stabilisieren, sind grundlegende Probleme der nichtlinearen Kontrolltheorie. Zum einen ist die Stabilität eine wesentliche Eigenschaft, auf die man in praktischen Anwendungen i.A. nicht verzichten kann. Zum anderen ist das Stabilisierungsproblem ein “Prototypproblem” der nichtlinearen Kontrolltheorie, was bedeutet, dass Techniken, die hierfür entwickelt werden, auf andere Probleme verallgemeinert werden können.

Wir betrachten in diesem Kapitel gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (2.1)$$

d.h. Systeme ohne Kontrolle. Wir nehmen durchgehend an, dass  $f$  die Bedingungen von Satz 1.5 erfüllt.

Die klassischen Definitionen von (asymptotischer) Stabilität verwenden üblicherweise recht unhandliche  $\varepsilon$ - $\delta$  und  $\varepsilon$ - $T$  Relationen. Aus dem ersten Teil der Vorlesung ist für lineare autonome Differentialgleichungen der Form  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  bekannt<sup>1</sup>, dass asymptotische Stabilität des Nullpunktes äquivalent zu exponentieller Stabilität ist, d.h., es gibt Konstanten  $C, \sigma > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und alle  $t > 0$  die Ungleichung

$$\|\varphi(t, x)\| \leq Ce^{-\sigma t} \|x\| \quad (2.2)$$

für die Lösungen  $\varphi$  der Differentialgleichung gilt. Wir werden später an Beispielen sehen, dass dies für allgemeine nichtlineare Gleichungen des Typs (2.1) nicht gilt. Da die Charakterisierung von Stabilität über Ungleichungen des Typs (2.2) aber zum einen sehr anschaulich und zum anderen für viele Beweise und Rechnungen praktisch ist, werden wir hier eine ähnliche Technik für allgemeine nichtlineare Systeme verwenden. Dazu benötigen wir die sogenannten *Vergleichsfunktionen*.

---

<sup>1</sup>siehe Satz 3.5 im Skript „Mathematische Kontrolltheorie I: Lineare Systeme“

## 2.1 Vergleichsfunktionen

Das Konzept der Vergleichsfunktionen wurde im Zusammenhang der Stabilitätsanalyse von W. Hahn in den Büchern „Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov“ [8] und „Stability of Motion“ [9] eingeführt. Die Idee dieser Funktionen geht dabei auf frühere Arbeiten von Müller und Kamke in den 1920er und 1930er Jahren zurück. In den 1990er Jahren wurde diese Methode zur Formulierung nichtlinearer Stabilitätseigenschaften durch die Arbeiten von E.D. Sontag wiederbelebt und hat sich in der nichtlinearen Kontrolltheorie inzwischen als Standard–Herangehensweise etabliert.

Die folgende Definition beschreibt einige Klassen dieser Funktionen.

**Definition 2.1** Wir definieren die folgenden Klassen von Funktionen:

$$\mathcal{K} := \{\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \alpha \text{ ist stetig und streng monoton wachsend mit } \alpha(0) = 0\}$$

$$\mathcal{K}_\infty := \{\alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha \text{ ist unbeschränkt}\}$$

$$\mathcal{L} := \{\gamma : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \gamma \text{ ist stetig und streng monoton fallend mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0\}$$

$$\mathcal{KL} := \{\beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \text{stetig, } \beta(\cdot, t^*) \in \mathcal{K}, \beta(r^*, \cdot) \in \mathcal{L} \text{ für alle } r^* > 0, t^* \geq 0\}$$

□

Die folgende Grafik veranschaulicht eine typische  $\mathcal{KL}$  Funktion. Beachte, dass im Allgemeinen  $\beta(r^*, 0) \neq r^*$  gilt (in der Grafik gilt  $\beta(r^*, 0) > r^*$ , was in unseren Anwendungen üblicherweise gelten wird; die Definition erlaubt aber auch „<“).

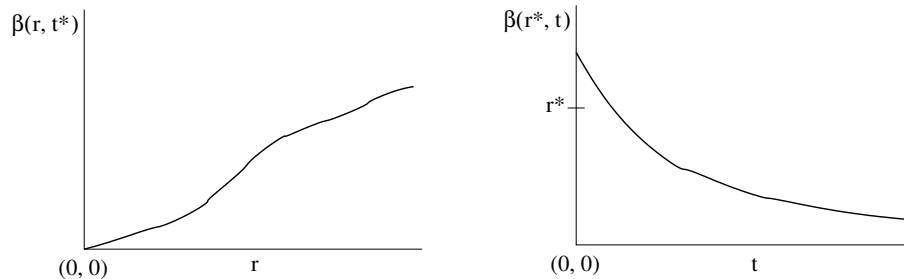


Abbildung 2.1:  $\mathcal{KL}$  Funktion

Wir werden im Laufe der Vorlesung einige Eigenschaften dieser Vergleichsfunktionen benötigen; die meisten werden wir an den entsprechenden Stellen formulieren und beweisen. Einige einfache Eigenschaften werden wir bereits jetzt formulieren.

**Lemma 2.2** (i) Es gilt  $\mathcal{K}_\infty = \text{Hom}(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$  (= Menge der Homöomorphismen von  $\mathbb{R}_0^+$  in sich selbst). Insbesondere existiert also zu jedem  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$  die Umkehrfunktion  $\alpha^{-1}$  und es gilt  $\alpha^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$ .

(ii) Sei  $\alpha \in \mathcal{K}$  und  $\alpha^+ := \sup_{r \geq 0} \alpha(r)$ . Dann existiert eine Umkehrfunktion  $\alpha^{-1} : [0, \alpha^+) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\alpha^{-1}(\alpha(r)) = r$  für alle  $r \geq 0$  und  $\alpha(\alpha^{-1}(r)) = r$  für alle  $r \in [0, \alpha^+)$ .

(iii) Für alle Konstanten  $C, \sigma > 0$  ist die Funktion  $\beta(r, t) = Ce^{-\sigma t}r$  aus  $\mathcal{KL}$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe.

## 2.2 Stabilität

Wir werden nun die Vergleichsfunktionen verwenden, um Stabilitätseigenschaften der Differentialgleichung (2.1) zu definieren. Man kann Stabilität für Lösungskurven, Mengen von Lösungskurven oder sogar für allgemeine Mengen<sup>2</sup> definieren. Wir werden hier zunächst die Stabilität von *Gleichgewichten* betrachten.

**Definition 2.3** Ein Punkt  $x^* \in \mathbb{R}^n$  heißt *Gleichgewicht* (auch *Ruhelage*, *Fixpunkt* oder *Equilibrium*) der Gleichung (2.1), falls  $f(x^*) = 0$  gilt, oder, äquivalent, falls die zugehörige Lösung  $\varphi(t, x^*) = x^*$  für alle  $t > 0$  erfüllt.  $\square$

Die Äquivalenz dieser zwei Bedingungen folgt aus der Tatsache, dass die Ableitung konstanter Funktionen gleich Null ist.

**Bemerkung 2.4** Wir werden üblicherweise  $x^* = 0$  annehmen, da dies die Schreibweise vereinfacht. Falls  $x^* \neq 0$  ist, können wir einfach zum transformierten System  $\tilde{f}(x) = f(x + x^*)$  übergehen. Dies verschiebt die Lösungskurven im  $\mathbb{R}^n$ , ändert aber nichts an ihrem Verlauf.  $\square$

Nun können wir unsere Stabilitätskonzepte definieren.

**Definition 2.5** Sei  $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$  ein Gleichgewicht der Differentialgleichung (2.1).

(i)  $x^*$  heißt *stabil*, falls eine Umgebung  $N$  von  $x^*$  und eine Funktion  $\alpha \in \mathcal{K}$  existieren mit

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \alpha(\|x\|) \text{ für alle } x \in N, t \geq 0.$$

(ii)  $x^*$  heißt *instabil*, falls (i) nicht gilt.

(iii)  $x^*$  heißt (*lokal*) *asymptotisch stabil*, falls eine Umgebung  $N$  von  $x^*$  und eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existieren, so dass

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \beta(\|x\|, t) \text{ für alle } x \in N, t \geq 0.$$

(iv)  $x^*$  heißt *global asymptotisch stabil*, falls (iii) mit  $N = \mathbb{R}^n$  gilt.

(v)  $x^*$  heißt (*lokal* bzw. *global*) *exponentiell stabil*, falls Konstanten  $C, \sigma > 0$  existieren, so dass (iii) (bzw. (iv)) mit  $\beta(r, t) \leq Ce^{-\sigma t}r$  gilt.  $\square$

<sup>2</sup>siehe z.B. "Numerik dynamischer Systeme", [www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/numdyn0506/](http://www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/numdyn0506/)

**Bemerkung 2.6** (i) In dieser Definition haben wir stets implizit vorausgesetzt, dass die betrachteten Lösungen  $\varphi(t, x)$  für alle  $t \geq 0$  existieren.

(ii) Beachte, dass die Stabilität aus (i) ebenfalls eine lokale Definition ist, die man — analog zu (iv) — auch global definieren könnte. Da wir uns in dieser Vorlesung vorwiegend mit asymptotischer Stabilität beschäftigen werden (also mit Teil (iii) und (iv)), wollen wir hierauf nicht näher eingehen.  $\square$

## 2.3 Beispiele

Wir wollen die Stabilitätsbegriffe an zwei Beispielen erläutern. Als erstes Beispiel betrachten wir unser Pendelmodell (1.2), bei dem wir  $u = 0$  setzen und nur die ersten zwei Komponenten  $x_1$  und  $x_2$ , also die Winkelposition und die Winkelgeschwindigkeit des Pendels betrachten. Setzen wir zur Vereinfachung der Gleichungen<sup>3</sup>  $g = 1$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + \sin x_1(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Die Punkte  $(x_1^*, x_2^*) = (\pi, 0)$  und  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  sind zwei Gleichgewichte dieser Gleichung, die gerade das ruhig nach unten hängende und das (in der Praxis schwer zu realisierende) ruhig aufrecht stehende Pendel beschreiben. Für das herunterhängende Gleichgewicht  $(x_1^*, x_2^*) = (\pi, 0)$  führen wir die Transformation aus Bemerkung 2.4 durch. Wir setzen  $\tilde{x}_1 = x_1 - \pi$ , damit ändern sich die Gleichungen wegen  $\sin(\tilde{x}_1 + \pi) = -\sin \tilde{x}_1$  zu

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) - \sin \tilde{x}_1(t).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Die Gleichungen beschreiben dieselben Bewegungen wie zuvor, allerdings entspricht  $\tilde{x}_1 = \pi$  nun dem aufrecht stehenden Pendel und  $\tilde{x}_1 = 0$  dem senkrecht nach unten hängenden Pendel.

Betrachten wir nun die physikalische Interpretation der Gleichungen (2.4) bzw. (2.3): Was würden wir erwarten, wenn sich das Pendel in einer der beiden Ruhelagen befindet und wir es durch leichtes Anstoßen aus dem Gleichgewicht bringen? Im Fall des herabhängenden Pendels, d.h. für  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  in (2.4), würden wir sicherlich erwarten, dass das Pendel in der Nähe der Ruhelage schwingt, sich aber nicht weiter von ihm entfernt. Falls Reibung auf das Pendel wirkt (d.h. falls  $k > 0$  ist) würden wir sogar erwarten, dass das Pendel sich wieder der Ruhelage nähert. (In der Praxis würde man sogar erwarten, dass das Pendel nach einiger Zeit wieder ruhig nach unten hängt; dieser Effekt wird aber durch die Haftreibung bewirkt, die wir in unserem Modell vernachlässigt haben.)

Im Fall des aufrecht stehenden Pendels, d.h. für  $(\tilde{x}_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  in (2.3), wird man nicht erwarten, dass das Pendel nach einem Stoß in der Nähe der Ruhelage bleibt, sondern dass es umfällt, um dann, je nachdem ob Reibung vorhanden ist oder nicht, entweder nach einiger Zeit gegen die hängenden Ruhelage zu konvergieren, oder für alle zukünftigen Zeiten mit gleicher Stärke weiter zu pendeln.

<sup>3</sup>Hier kommt es nur auf das prinzipielle Verhalten des Modells und nicht auf eine genaue quantitative Analyse an.

Die folgenden Grafiken stellen Lösungen der linearen Gleichungen (2.4) und (2.3) in der  $(x_1, x_2)$  bzw.  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ -Ebene dar. Das „Anstoßen“ des Pendels modellieren wir dadurch, dass wir Anfangswerte  $x \in \mathbb{R}^2$  wählen, die außerhalb des Gleichgewichts  $x^* = (0, 0)^T$  liegen, nämlich  $x = (1, 0)^T, \dots, (4, 0)^T$  für System (2.4) und  $x = (0.1, 0)^T, \dots, (0.4, 0)^T$  für System (2.3).

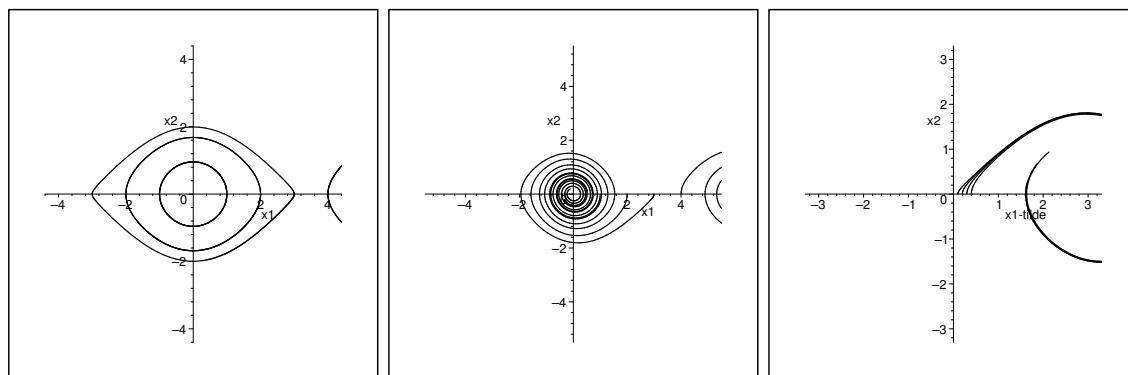


Abbildung 2.2: Lösung von (2.4) für  $k = 0$  und  $k = 0.1$  sowie Lösung von (2.3) für  $k = 0.1$  (von links nach rechts)

Die Simulationen von (2.4) für die  $x = (1, 0)^T$ ,  $(2, 0)$  und  $(3, 0)$  zeigen gerade das oben diskutierte Verhalten: Für  $k > 0$  konvergiert die Lösung gegen das Gleichgewicht, für  $k = 0$  beschreibt das Pendel eine periodische Bewegung um das Gleichgewicht, die Entfernung vom Gleichgewicht bleibt dabei aber proportional zur Anfangsentfernung. Für den weiter entfernten Anfangspunkt  $x = (4, 0)^T$  ändert sich das Bild: Hier entfernt sich die Lösung schneller vom Gleichgewicht und konvergiert auch nicht wieder dagegen. Tatsächlich entspricht der hier sichtbare Effekt dem Überschlagen des Pendels; während das Pendel mit Reibung in der Praxis nach einiger Zeit trotzdem gegen die herabhängende Ruhelage konvergieren würde ist dies in der hier verwendeten mathematischen Modellierung nicht der Fall. Tatsächlich konvergiert das Pendel hier gegen einen anderen Gleichgewichtspunkt.

Das Verhalten von (2.3) ist — wie man ebenfalls aus der physikalischen Anschauung erwarten würde — ganz anders. Hier entfernen sich die Lösungen sofort vom Gleichgewichtspunkt, das Pendel fällt um.

Im Sinne unserer Definition 2.5 haben wir hier also die drei Fälle Stabilität, lokale asymptotische Stabilität und Instabilität vorliegen.

Unser zweites Modell ist ein Beispiel dafür, dass asymptotische Stabilität für nichtlineare Systeme nicht exponentiell sein muss. Betrachte die einfache eindimensionale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3.$$

Diese Gleichung ist asymptotisch aber nicht exponentiell stabil (Übungsaufgabe).

## 2.4 Ljapunov–Funktionen

Wir wollen nun ein wesentliches Hilfsmittel bei der Betrachtung von Stabilitätseigenschaften einführen, die sogenannte *Ljapunov–Funktion*. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass für eine  $\mathcal{KL}$ –Funktion im Allgemeinen  $\beta(r, 0) \neq r$  ist, typischerweise gilt  $\beta(r, 0) > r$ . Daraus folgt, dass bei asymptotisch stabilen Systemen die Norm  $\|\varphi(t, x)\|$  nicht monoton fallen muss. Diese Monotonie zu fordern, wäre für die allermeisten Systeme auch viel zu einschränkend. Trotzdem wäre dies für viele Anwendungen — insbesondere zur Überprüfung von asymptotischer Stabilität — eine sehr praktische Eigenschaft. Die Idee der Ljapunov–Funktion liegt nun darin, den Abstand vom Nullpunkt  $\|\varphi(t, x)\|$  durch eine verallgemeinerte Abstandsfunktion  $V$  zu ersetzen, für die  $V(\varphi(t, x))$  dann streng monoton fällt. Nimmt man darüberhinaus an, dass diese Abstandsfunktion  $V$  differenzierbar ist und “schnell genug” fällt, so kann man die strenge Monotonie mittels

$$0 > \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(\varphi(t, x)) = DV(x) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t, x) = DV(x)f(x)$$

ausdrücken. Dies führt zur folgenden Definition.

**Definition 2.7** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) mit  $f(0) = 0$  und eine offene Umgebung  $O$  von 0. Eine stetige Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $O \setminus \{0\}$  stetig differenzierbar ist, heißt *lokale Ljapunov–Funktion*, falls Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  und eine stetige Funktion  $W : O \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass die Ungleichungen

$$W(x) > 0, \tag{2.5}$$

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{2.6}$$

und

$$DV(x)f(x) \leq -W(x) \tag{2.7}$$

für alle  $x \in O \setminus \{0\}$  gelten.

Die Funktion  $V$  heißt *globale Ljapunov–Funktion*, falls  $V$  und  $W$  diese Bedingungen für  $O = \mathbb{R}^n$  erfüllen.

Das Paar  $(V, W)$  wird dabei als *Ljapunov–Paar* bezeichnet.  $\square$

Das folgende Lemma zeigt eine äquivalente Formulierung von Ungleichung (2.7), die für Beweise geeigneter, aber etwas schwieriger nachzuprüfen ist.

**Lemma 2.8** Für jedes Ljapunov–Paar  $(V, W)$  und jede abgeschlossene Teilmenge  $D \subseteq O$  existiert eine global Lipschitz–stetige Funktion  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , so dass  $(V, g(V))$  ebenfalls ein Ljapunov–Paar ist.

**Beweis:** Sei  $W$  gegeben und sei  $C := \sup_{x \in O} \alpha_2(\|x\|) \leq \infty$ . Für  $r \in [0, C)$  (bzw.  $r > 0$ , falls  $C = \infty$ ) setzen wir

$$\tilde{g}(r) := \min\{W(y) \mid y \in D, \alpha_1(\|y\|) \leq r \leq \alpha_2(\|y\|)\}.$$



Beachte, dass dieses Minimum tatsächlich existiert, da hier eine stetige Funktion über eine kompakte Menge minimiert wird. Man rechnet leicht nach, dass  $\tilde{g}$  die Ungleichungen  $\tilde{g}(r) > 0$  für  $r > 0$  und  $\tilde{g}(V(x)) \leq W(x)$  erfüllt. Die einzige Bedingung, die  $\tilde{g}$  nicht notwendigerweise erfüllt ist die Lipschitz-Stetigkeit. Das eigentliche  $g$  definieren wir daher als

$$g(r) = \inf_{s \geq 0} \{\tilde{g}(s) + |r - s|\}.$$

Aus der Definition folgt sofort  $g(r) > 0$  falls  $\tilde{g}(r) > 0$  und  $g(r) \leq \tilde{g}(r)$  für alle  $r \geq 0$ , weswegen  $(V, g(V))$  tatsächlich ein Ljapunov-Paar ist. Zu jedem  $r \geq 0$  und jedem  $\varepsilon > 0$  können wir nun  $s_\varepsilon(r)$  wählen, so dass das Infimum bis auf  $\varepsilon$  angenommen wird. Damit folgt  
Zudem gilt

$$\begin{aligned} g(r_1) - g(r_2) &\leq \inf_{s \geq 0} \{\tilde{g}(s) + |r_1 - s|\} - \inf_{s \geq 0} \{\tilde{g}(s) + |r_2 - s|\} \\ &\leq \inf_{s \geq 0} \{\tilde{g}(s) + |r_1 - s|\} - \tilde{g}(s_\varepsilon(r_2)) - |r_2 - s_\varepsilon(r_2)| + \varepsilon \\ &\leq \tilde{g}(s_\varepsilon(r_2)) + |r_1 - s_\varepsilon(r_2)| - \tilde{g}(s_\varepsilon(r_2)) - |r_2 - s_\varepsilon(r_2)| + \varepsilon \\ &= |r_1 - s_\varepsilon(r_2)| - |r_2 - s_\varepsilon(r_2)| + \varepsilon \\ &\leq |r_1 - r_2| + \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Dreiecksungleichung folgt ( $|a| - |b| = |a - b + b| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b| = |a - b|$ ). Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war und diese Ungleichung symmetrisch in  $r_1$  und  $r_2$  ist, folgt  $|g(r_1) - g(r_2)| \leq |r_1 - r_2|$  für alle  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$  und damit die behauptete Lipschitz-Stetigkeit mit Konstante  $L = 1$ .  $\square$

Das folgende Lemma zeigt eine weitere Art, die Bedingung (2.7) zu formulieren.

**Lemma 2.9** Eine stetige Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , die auf  $O \setminus \{0\}$  stetig differenzierbar ist, erfüllt die Bedingung (2.7) genau dann, wenn für alle Lösungen  $\varphi(t, x)$  von (2.1) und alle  $t \geq 0$ , für die  $\varphi(s, x) \in O$  für alle  $s \in [0, t]$  gilt, die Integralungleichung

$$V(\varphi(t, x)) \leq V(x) - \int_0^t W(\varphi(s, x)) ds \quad (2.8)$$

gilt.

**Beweis:** Leicht durch Differenzieren bzw. Integrieren der entsprechenden Ungleichungen.  $\square$

Der Vorteil der Integralformulierung (2.8) ist, dass wir sie später auch für Ljapunov-Funktionen verwenden können, die nicht differenzierbar sind. Wir werden daher bei Beweisen im Folgenden üblicherweise (2.8) statt (2.7) verwenden. Beachte, dass wir aus Lemma 2.8 die Integralungleichung (2.8) mit  $W(x) = g(V(x))$  erhalten.

## 2.5 Ljapunov-Funktion $\Rightarrow$ Asymptotische Stabilität

Wir formulieren und beweisen nun das erste Hauptresultat dieses Kapitels, das besagt, dass aus der Existenz einer Ljapunov-Funktion asymptotische Stabilität folgt.

**Satz 2.10** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) mit  $f(0) = 0$ . Angenommen, es existiert eine lokale (bzw. globale) Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 2.7. Dann ist das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) asymptotisch stabil.

Hierbei ist die Vergleichsfunktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus Definition 2.5 gegeben durch

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(r))), \quad (2.9)$$

wobei  $\mu$  die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r \quad (2.10)$$

ist mit  $g$  aus Lemma 2.8.

**Beweis:** Wir wählen ein  $C > 0$  so dass die Menge  $O$  eine echte Umgebung der Menge  $N = V^{-1}((0, C]) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) < C\}$  ist, was wegen (2.6) möglich ist. Sei  $g$  die Funktion aus Lemma 2.8. Wir betrachten die Lösung  $\mu(t, r)$  des Anfangswertproblems (2.10) und zeigen zunächst das folgende Resultat: Für alle  $x \in N$  gilt

$$V(\varphi(t, x)) \leq \mu(t, V(x)) \text{ für alle } t \geq 0. \quad (2.11)$$

Zum Beweis von (2.11) wählen wir ein  $x \in N$  und betrachten für  $\varepsilon > 0$  die Funktionen  $h_\varepsilon$  gegeben durch

$$h_\varepsilon(t) = V(x) - \int_0^t g(h_\varepsilon(s)) + \varepsilon ds.$$

Da  $h_\varepsilon$  die Differentialgleichung  $\dot{h}_\varepsilon(t) = -g(h_\varepsilon(t)) + \varepsilon$  mit Anfangsbedingung  $h_\varepsilon(0) = V(x)$  löst, folgt aus Gronwalls Lemma die Konvergenz  $h_\varepsilon(t) \rightarrow \mu(t, V(x))$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und jedes  $t \geq 0$ . Wir zeigen, dass  $V(\varphi(t, x)) \leq h_\varepsilon(t)$  für alle  $t > 0$  und alle  $\varepsilon > 0$  gilt, woraus dann mit der Konvergenz  $h_\varepsilon(t) \rightarrow \mu(t, V(x))$  die Behauptung (2.11) folgt. Nehmen wir also im Widerspruch zur Behauptung an, dass ein  $t > 0$  existiert mit  $V(\varphi(t, x)) > h_\varepsilon(t)$ . Sei  $t^* = \inf\{t \geq 0 \mid V(\varphi(t, x)) > h_\varepsilon(t)\}$ . Aus Stetigkeitsgründen gilt dann  $V(\varphi(t^*, x)) = h_\varepsilon(t^*)$ , und es folgt

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq \int_0^\tau g(V(\varphi(t^* + s, x)) - g(h_\varepsilon(t^* + s)) - \varepsilon ds.$$

Sei nun  $L$  eine Lipschitz-Konstante von  $g$ . Dann gilt für alle  $\tau > 0$  die Ungleichung

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq \int_0^\tau L|V(\varphi(t^* + s, x)) - h_\varepsilon(t^* + s)| - \varepsilon ds.$$

Da  $V(\varphi(t^*, x)) = h_\varepsilon(t^*)$  ist und beide Funktionen stetig in  $t$  sind, finden wir  $\tau^* > 0$ , so dass

$$L|V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau)| \leq \varepsilon/2$$

ist für alle  $\tau \in [0, \tau^*]$ . Damit folgt

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq -\tau\varepsilon/2 < 0$$

für alle  $\tau \in [0, \tau^*]$ , insbesondere also

$$V(\varphi(t^* + \tau)) < h_\varepsilon(t^* + \tau) \text{ für alle } \tau \in [0, \tau^*],$$

was der Wahl von  $t^*$  widerspricht. Damit ist (2.11) gezeigt.

Da  $g$  auf jedem kompakten Intervall der Form  $[a, b]$  mit  $0 < a < b \leq C$  strikt positiv ist, konvergiert  $\mu(t, r)$  streng monoton gegen Null für  $t \rightarrow \infty$  (jedes solche Intervall wird in endlicher Zeit „nach unten“ verlassen). Also ist  $\mu$  eine  $\mathcal{L}$ -Funktion in  $t$ . Da sich die Lösungen der Differentialgleichung (2.10) nicht schneiden können, und  $\mu(0, r)$  streng monoton in  $r$  ist, ist auch  $\mu(t, r)$  streng monoton in  $r$ , also eine  $\mathcal{K}$ -Funktion in  $r$ . Man sieht damit leicht, dass dann  $\beta$  aus (2.9) eine  $\mathcal{KL}$ -Funktion ist. Aus

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(\varphi(t, x))) \leq \alpha_1^{-1}(\mu(t, V(x))) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(\|x\|))) = \beta(\|x\|, t) \end{aligned}$$

folgt damit die behauptete asymptotische Stabilität.  $\square$

Wir wollen das Konzept der Ljapunov-Funktion an zwei Beispielen veranschaulichen.

**Beispiel 2.11** Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)^3 \end{aligned}$$

Die Behauptung ist, dass das Gleichgewicht  $x^* = 0$  global asymptotisch stabil ist. Zum Beweis betrachten wir die Funktion  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Offenbar erfüllt  $V$  die Ungleichung (2.6) mit  $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$ . Wegen

$$DV(x)f(x) = (2x_1 \ 2x_2) \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^4 =: -W(x)$$

ist  $V$  also eine globale Ljapunov-Funktion. Mit etwas Rechnerei sieht man außerdem, dass die (optimale) Funktion  $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  in Lemma 2.8 gegeben ist durch

$$g(r) = \begin{cases} 2r^2, & \text{falls } r < 1 \\ 2r, & \text{falls } r \geq 1 \end{cases}$$

$\square$

Die Hauptschwierigkeit bei Ljapunov-Funktionen liegt darin, geeignete Kandidaten zu finden, für die man die benötigten Eigenschaften nachprüfen kann. Für Differentialgleichungen mit speziellen Strukturen gibt es z.T. systematische Verfahren von denen wir später einige kennen lernen werden. Oft kann man auch physikalische Eigenschaften eines Systems benutzen, wie wir dies im folgenden Beispiel machen.

**Beispiel 2.12** Betrachte das vereinfachte nichtlineare mathematische Pendel (2.4) mit Reibungskonstante  $k = 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - \sin(x_1(t)) \end{aligned}$$

Der Ansatz zum Finden einer Ljapunov-Funktion liegt hier in der Betrachtung der Energie des Systems, die — bedingt durch die Reibung — monoton abnimmt. Als ersten Versuch setzen wir

$$\tilde{V}(x) = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Der erste Term  $1 - \cos x_1$  beschreibt hierbei die potentielle Energie, während der zweite Term  $x_2^2/2$  die Bewegungsenergie beschreibt. Berechnet man hier die Richtungsableitung  $D\tilde{V}(x)f(x)$ , so erhält man aber nur für  $x_2 \neq 0$  einen negativen Ausdruck. Zwar nimmt  $\tilde{V}$  auch für  $x_2 = 0$  und  $x_1 \neq 0$  streng monoton ab, allerdings so langsam, dass die Ableitung trotzdem verschwindet. Mit etwas Überlegung und Probieren kommt man darauf, dass man einen zusätzlichen “gemischten” Term addieren muss, um dieses Problem zu lösen. Dies führt auf die Funktion

$$V(x) = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{10}x_2 \sin x_1.$$

**Übungsaufgabe:** Prüfe nach, dass  $V$  eine lokale Ljapunov-Funktion ist. □

## 2.6 Asymptotische Stabilität $\Rightarrow$ Ljapunov-Funktion

In diesem Abschnitt werden wir eine Umkehrung von Satz 2.10 formulieren und — unter Zuhilfenahme von einigen tieferen Sätzen aus der Literatur — beweisen.

Wir beginnen gleich mit der Formulierung des Hauptresultates.

**Satz 2.13** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) mit  $f(0) = 0$ . Wenn das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) asymptotisch stabil, dann existiert eine lokale (bzw. globale) Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 2.7.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Hilfsresultate. Wir beginnen mit dem folgenden Lemma.

**Lemma 2.14** Für jede Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert eine Funktion  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ , so dass die Ungleichung

$$\alpha(\beta(r, t)) \leq e^{-t}r$$

gilt für alle  $r \in [0, 1]$  und alle  $t > 0$ .

**Beweis:** Wir definieren eine Funktion  $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mittels

$$g(q) = \max\{\beta(r, -\ln(s)) \mid r \in [0, 1], s \in (0, 1], rs = q\}.$$

Beachte zunächst, dass hier für festes  $q$  über die kompakte Menge  $\{(r, q/r) \mid r \in [q, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$  maximiert wird, weswegen das Maximum über die stetige Funktion  $\beta$  tatsächlich existiert. Für gegebenes  $q \in (0, 1]$  bezeichnen wir die Werte  $r$  und  $s$ , für die dieses angenommen wird mit  $r^*(q)$  und  $s^*(q)$ . Wir beweisen, dass  $g$  stetig und streng monoton wachsend ist und  $\lim_{q \rightarrow 0, q > 0} g(q) = 0$  ist.

Wir zeigen zunächst, dass  $g$  streng monoton wachsend ist. Dazu ist zu zeigen, dass  $0 < q_1 < q_2 \leq 1$  die Ungleichung  $g(q_1) < g(q_2)$  impliziert. Betrachte die Werte  $r_1 = r^*(q_1)$  und  $s_1 = s^*(q_1)$ . Wir setzen

$$r_2 := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1 > 1 \\ q_2, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1 > 1 \\ \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad s_2 := \begin{cases} q_2, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1 > 1 \\ 1, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1 > 1 \\ \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1, & \text{sonst} \end{cases} .$$

In allen drei Fällen gilt  $r_2 \in (0, 1]$ ,  $s_2 \in (0, 1]$ ,  $r_2 s_2 = q_2$ ,  $r_1 \leq r_2$  und  $s_1 \leq s_2$  (und damit  $-\ln(s_2) \leq -\ln(s_1)$ ). Im ersten und zweiten Fall gilt darüberhinaus  $s_1 < s_2$  (und damit  $-\ln(s_2) < -\ln(s_1)$ ) und im zweiten und dritten Fall  $r_1 < r_2$ . Damit folgt im ersten und zweiten Fall

$$g(q_2) \geq \beta(r_2, -\ln(s_2)) \geq \beta(r_1, -\ln(s_2)) > \beta(r_1, -\ln(s_1)) = g(q_1)$$

und im zweiten und dritten Fall

$$g(q_2) \geq \beta(r_2, -\ln(s_2)) \geq \beta(r_2, -\ln(s_1)) > \beta(r_1, -\ln(s_1)) = g(q_1),$$

womit die strenge Monotonie gezeigt ist.

Zum Beweis der Stetigkeit wähle  $q_0 \in (0, 1]$  und betrachte eine Folge  $q_i \rightarrow q_0$ . Wir setzen  $r_i := r^*(q_i)$  und  $s_i := s^*(q_i)$  für  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Mit der gleichen Konstruktion wie oben sieht man, dass zu jedem  $i \in \mathbb{N}$  Zahlen  $\tilde{r}_i$  und  $\tilde{s}_i$  sowie Zahlen  $\bar{r}_i$  und  $\bar{s}_i$  existieren mit den Eigenschaften

$$\tilde{r}_i \tilde{s}_i = q_i, \quad |\tilde{r}_i - r_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right| \quad \text{und} \quad |\tilde{s}_i - s_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right|$$

sowie

$$\bar{r}_i \bar{s}_i = q_0, \quad |\bar{r}_i - r_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right| \quad \text{und} \quad |\bar{s}_i - s_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right|.$$

Insbesondere gilt  $\tilde{r}_i \rightarrow r_0$ ,  $\tilde{s}_i \rightarrow s_0$ ,  $\bar{r}_i \rightarrow r_0$  und  $\bar{s}_i \rightarrow s_0$  für  $i \rightarrow \infty$ . Also folgt aus der Stetigkeit von  $\beta$  und  $\ln$

$$g(q_0) - g(q_i) \leq \beta(r_0, -\ln(s_0)) - \beta(\tilde{r}_i, -\ln(\tilde{s}_i)) \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty$$

und

$$g(q_i) - g(q_0) \leq \beta(r_i, -\ln(s_i)) - \beta(\bar{r}_i, -\ln(\bar{s}_i)) \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

also die gewünschte Stetigkeit.

Zuletzt beweisen wir die Konvergenz  $\lim_{q \rightarrow 0, q > 0} g(q) = 0$ . Beachte dazu, dass für jedes Paar  $(r, s) \in [0, 1]^2$  mit  $rs = q$  entweder  $s \leq \sqrt{q}$  oder  $r \leq \sqrt{q}$  gilt, da ansonsten  $rs > \sqrt{q}\sqrt{q} = q$  wäre. Also gilt

$$g(q) \leq \max\{\beta(\sqrt{q}, -\ln(s)), \beta(r, -\ln(\sqrt{q}))\} \leq \max\{\beta(\sqrt{q}, 0), \beta(1, -\ln(\sqrt{q}))\} \rightarrow 0$$

für  $q \rightarrow 0$ , und damit die behauptete Konvergenz.

Wir definieren nun eine Funktion  $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mittels

$$h(q) := \begin{cases} 0, & \text{falls } q = 0 \\ g(q), & \text{falls } q \in (0, 1] \\ g(1) + q - 1, & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

Wegen der Eigenschaften von  $g$  ist dies eine  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion und es gilt

$$h(rs) \geq \beta(r, -\ln(s)) \text{ für alle } r \in [0, 1], s \in (0, 1].$$

Da  $h \in \mathcal{K}_\infty$  ist, existiert  $h^{-1}$ . Mit  $\alpha = h^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$  gilt dann

$$rs \leq \alpha(\beta(r, -\ln(s))) \text{ für alle } r \in [0, 1], s \in (0, 1]$$

und mit  $t = -\ln(s)$ , also  $s = e^{-t}$ , folgt

$$re^{-t} \leq \alpha(\beta(r, t)), \text{ für alle } r \in [0, 1], t \geq 0$$

also die Behauptung. □

Neben diesem Lemma benötigen wir noch zwei andere Sätze, die wir hier nicht beweisen werden.

**Satz 2.15 (Rademacher)** Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $\tilde{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz stetige Funktion. Dann gibt es in jeder offenen Menge  $B \subset O$  einen Punkt  $x \in B$ , in dem  $\tilde{V}$  differenzierbar ist.

**Satz 2.16** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) mit Vektorfeld  $f$ . Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei  $\tilde{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz stetige Funktion. Dann gibt es für alle stetigen Funktionen  $\gamma, \delta : O \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

$$|V(x) - \tilde{V}(x)| \leq \gamma(x)$$

für alle  $x \in O$  und

$$DV(x)f(x) \leq D\tilde{V}(x)f(x) + \delta(x)$$

für alle  $x \in O$  in denen  $\tilde{V}$  differenzierbar ist.

Für den Beweis von Satz 2.15 siehe das Buch “Measure Theory and Fine Properties of Functions” von L.C. Evans and F. Gariepy [4, Theorem 2, Section 3.1.2]. Die ursprüngliche Version von Satz 2.16 findet sich in dem Artikel von F.W. Wilson, “Smoothing derivatives of functions and applications” [17]; die hier angegebene Version stammt aus dem Artikel von Y. Lin, E.D. Sontag and Y. Wang, “A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability”, [12].

Nun kommen wir zum **Beweis von Satz 2.13**:

Wir beweisen hier den globalen Fall, der lokale Fall folgt analog durch Einschränkung auf eine geeignete Umgebung  $O$  der 0.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\|f(x)\| \leq 1$  ist, ansonsten können wir  $f$  durch  $f/\sqrt{1+\|f\|^2}$  ersetzen (wenn  $V$  eine Ljapunov-Funktion für das veränderte  $f$  ist, dann

ist es mit gleichem  $W$  auch eine für das ursprüngliche  $f$ ). Betrachte nun die Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus der Definition der asymptotischen Stabilität und die Funktion  $\alpha$  aus Lemma 2.14. O.B.d.A. können wir  $\beta(1, 0) \geq 1$  und  $\alpha(r) \leq 1$  für  $r \leq \beta(1, 0)$  annehmen.

Sei nun  $L$  eine Lipschitz-Konstante für  $f$  für alle  $x$  mit  $\|x\| \leq \beta(1, 0)$ . Wir definieren eine Funktion  $\omega : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mittels

$$\omega(r) = \frac{1}{\beta(1, 0)} \int_0^r \alpha(s)^{L+1} ds \quad \text{für } r \in [0, \beta(1, 0)]$$

und  $\omega(r) = \omega(\beta(1, 0))$  für  $r > \beta(1, 0)$ . Dann gilt  $\omega(r) \leq \alpha(r)$  und  $\omega'(r) \leq \alpha(s)^{L+1}$  für  $r \in [0, \beta(1, 0)]$ , insbesondere ist  $\omega$  Lipschitz mit Konstante  $L_R = \alpha(R)^{L+1}$  auf  $[0, R]$  für alle  $R \in [0, \beta(1, 0)]$  und global Lipschitz mit Konstante  $L_{\beta(1, 0)}$ .

Wir setzen nun  $\widetilde{W}(x) = \omega(\|x\|)$ . Beachte, dass  $\widetilde{W}$  auf  $B_R(0)$  Lipschitz-stetig mit der Konstanten  $L_R$  von  $\omega$  ist und global Lipschitz-stetig ist mit der Konstanten  $L_W := L_{\beta(1, 0)}$ . Mittels  $\widetilde{W}$  definieren wir

$$\widetilde{V}(x) := \int_0^\infty \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt.$$

Für  $\widetilde{V}$  zeigen wir drei Eigenschaften

- (i) Es gibt  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \mathcal{K}_\infty$  mit

$$\tilde{\alpha}_1(\|x\|) \leq \widetilde{V}(x) \leq \tilde{\alpha}_2(\|x\|).$$

- (ii)  $\widetilde{V}$  ist Lipschitz stetig

- (iii) In allen Punkten  $x \in \mathbb{R}^n$ , in denen  $\widetilde{V}$  differenzierbar ist gilt

$$D\widetilde{V}(x)f(x) \leq -\widetilde{W}(x).$$

“(i)”: Wir zeigen zunächst die Existenz von  $\alpha_2$ : Sei  $\tau(x) := \inf\{t \geq 0 \mid \|\varphi(t, x)\| \leq 1\}$  und  $\sigma(r) := \inf\{t \geq 0 \mid \beta(r, t) \leq 1\}$ . Hierfür gilt  $\tau(x) \leq \sigma(\|x\|)$ . Falls  $\|x\| > 1$  ist, folgt  $\tau(x) > 0$  und damit

$$\begin{aligned} \widetilde{V}(x) &= \int_0^\infty \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &= \int_0^{\tau(x)} \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt + \int_{\tau(x)}^\infty \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &\leq \tau(x)\omega(\beta(1, 0)) + \int_{\tau(x)}^\infty \alpha(\beta(1, t - \tau(x))) dt \\ &\leq \sigma(\|x\|)\omega(\beta(1, 0)) + \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \sigma(\|x\|)\omega(\beta(1, 0)) + 1 \leq \sigma(\|x\|)\omega(\beta(1, 0)) + \|x\| =: \tilde{\alpha}_2(\|x\|). \end{aligned}$$

Beachte, dass  $\sigma(r)$  monoton wachsend mit  $\sigma(0) = 0$  ist, weswegen  $\tilde{\alpha}_2$  tatsächlich aus  $\mathcal{K}_\infty$  ist.

Falls  $\|x\| < 1$  ist, folgt

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x) &= \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha(\beta(\|x\|, t)) dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-t} \|x\| dt = \|x\| \leq \tilde{\alpha}_2(\|x\|).\end{aligned}$$

Zum Beweis der Existenz von  $\alpha_1$  benutzen wir die Beschränktheit  $\|f(x)\| < 1$ . Aus dieser Eigenschaft folgt aus der Integraldarstellung der Lösung die Ungleichung  $\|\varphi(t, x) - x\| \leq t$  und daraus die Ungleichung  $\|\varphi(t, x)\| \geq \|x\| - t$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x) &= \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt \geq \int_0^{\|x\|} \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &= \int_0^{\|x\|} \omega(\|\varphi(t, x)\|) dt \geq \int_0^{\|x\|} \omega(\|x\| - t) dt =: \alpha_1(\|x\|).\end{aligned}$$

Diese Funktion  $\alpha_1$  ist stetig, streng monoton wachsend und erfüllt — wegen der Definition von  $\omega$  — die Ungleichung  $\alpha_1(r) \geq \omega(\beta(1, 0))(r - \beta(1, 0))$ , also  $\alpha_1(r) \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow \infty$ . Da aus der Integraldarstellung zudem  $\alpha_1(0) = 0$  folgt, erhalten wir  $\alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$ .

“(ii)”: Beachte zunächst, dass für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|, \|y\| \leq 1$  aus Gronwalls Lemma die Ungleichung

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{Lt} \|x - y\|$$

folgt. Mit

$$\delta(t) := \max\{\|\varphi(t, x)\|, \|\varphi(t, y)\|\} \leq \beta(\max\{\|x\|, \|y\|\}, t)$$

gilt für solche  $x$  und  $y$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\tilde{V}(x) - \tilde{V}(y)| &\leq \int_0^\infty |\tilde{W}(\varphi(t, x)) - \tilde{W}(\varphi(t, y))| dt \\ &\leq \int_0^\infty L_{\delta(t)} \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha(\delta(t))^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha(\beta(\max\{\|x\|, \|y\|\}, t))^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-(L+1)t} \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \|x - y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \|x - y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} \leq \|x - y\|,\end{aligned}$$

was die behauptete Lipschitz-Stetigkeit (mit Lipschitz-Konstante 1) zeigt.

Seien nun beliebige  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Sei  $M = \max\{\|x\|, \|y\|\}$  und  $L_M$  eine Lipschitz-Konstante für  $f$  auf  $B_{\beta(M, 0)}$ . Wiederum mit Gronwalls Lemma erhalten wir

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{L_M t} \|x - y\|$$



Damit gilt

$$\begin{aligned}
|\tilde{V}(x) - \tilde{V}(y)| &= \left| \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^{\sigma(M)} \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_0^{\sigma(M)} \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\
&\quad + \left| \int_{\sigma(M)}^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_{\sigma(M)}^\infty \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\
&\leq \int_0^{\sigma(M)} |\tilde{W}(\varphi(t, x)) - \tilde{W}(\varphi(t, y))| dt \\
&\quad + \left| \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, \varphi(\sigma(M), x))) - \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, \varphi(\sigma(M), y))) dt \right| \\
&\leq \int_0^{\sigma(M)} L_W e^{L_M t} \|x - y\| dt + |\tilde{V}(\varphi(\sigma(M), x)) - \tilde{V}(\varphi(\sigma(M), y))| \\
&\leq \frac{L_W}{L_M} (e^{L_M \sigma(M)} - 1) \|x - y\| + \|e^{L_M \sigma(M)}\| \|x - y\| =: L_{V, M} \|x - y\|,
\end{aligned}$$

also die behauptete Lipschitz-Stetigkeit.

“(iii)”: Aus der Definition von  $\tilde{V}$  folgt die Gleichung

$$\tilde{V}(\varphi(\tau, x)) - \tilde{V}(x) \leq - \int_0^\tau \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt,$$

aus der man die gewünschte Eigenschaft durch Differenzieren nach  $\tau$  in  $\tau = 0$  erhält.

Wir wenden nun Satz 2.16 mit  $O = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\gamma(x) = \min\{\tilde{\alpha}_1(\|x\|), \tilde{\alpha}_2(\|x\|)\}/2$  und  $\delta(x) = \tilde{W}(x)/2$  an.

Mit  $\alpha_1(r) = \tilde{\alpha}_1(r)/2$  und  $\alpha_2(r) = 3\tilde{\alpha}_2(r)/2$  folgt damit

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

und mit  $W(x) = \tilde{W}(x)/2$  gilt für alle Punkte, in denen  $\tilde{V}$  differenzierbar ist, die Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -W(x).$$

Sei  $x$  nun ein Punkt, in dem  $\tilde{V}$  nicht differenzierbar ist. Nach Satz 2.15 gibt es in jeder Umgebung  $B_{\frac{1}{n}}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , einen Punkt  $x_n$ , in dem  $\tilde{V}$  differenzierbar ist. Wegen  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$  und der Stetigkeit von  $DV$ ,  $f$  und  $W$  gilt damit

$$DV(x)f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} DV(x_n)f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} -W(x_n) = -W(x),$$

also die gewünschte Eigenschaft.  $\square$

**Bemerkung 2.17** Die Konstruktionsidee in diesem Beweis wurde in den 1960er Jahren von dem russischen Mathematiker V.I. Zubov [18] entwickelt.<sup>4</sup> Wenn die (partielle) Differentialgleichung

$$D\tilde{V}(x)f(x) = -\tilde{W}(x) \tag{2.12}$$

<sup>4</sup>Alternative Konstruktionsmethoden wurden u.A. von Kurzweil, Massera und Yoshizawa entwickelt.

lösbar ist, liefert der Beweis sogar eine konstruktive Methode zu Berechnung von  $\tilde{V}$ . Manchmal ist dies möglich, auch wenn man die Lösungen der zu Grunde liegenden gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$  nicht kennt, im Allgemeinen ist (2.12) aber schwer lösbar. In niedrigeren Raumdimensionen ( $n=2,3$ ) existieren verschiedene numerische Verfahren zur Lösung der Gleichung (2.12).  $\square$

## Kapitel 3

# Asymptotische Kontrollierbarkeit und Feedback–Stabilisierung

In diesem Kapitel werden wir die Stabilitätsdefinition aus dem letzten Kapitel auf Kontrollsysteme (1.1) verallgemeinern, was zu den Begriffen Asymptotische Kontrollierbarkeit und Feedback–Stabilisierbarkeit führt. Wir werden dann untersuchen, wie diese beiden Begriffe zusammen hängen und dies an Beispielen illustrieren.

### 3.1 Definition

Wir kehren nun zurück zu unserem Kontrollsystem (1.1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

und wollen den Stabilitätsbegriff von (2.1) auf (1.1) verallgemeinern. Wie in der Einführung bereits erwähnt, gibt es zwei wesentliche Möglichkeiten, die Kontrollfunktion  $u(t)$  zu spezifizieren:

- als explizit zeitvariante Funktion  $u \in \mathcal{U} = L_\infty(\mathbb{R}, U)$
- mittels eines Feedback–Gesetzes  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  via  $u(t) = F(x(t))$

Im ersten Fall spricht man von *Steuerung* oder *open–loop Kontrolle*, im zweiten Fall von *Regelung*, *Feedback–Kontrolle* oder *closed–loop Kontrolle*. Für ein gegebenes Feedback  $F$  bezeichnen wir dabei die Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$$

zum Anfangswert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(t, x_0, F)$ .

In Fall der Steuerung haben wir mit Satz 1.5 einen allgemeinen Existenz– und Eindeutigkeitssatz; im Fall der Regelung nehmen wir an, dass das Vektorfeld  $g(x) = f(x, F(x))$  (lokal) Lipschitz–stetig ist, so dass der Existenzsatz 1.5 (angewendet ohne  $u$ ) auf das Vektorfeld  $g(x)$  anwendbar ist.

**Definition 3.1** Es sei  $x^* = 0$  ein Gleichgewicht des Kontrollsystems (1.1) für ein  $u^* \in U$ .

(i) Das Gleichgewicht  $x^* = 0$  heißt (lokal) *asymptotisch kontrollierbar*, wenn eine offene Umgebung  $N$  von  $x^*$  und Funktionen  $\beta \in \mathcal{KL}$  und  $\gamma \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$  existieren, so dass zu jedem  $x \in N$  eine Kontrollfunktion  $u_x \in \mathcal{U}$  existiert mit  $\|u_x\|_\infty \leq \gamma(\|x\|)$  und

$$\|\varphi(t, x, u_x)\| \leq \beta(\|x\|, t)$$

für alle  $t \geq 0$ .

(ii) Das Gleichgewicht  $x^* = 0$  heißt (lokal) *Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar*, wenn eine offene Umgebung  $N$  von  $x^*$ , eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  sowie eine stetige Feedback-Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  mit  $f(x, F(x))$  lokal Lipschitz in  $x$  existieren mit

$$\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t) \text{ für alle } x \in N, t \geq 0.$$

(iii) Die obige Kontrollierbarkeit bzw. Stabilisierbarkeit heißt *global*, falls  $N = \mathbb{R}^n$  und *exponentiell*, falls  $\beta(r, t) = Ce^{-\sigma t}r$  für Konstanten  $C, \sigma > 0$  gewählt werden kann.  $\square$

Wie bereits in der Stabilitätsdefinition ohne Kontrolle nehmen wir hierbei implizit an, dass die betrachteten Lösungen  $\varphi(t, x, u_x)$  bzw.  $\varphi(t, x, F)$  für alle  $t \geq 0$  existieren.

In der Praxis wird man, wenn möglich, typischerweise Feedback-Lösungen bevorzugen, da diese auf den aktuellen Zustand eingehen können und damit — insbesondere bei langen Kontrollhorizonten — auf Fehler (Modellfehler, äußere Störungen etc.) reagieren und diese im Idealfall korrigieren können, was eine open-loop Steuerung i.A. nicht leisten kann (vgl. Aufgabe 2 auf dem 4. Übungsblatt zur Kontrolltheorie I). Eine wesentliche Frage, die wir in den nächsten Kapiteln untersuchen werden, ist also, unter welchen Bedingungen stabilisierende Feedbacks existieren und wie man diese berechnet.

In diesem Kapitel untersuchen wir nun zunächst die Frage, wie die beiden Begriffe (i) und (ii) miteinander in Beziehung stehen.

Tatsächlich ist es relativ leicht zu zeigen, dass die Feedback-Stabilisierung die asymptotische Kontrollierbarkeit impliziert, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 3.2** Wenn das Gleichgewicht  $x^* = 0$  für das Kontrollsystem (1.1) (lokal, global, exponentiell) Feedback-stabilisierbar ist, so ist es auch (lokal, global, exponentiell) asymptotisch kontrollierbar.

**Beweis:** Es gelte Definition 3.1(ii) und es sei  $x \in N$  beliebig. Sei  $\varphi(t, x, F)$  die Lösung des Feedback-geregelten Systems. Diese existiert dann für alle  $t \geq 0$  und erfüllt die Ungleichung aus Definition 3.1(ii). Definieren wir nun die stetige Funktion  $\gamma(r) = \max_{\|x\| \leq \beta(r, 0)} \|F(x)\|$  und setzen

$$u_x(t) = \begin{cases} F(\varphi(t, x, F)), & t \geq 0 \\ F(0), & t < 0 \end{cases},$$

so ist  $u$  stückweise stetig und durch  $\gamma(\|x\|)$  beschränkt und liegt damit insbesondere in  $L_\infty(\mathbb{R}, U)$ . Für die zugehörige Lösung  $\varphi(t, x, u)$  gilt dann

$$\dot{\varphi}(t, x, F) = f(\varphi(t, x, u), F(\varphi(t, x, F))) = f(\varphi(t, x, F), u_x(t)).$$

Integration dieser Gleichung liefert, dass  $\varphi(t, x, F)$  die Integralgleichung

$$\varphi(t, x, F) = x + \int_0^t f(\varphi(\tau, x, F), u_x(\tau)) d\tau$$

erfüllt. Da nach Satz 1.5 die Funktion  $\varphi(t, x, u_x)$  die eindeutige Lösung dieser Integralgleichung ist, folgt  $\varphi(t, x, u) = \varphi(t, x, F)$ , womit  $\varphi(t, x, u)$  die Ungleichung aus Definition 3.1(i) erfüllt und die asymptotische Kontrollierbarkeit folgt.  $\square$

Beachte, dass wir in diesem Beweis nur benötigen, dass die Funktion  $u_x(\cdot) = F(\varphi(\cdot, x, F))$  die Bedingungen von Definition 3.1(i) erfüllt. Die hier vorausgesetzte Stetigkeit von  $F$  ist dafür hinreichend aber nicht notwendig, weswegen sich dieses Resultat auf allgemeinere Feedback-Klassen verallgemeinern lässt.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Umkehrung von Lemma 3.2 auch gilt. Dies wollen wir im folgenden Abschnitt untersuchen.

## 3.2 Brocketts Bedingung

In diesem Abschnitt werden wir zuerst eine leicht überprüfbare notwendige Bedingung an das Vektorfeld  $f(x, u)$  herleiten, mit der man testen kann, ob ein System Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar ist. Dies Kriterium wurde 1983 von dem amerikanischen Mathematiker Roger W. Brockett veröffentlicht [3]; der Beweis, den wir hier angeben, stammt aus dem Buch von E.D. Sontag [15]. Wir formulieren das Resultat in Lemma 3.3 zuerst für unkontrollierte Differentialgleichungen  $\dot{x} = f(x)$  und geben danach in Satz 3.4 die Folgerung für kontrollierte Differentialgleichungen  $\dot{x} = f(x, u)$  an. Hierbei bezeichnen  $B_\rho$  und  $\text{cl } B_\rho$  den offenen bzw. abgeschlossenen Ball mit Radius  $\rho > 0$  um den Nullpunkt im  $\mathbb{R}^n$

**Lemma 3.3** Betrachte ein gewöhnliche Differentialgleichung (2.1) mit lokal Lipschitz-stetigem Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und lokal asymptotisch stabilem Gleichgewicht  $x^* = 0$ . Dann enthält die Menge

$$f(\mathbb{R}^n) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n\}$$

eine Umgebung  $B_\varepsilon$  der Null.

**Beweis:** Es bezeichne  $\mathbb{S}_\rho$  die Sphäre mit Radius  $\rho$  im  $\mathbb{R}^n$ , also  $\mathbb{S}_\rho = \partial B_\rho$ .

Wir skizzieren zunächst den Beweis der folgenden Eigenschaft: Wenn eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times \text{cl } B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^n :$$

die Bedingungen

$$H(1, x) = -x \text{ für alle } x \in \mathbb{S}_\rho \text{ und } H(t, x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{S}_\rho, t \in [0, 1]$$

erfüllt, so existiert ein  $\varepsilon > 0$  so dass die Inklusion

$$\text{cl } B_\varepsilon \subset H(0, \text{cl } B_\rho) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = H(0, x) \text{ für ein } x \in \text{cl } B_\rho\} \quad (3.1)$$

gilt.

Der Beweis von (3.1) beruht auf dem *Brouwer'schen Abbildungsgrad*  $\deg(G, x)$  einer Abbildung  $G : \text{cl } B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^n$  in einem Punkt  $x \in B_\rho$ . Dies ist eine ganze Zahl, die der Abbildung zugeordnet wird (für eine genaue Definition siehe z.B. Jeggler [10, Definition (3), p. 94]. Der Betrag  $|\deg(G, x)|$  liefert eine untere Schranke für die Anzahl der Lösungen  $y \in \text{cl } B_\rho$  der Gleichung  $G(y) = x$ . Der Abbildungsgrad existiert unter den obigen Voraussetzungen an  $H$  für die Abbildungen  $G_t(x) := H(t, x)$ ,  $t \in [0, 1]$ , zudem ist er unabhängig von  $t \in [0, 1]$  (dies folgt aus dem Homotopiesatz [10, Satz (26), p. 103]). Aus dem Randsatz [10, Satz (27)] und der expliziten Formel von  $\deg(G, x)$  für differenzierbares  $G$  erhält man  $\deg(G_t, 0) = (-1)^n$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Aus der Stetigkeit von  $G_0(x) = H(0, x)$  in  $x$  und der Kompaktheit der Sphäre  $\mathbb{S}_\rho$  folgt die Existenz von  $\varepsilon > 0$  mit  $\|G_0(x)\| > \varepsilon$  für alle  $x \in \mathbb{S}_\rho$ . Hieraus folgt mit [10, Satz (29)] die Gleichung  $\deg(G_0, x) = (-1)^n$  für alle  $x \in \text{cl } B_\varepsilon$ , folglich besitzt die Gleichung  $G_0(y) = x$  für alle  $x \in \text{cl } B_\varepsilon$  mindestens eine Lösung  $y \in \text{cl } B_\rho$ , woraus (3.1) folgt.

Mit Hilfe von (3.1) beweisen wir nun das Lemma. Wähle einen abgeschlossenen Ball  $\text{cl } B_\rho \subset N$ , wobei  $N$  die Umgebung aus der Stabilitätsdefinition 2.5(iii) ist. Wir wenden (3.1) auf die Abbildung

$$H(t, x) := \begin{cases} f(x), & t = 0 \\ -x, & t = 1 \\ \frac{1}{t} \left[ \varphi \left( \frac{t}{1-t}, x \right) - x \right], & t \in (0, 1) \end{cases}$$

an.

Wir müssen nachweisen, dass dieses  $H$  die obigen Bedingungen erfüllt. Zunächst ist sicherlich  $H(1, x) = -x$ , zudem ist  $H(t, x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{S}_\rho \subset N \setminus \{0\}$  und alle  $t \in [0, 1]$ , da  $H(0, x) = 0$  bedeuten würde, dass  $x$  ein Gleichgewicht ist, und  $H(t, x)$  bedeuten würde, dass  $x$  ein  $t/(1-t)$ -periodischer Punkt wäre; beides widerspräche der asymptotischen Stabilität für  $x \in N$ .

Es bleibt, die Stetigkeit von  $H$  zu zeigen. Für  $t \in (0, 1)$  ist  $H$  als Komposition stetiger Funktionen stetig, für  $t \rightarrow 1$  gilt wegen der asymptotischen Stabilität  $\varphi \left( \frac{t}{1-t}, x \right) \leq \beta(\rho, t) \rightarrow 0$ , woraus  $H(t, x) \rightarrow -x$  gleichmäßig in  $x$  und damit die Stetigkeit folgt. Zum Beweis der Stetigkeit in  $t = 0$  zeigen wir, dass für jedes  $x \in \text{cl } B_\rho$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit

$$\|H(t, y) - f(x)\| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [0, 1], y \in \text{cl } B_\rho \text{ mit } t < \delta, \|y - x\| < \delta. \quad (3.2)$$

Zum Beweis von (3.2) verwenden wir die aus der Integraldarstellung der Lösungen stammende Gleichung

$$\frac{1}{s}(\varphi(s, y) - y) = \frac{1}{s} \int_0^s f(\varphi(\tau, y)) d\tau.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1+s}{s}(\varphi(s, y) - y) - f(x) = \frac{1}{s} \int_0^s \left( f(\varphi(\tau, y)) - f(x) \right) d\tau + \int_0^s f(\varphi(\tau, y)) d\tau.$$

Wegen der Stetigkeit von  $f(\varphi(\cdot, \cdot))$  existieren nun  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , so dass aus  $s \in [0, \delta_1)$  und  $\|y - x\| < \delta_2$  die Ungleichung

$$\|f(\varphi(\tau, y)) - f(x)\| < \varepsilon/2$$

folgt. Sei  $M > 0$  eine Schranke für  $\|f(\varphi(\tau, y))\|$  für  $s \in [0, \delta_1)$  und  $\|y - x\| < \delta_2$ . Dann gilt für diese  $s$  und  $y$  und  $t = s/(1 + s)$  die Ungleichung

$$\|H(y, t) - f(x)\| < \varepsilon/2 + M \frac{t}{1-t}.$$

Wählen wir nun  $\delta > 0$  so klein, dass  $\delta < \delta_2$ ,  $\delta/(1 - \delta) < \delta_1$  und  $M \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon/2$  ist, so erhalten wir hieraus (3.2).

Die Funktion  $H$  erfüllt also alle Voraussetzungen, um (3.1) zu folgern, weswegen wir (3.1) und damit

$$\text{cl } B_\varepsilon \subset H(0, \text{cl } B_\rho) = f(\text{cl } B_\rho) \subseteq f(\mathbb{R}^n)$$

für ein geeignetes  $\varepsilon > 0$  erhalten. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

Der folgende Satz formuliert Lemma 3.3 für Kontrollsysteme.

**Satz 3.4** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$ . Angenommen, es existiert ein (lokal) stabilisierendes Feedback  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , so dass  $f(x, F(x))$  lokal Lipschitz-stetig ist. Dann enthält die Menge

$$f(\mathbb{R}^n, U) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x, u) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n \text{ und ein } u \in U\}$$

eine Umgebung  $B_\varepsilon$  der Null.

**Beweis:** Wenden wir Lemma 3.3 auf  $g(x) = f(x, F(x))$  an, so erhalten wir sofort  $B_\varepsilon \subseteq g(\mathbb{R}^n) = f(\mathbb{R}^n, F(\mathbb{R}^n)) \subseteq f(\mathbb{R}^n, U)$ .  $\square$

**Beispiel 3.5** Betrachte das 3d System mit 2d Kontrolle

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t)u_1(t) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass kein Punkt der Form  $(0, r, \varepsilon)$  mit  $\varepsilon \neq 0$  und  $r \in \mathbb{R}$  beliebig im Bild von  $f$  liegt.

Dieses Beispiel ist keine mathematische Spielerei, sondern modelliert ein lenkbares Fahrzeug mit Fahrtrichtungswinkel  $\theta = x_1$  (gemessen bezüglich der  $x_1$ -Achse) und Position  $(z_1, z_2) = (x_2 \cos(\theta) + x_3 \sin(\theta), x_2 \sin(\theta) - x_3 \cos(\theta))$ . Systeme dieser Art werden *nichtholonome Systeme* genannt und treten typischerweise in der Modellierung von Fahrzeugbewegungen auf. Das obige System ist als *Brocketts nichtholonomer Integrator* bekannt.  $\square$

Mit Hilfe von Beispiel 3.5 und Satz 3.4 können wir nun zeigen, dass die Umkehrung von Lemma 3.2 nicht gilt.

**Korollar 3.6** Die asymptotische Kontrollierbarkeit impliziert nicht die Lipschitz–stetige Feedback–Stabilisierbarkeit.

**Beweis:** Betrachte Beispiel 3.5 mit  $U = \mathbb{R}^2$ . Nach Satz 3.4 ist das System nicht Lipschitz–stetig Feedback–stabilisierbar, da Brocketts notwendige Bedingung verletzt ist. Die Behauptung des Korollars folgt nun, wenn wir zeigen, dass das System asymptotisch kontrollierbar ist.

Für einen gegebenen Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^3$  wählen wir die Kontrollen

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ -\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}, & t \in [1, 2] \\ 0, & t \in [2, 3] \\ -(x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}), & t \in [3, 4] \\ 0, & t \geq 4 \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - x_2, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \in [1, 2] \\ -\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}, & t \in [2, 3] \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$

Mit diesen Kontrollen ergeben sich die folgenden Zustände

$$\begin{aligned} \varphi(1, x, u) &= \begin{pmatrix} x_1 + \int_0^1 0 dt \\ x_2 + \int_0^1 \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - x_2 dt \\ x_3 + \int_0^1 x_2(t) 0 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \varphi(2, x, u) &= \begin{pmatrix} x_1 + \int_1^2 -\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} dt \\ \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} + \int_1^2 0 dt \\ x_3 + \int_1^2 (\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|})(-\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} \\ \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(3, x, u) &= \begin{pmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - \int_2^3 0 dt \\ \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} + \int_2^3 -\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} dt \\ 0 + \int_2^3 x_2(t) 0 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(4, x, u) &= \begin{pmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - \int_3^4 -(x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}) dt \\ 0 + \int_3^4 0 dt \\ 0 + \int_3^4 0 - (x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und  $\varphi(t, x, 0) = 0$  für  $t \geq 4$ . Das System wird also in endlicher Zeit  $t = 4$  nach 0 gesteuert. Verwenden wir der einfacheren Rechnung wegen die Maximums–Norm, so hat das System für  $t \in [0, 4]$  den maximalen Abstand

$$\|x\|_\infty \leq \max\{|x_1| + \sqrt{|x_3|}, |x_2|, |x_3|\} \leq \|x\|_\infty + \sqrt{\|x\|_\infty}$$

vom Nullpunkt. Die Funktion  $\beta(r, t) = e^4 e^{-t}(r + \sqrt{r})$  ist daher eine  $\mathcal{KL}$ –Funktion mit  $\|\varphi(t, x, u)\|_\infty \leq \beta(\|x\|_\infty, t)$ . Da zudem  $\|u(t)\|_\infty \leq |x_1| + \sqrt{|x_3|} \leq \|x\|_\infty + \sqrt{\|x\|_\infty}$ , folgt die asymptotische Kontrollierbarkeit mit  $\gamma(r) = r + \sqrt{r}$ .  $\square$



### 3.3 Beispiel: Artsteins Kreise

In diesem Abschnitt diskutieren wir ein Beispiel, das zeigt, dass Brocketts Bedingung tatsächlich nur notwendig ist. Wir beweisen, dass das Beispiel Brocketts Bedingung erfüllt, obwohl für das System kein Lipschitz–stetig stabilisierendes Feedback existiert — tatsächlich existiert nicht einmal ein stetig stabilisierendes Feedback. Das von dem israelischen Mathematiker Zvi Artstein stammende und unter dem Namen “Artsteins Kreise” bekannte Beispiel ist gegeben durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \left(-x_1(t)^2 + x_2(t)^2\right)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(-2x_1(t)x_2(t)\right)u(t).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Beachte, dass Brocketts Bedingung erfüllt ist: Für  $v = (v_1, v_2)^T$  mit  $v_2 \neq 0$  wählen wir  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{v_1}{v_2} + \sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} + 1}$  ( $\Rightarrow x_2^2 - 1 = -2\frac{v_1}{v_2}x_2$ , beachte, dass  $x_2 \neq 0$  ist) und  $u = -\frac{v_2}{2x_2}$ . Damit ergibt sich

$$f(\mathbb{R}^n, U) \ni f(x, u) = \begin{pmatrix} -1 + x_2^2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{2x_2}(-2\frac{v_1}{v_2}x_2) \\ -\frac{v_2}{2x_2}(-2x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Für  $v_2 = v_1 = 0$  wählen wir  $u = 0$  und  $x$  beliebig und für  $v_2 = 0$  und  $v_1 \neq 0$  wählen wir  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \sqrt{|v_1|}$  und  $u = \text{sgn}(v_1)$ .

Somit liegt jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  im Bild von  $f$  darstellen, womit Brocketts Bedingung erfüllt ist.

Um zu zeigen, dass das System nicht mit stetigem Feedback stabilisierbar ist, betrachten wir die Lösungstrajektorien, die sich für dieses System analytisch beschreiben lassen: Für den Anfangswert  $x = (x_1, x_2)$  setzen wir

$$r = r(x) = \begin{cases} \|x\|^2/2x_2, & x_2 > 0 \\ -\|x\|^2/2x_2, & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0 \\ \infty, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

Dann sind die Lösungen zu diesem Anfangswert gegeben durch

$$\varphi(t, x, u) = \begin{cases} (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, u)), -r \cos(\psi_r(t, \psi_0, u)) + r)^T, & x_2 > 0 \\ (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, u)), r \cos(\psi_r(t, \psi_0, u)) - r)^T, & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0 \\ (\psi_\infty(t, \psi_0, u), 0)^T, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

wobei  $\psi_r(\cdot, \psi, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi_\infty(\cdot, \psi_0, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösungen der 1d Kontrollsysteme

$$\dot{\psi}(t) = g_r(\psi, u) = 2u(t)r(\cos(\psi(t)) - 1)$$

mit Anfangsbedingung  $r \sin(\psi_0) = x_1$  bzw.

$$\dot{\psi}_\infty(t) = g_\infty(\psi, u) = -u(t)\psi(t)^2$$

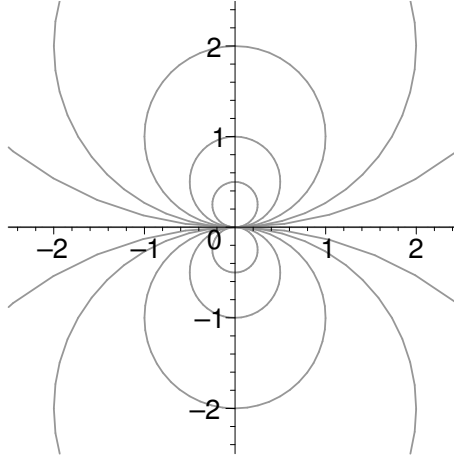


Abbildung 3.1: Einige Lösungen von System 3.3

mit Anfangsbedingung  $\psi_0 = x_1$  sind. Wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus können wir im Falle  $r < \infty$   $\psi_0 \in [-\pi, \pi]$  annehmen. Der Nullpunkt  $x = (0, 0)^T$  entspricht dann gerade dem Punkt  $\psi_0 = 0$ . Einige dieser Lösungen sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Beachte, dass man die in Abbildung 3.1 dargestellten Lösungskurven nicht verlassen kann, egal wie  $u$  gewählt wird; man kann lediglich die Richtung und die Geschwindigkeit beeinflussen, mit der diese Kurven durchlaufen werden.

Wir wollen nun beweisen, dass es kein stetiges Feedback geben kann, das dieses System stabilisiert, nicht einmal lokal. Wir nehmen dazu an, dass mit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokal stabilisierendes stetiges Feedback gegeben ist.

Wähle ein  $r > 0$  so klein, dass der zugehörige Lösungskreis ganz in der Umgebung  $N$  liegt, in der das mittels  $F$  geregelte System asymptotisch stabil ist. Für die durch

$$\tilde{F}(\psi) = F(r \sin(\psi), -r \cos(\psi) + r)$$

gegebene Abbildung  $F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dann, dass die Lösungen  $\varphi(t, x, F)$  des mittels geregelten Systems für Anfangswerte  $x = (x_1, x_2)$  mit  $x_2 > 0$  und  $r(x) = r$  von der Form

$$\varphi(t, x, F) = (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F})), -r \cos(\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F})) + r)^T$$

mit  $r \sin(\psi_0) = x_1$  sind. Aus der angenommenen asymptotischen Stabilität folgt die Konvergenz  $\varphi(t, x, F) \rightarrow 0$  und  $\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, 0)$ , woraus für  $\psi$  hinreichend nahe bei 0 die Konvergenz  $\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F}) \rightarrow 0$  folgt. Da  $\psi$  eindimensional ist, müssen in einer Umgebung der Null also die Bedingungen

$$\begin{aligned} g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &< 0 && \text{für } \psi > 0 \\ g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &> 0 && \text{für } \psi < 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

gelten. Wiederum wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus gilt

$$g_r(\psi + 2\pi, \tilde{F}(\psi + 2\pi)) = g_r(\psi, \tilde{F}(\psi))$$

für alle  $\psi \in \mathbb{R}$ . Also folgt aus (3.4), dass eine Umgebung von  $\psi^* = 2\pi$  existiert, so dass

$$\begin{aligned} g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &< 0 && \text{für } \psi > 2\pi \\ g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &> 0 && \text{für } \psi < 2\pi \end{aligned} \quad (3.5)$$

gilt. Aus (3.4) und (3.5) folgt, dass ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass

$$g_r(\varepsilon, \tilde{F}(\varepsilon)) < 0 \text{ und } g_r(2\pi - \varepsilon, \tilde{F}(2\pi - \varepsilon)) > 0$$

ist. Da  $g_r(\psi, \tilde{F}(\psi))$  stetig in  $\psi$  ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein  $\xi \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$  mit  $g_r(\xi, \tilde{F}(\xi)) = 0$ . Daraus folgt, dass auch  $f(x_1, F) = 0$  ist für  $x_1 = (r \sin(\xi), -r \cos(\xi) + r) \neq 0$ , also ist  $x_1$  ein Gleichgewicht und es folgt

$$\varphi(t, x_1) = x_1 \text{ für alle } t > 0. \quad (3.6)$$

Da  $x_1$  aber auf dem zu  $r$  gehörigen Lösungskreis liegt, liegt  $x_1 \in N$ . In diesem Bereich ist das geregelte System aber asymptotisch stabil, also folgt  $\varphi(t, x_1) \rightarrow 0$ , was ein Widerspruch zu (3.6) ist. Also kann  $F$  nicht existieren.



# Kapitel 4

## Linearisierung

Im ersten Teil dieser Vorlesung haben wir Methoden zur Berechnung stabilisierender Feedbacks für lineare Kontrollsysteme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  entwickelt. Unter der Bedingung, dass das System stabilisierbar ist (was man durch Bedingungen an das Matrizenpaar  $(A, B)$  sicher stellen kann), haben wir explizite Methoden zur Berechnung eines stabilisierenden linearen Feedbacks  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  betrachtet.

In diesem Kapitel wollen wir beweisen, dass ein asymptotisch stabilisierendes lineares Feedback auch das nichtlineare System (1.1) lokal asymptotisch stabilisiert. Hierzu betrachten wir zunächst einige Grundlagen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.

### 4.1 Die linearisierte Differentialgleichung

Wir betrachten zunächst wieder unsere nichtlineare Differentialgleichung (2.1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

wobei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lipschitz stetige Abbildung ist.

Wir erinnern an die Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , siehe z.B. O. Forster, Analysis II [5].

**Definition 4.1** Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *differenzierbar* in einem Punkt  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , falls eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  existiert, so dass für alle  $x$  aus einer Umgebung  $N$  der 0 gilt

$$f(x^* + x) = f(x^*) + Ax + r(x),$$

wobei  $r : N \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion ist mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\|x\|} = 0.$$

Die Abbildung  $A$  heißt die *Ableitung* von  $f$  in  $x^*$  und wird auch mit  $Df(x^*)$  bezeichnet. Die zugehörige Matrix wird *Jacobi-Matrix* genannt.  $\square$

Sei nun  $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$  ein Gleichgewicht der Gleichung (2.1), also  $f(0) = 0$ .

Falls  $f$  nun in  $x^* = 0$  differenzierbar ist, so existiert nach Definition 4.1 eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und eine Umgebung  $N$  von  $x^* = 0$  mit

$$f(x) = Ax + r(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\|x\|} = 0.$$

Die Abbildung  $A$  fassen wir im Folgenden stets als Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  auf. Für dieses  $A$  betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{4.1}$$

eine lineare Differentialgleichung vom Typ (2.1). Die Gleichung (4.1) wird als *Linearisierung* von (2.1) im Punkt  $x^* = 0$  bezeichnet. Ihre Lösungen mit Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\psi(t, x)$ .

## 4.2 Approximation der Lösungstrajektorien

Unser Ziel ist es nun, die Lösungen  $\varphi(t, x)$  der Differentialgleichung (2.1) mit den Lösungen  $\psi(t, x)$  ihrer Linearisierung (4.1) zu vergleichen, natürlich in der Hoffnung, dass  $\psi(t, x)$  eine brauchbare Approximation von  $\varphi(t, x)$  darstellt. Der folgende Satz zeigt, dass dies in einer Umgebung von  $x^* = 0$  tatsächlich der Fall ist.

**Satz 4.2** Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (2.1) mit Gleichgewicht  $x^* = 0$  und ihre Linearisierung (4.1). Bezeichne die zugehörigen Lösungen mit  $\varphi(t, x)$  und  $\psi(t, x)$ . Seien  $\varepsilon > 0$  und  $T > 0$  gegeben. Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für jeden Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq \delta$  die Abschätzung

$$\|\varphi(t, x) - \psi(t, x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

gilt für alle  $t \in [0, T]$ .

**Beweis:** Wir zeigen zunächst die folgende Eigenschaft der Lösungen von (2.1):

$$\begin{aligned} &\text{Für jedes } T > 0 \text{ existieren ein } \delta > 0 \text{ und ein } \alpha > 0, \text{ so dass } \|\varphi(t, x)\| \leq \alpha \|x\| \\ &\text{gilt für alle Anfangswerte } x \text{ mit } \|x\| \leq \delta \text{ und alle } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Zum Beweis von Eigenschaft (4.2) beachte, dass aus der Lipschitz Stetigkeit von  $f$  die Abschätzung

$$\|f(x)\| \leq L \|x\| \tag{4.3}$$

folgt für eine geeignete Konstante  $L > 0$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq 1$ . Zu dem gegebenen  $T > 0$  setzen wir nun  $\delta := e^{-LT} < 1$ . Die Behauptung ist nun, dass für dieses  $\delta > 0$  die Eigenschaft (4.2) erfüllt ist. Wähle dazu einen Anfangswert  $x$  mit  $\|x\| \leq \delta$ . Sei  $t_0 > 0$  die minimale Zeit mit  $\varphi(t_0, x) \geq 1$ . Wir zeigen zunächst, dass  $t_0 \geq T$  gilt. Für  $t \in [0, t_0]$  gilt mit dem Gronwall-Lemma die Abschätzung

$$\|\varphi(t, x)\| = \|\varphi(t, x) - \varphi(t, 0)\| \leq e^{Lt} \|x - 0\| = e^{Lt} \|x\|, \tag{4.4}$$

und daraus nach Wahl von  $t_0$

$$1 \leq \|\varphi(t_0, x)\| \leq e^{Lt_0} \|x\| \leq e^{Lt_0} \delta \leq e^{Lt_0} e^{-LT} = e^{L(t_0-T)},$$

also  $e^{L(t_0-T)} \geq 1$ . Da  $L > 0$  ist, muss  $t_0 \geq T$  sein, was zu zeigen war. Die behauptete Eigenschaft (4.2) folgt nun sofort aus (4.4) mit  $\alpha = e^{LT}$ .

Wir beweisen nun die Aussage des Satzes und wählen dazu  $\varepsilon > 0$  und  $T > 0$ . Sei  $D = \max_{t \in [0, T]} \|e^{At}\|$  und seien  $\delta > 0$  und  $\alpha > 0$  aus Eigenschaft (4.2). Aus der Eigenschaft von  $r$  folgt, dass ein  $\tilde{\delta} > 0$  existiert mit

$$\|r(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{DT\alpha} \|x\|$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq \tilde{\delta}$ . O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\delta \leq \tilde{\delta}$  und  $\delta \leq \tilde{\delta}/\alpha$ . Wir wählen nun einen Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq \delta$ . Setzen wir  $g(t) = r(\varphi(t, x))$ , so erfüllt die zugehörige Lösung  $\varphi(t, x)$  von (2.1) für  $t \in [0, T]$  offenbar die nichtautonome lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t).$$

Mit der allgemeinen Form der Lösung dieser Gleichung aus [Kontrolltheorie I, Formel (1.12) mit  $u = g$  und  $B = \text{Id}$ ] gilt

$$\varphi(t, x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds = \psi(t, x) + \int_0^t e^{A(t-s)}r(\varphi(s, x))ds.$$

Also folgt

$$\|\psi(t, x) - \varphi(t, x)\| \leq \left\| \int_0^t e^{A(t-s)}r(\varphi(s, x))ds \right\|$$

für alle  $t \in [0, T]$ . Dieser Integralausdruck lässt sich abschätzen mittels

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{A(t-s)}r(\varphi(s, x))ds \right\| &\leq \int_0^t \|e^{A(t-s)}r(\varphi(s, x))\|ds \\ &\leq DT \sup_{s \in [0, T]} r(\underbrace{\varphi(s, x)}_{\|\cdot\| \leq \alpha \|x\| \leq \tilde{\delta}}) \leq DT \frac{\varepsilon}{DT\alpha} \alpha \|x\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

was die Behauptung liefert. □

### 4.3 Stabilität und Linearisierung

Satz 4.2 liefert keine direkte Möglichkeit, Stabilitätseigenschaften zu untersuchen, da die Menge der Anfangswerte, für die er gilt, von der gewählten Zeit  $T$  abhängt. Eine Aussage für  $T \rightarrow \infty$  ist also nicht so ohne weiteres zu erhalten.

Zum Beweis der lokalen asymptotischen Stabilität von (2.1) werden wir daher auf einen Beweis mittels Ljapunov-Funktionen zurück greifen. Trotzdem ist Satz 4.2 im Beweis des folgenden Satzes über die linearisierte asymptotische Stabilität wichtig.

**Satz 4.3** Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (2.1) mit Gleichgewicht  $x^* = 0$  und ihre Linearisierung (4.1). Dann ist das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal exponentiell stabil für Gleichung (2.1) genau dann, wenn es global exponentiell stabil für Gleichung (4.1) ist.

**Beweis:** Sei Gleichung (4.1) exponentiell stabil. Aus [Kontrolltheorie I, Lemma 3.12] folgt dann die Existenz einer bilinearen Ljapunov Funktion  $V(x) = x^T P x$  mit  $c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2$ ,  $DV(x)Ax \leq -c_3 \|x\|^2$  und symmetrischer und positiv definiten Matrix  $P$ . Wegen

$$DV(x)f(x) = DV(x)A(x) + DV(x)r(x) \leq -c_3 \|x\|^2 + 2x^T P r(x) \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \|x\| \|r(x)\|$$

für ein geeignetes  $c_4 > 0$ . Aus der Differenzierbarkeitseigenschaft folgt für alle hinreichend kleinen  $x$ , dass  $\|r(x)\| \leq \frac{c_3}{2c_4} \|x\|$  ist. Es existiert also ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq \delta$  die Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -\frac{c_3}{2} \|x\|^2 \quad (4.5)$$

gilt. Damit erfüllt  $V$  alle Eigenschaften einer lokalen Ljapunov-Funktion für (2.1), woraus die lokale asymptotische Stabilität mit Satz 2.10 folgt. Die lokale exponentielle Stabilität folgt mit Aufgabe 2 vom 2. Übungsblatt, da hier  $DV(x)f(x) \leq -cV(x)$  gilt.

Sei umgekehrt  $x^* = 0$  lokal exponentiell stabil für (2.1). Dann gibt es insbesondere ein  $T > 0$  und ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $\|x\| \leq \delta$  die Ungleichung

$$\|\varphi(T, x)\| \leq \frac{1}{2} \|x\|$$

gilt. Aus Satz 4.2 angewendet mit  $\varepsilon = 1/4$  folgt nun, dass ein  $\delta > 0$  existiert, so dass die Lösungen der linearen Gleichung (4.1) für alle Anfangswerte  $x$  mit  $\|x\| \leq \delta$  die Abschätzung

$$\|\psi(T, x)\| \leq \frac{3}{4} \|x\|$$

erfüllen, woraus wir

$$\|e^{AT}\| = \sup_{\|x\|=\delta} \frac{\|e^{AT}x\|}{\delta} \leq \frac{3}{4}$$

erhalten. Wir zeigen, dass hieraus die exponentielle Stabilität folgt: Sei  $a = \ln(\|e^{AT}\|)/T$ , also  $\|e^{AT}\| = e^{aT}$ . Wegen  $\|e^{AT}\| = 3/4 < 1$  folgt  $a < 0$ . Sei nun  $t > 0$  beliebig und  $k \geq 0$  die größte ganze Zahl mit  $kT \leq t$ . Dann gilt  $kT \geq t - T$  und  $t - kT \leq T$  und damit

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &= \|e^{A(t-kT)} e^{AkT}\| \leq \|e^{A(t-kT)}\| \|e^{AkT}\| \leq e^{\|A\|T} \|e^{AT}\|^k \\ &= e^{\|A\|T} e^{akT} \leq e^{\|A\|T} e^{a(t-T)} = e^{\|A\|T} e^{-aT} e^{at}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun für  $c = e^{\|A\|T} e^{-aT}$  und  $\sigma = -a$  die Abschätzung

$$\|\psi(t, x)\| = \|e^{At}x\| \leq ce^{-\sigma t} \|x\|,$$

also gerade die behauptete exponentielle Stabilität.  $\square$

Wir formulieren zwei Korollare, die sich aus den Ergebnissen ergeben.



**Korollar 4.4** Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (2.1) mit Gleichgewicht  $x^* = 0$ . Dann ist  $x^* = 0$  genau dann lokal exponentiell stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix  $Df(0)$  negativen Realteil haben.

**Beweis:** Nach Satz 4.3 ist  $x^* = 0$  genau dann lokal exponentiell stabil für (2.1), wenn die Linearisierung  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  mit  $A = Df(0)$  exponentiell stabil ist. Nach [Kontrolltheorie I, Satz 3.5] ist dies genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negativen Realteil besitzen.  $\square$

**Korollar 4.5** Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (2.1) mit Gleichgewicht  $x^* = 0$ . Dann ist  $x^* = 0$  genau dann lokal exponentiell stabil, wenn eine lokale bilineare Ljapunov Funktion existiert.

**Beweis:** Wie im Beweis von Satz 4.3 zeigt man, dass die Existenz einer lokalen bilinearen Ljapunov Funktion die lokale exponentielle Stabilität impliziert.

Falls umgekehrt  $x^* = 0$  lokal exponentiell stabil ist, ist die Linearisierung exponentiell stabil, und nach [Kontrolltheorie I, Lemma 3.12] folgt dann die Existenz einer bilinearen Ljapunov Funktion. Der Beweis von Satz 4.3 zeigt dann, dass dies eine lokale bilineare Ljapunov Funktion für (2.1) in  $x^* = 0$  ist.  $\square$

Für lineare Systeme wissen wir, dass exponentielle und asymptotische Stabilität äquivalent sind. Für nichtlineare Systeme ist das nicht der Fall. Insbesondere gilt Satz 4.3 nicht, falls wir für das nichtlineare System (2.1) nur asymptotische Stabilität voraussetzen. Dies zeigt das folgende Beispiel.

**Beispiel 4.6** Betrachte die nichtlineare eindimensionale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3.$$

In Aufgabe 2 vom 1. Übungsblatt wurde gezeigt, dass das Gleichgewicht  $y^* = 0$  tatsächlich asymptotisch stabil, aber nicht exponentiell stabil ist.

Die Linearisierung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = 0$$

und offenbar ist diese Gleichung nicht asymptotisch stabil.  $\square$

## 4.4 Feedback-Stabilisierung mittels Linearisierung

Satz 4.3 hat eine Konsequenz für nichtlineare Kontrollsysteme (1.1). Wenn das Vektorfeld  $f(x, u)$  die Bedingung  $f(0, 0) = 0$  erfüllt und in  $(0, 0)$  stetig differenzierbar ist, so können wir das lineare Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{mit} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{und} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \quad (4.6)$$

definieren. Dieses System heißt die *Linearisierung* von (1.1) im Nullpunkt. Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen der Stabilisierbarkeit von (1.1) und seiner Linearisierung.

**Satz 4.7** Gegeben sei ein nichtlineares Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0,0) = 0$  und Linearisierung (4.6). Dann gilt: ein lineares Feedback  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  stabilisiert den Nullpunkt  $x^* = 0$  von (1.1) lokal exponentiell genau dann, wenn  $F$  die Linearisierung (4.6) global exponentiell stabilisiert.

**Beweis:** Wir setzen  $g(x) = f(x, Fx)$ . Dann gilt mit der Kettenregel

$$Dg(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)F = A + BF.$$

Das mittels  $F$  geregelte lineare System  $\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$  ist also gerade die Linearisierung (im unkontrollierten Sinne (4.1)) des mittels  $F$  geregelten nichtlinearen Systems  $\dot{x}(t) = f(x(t), Fx(t))$ . Damit folgt die Behauptung sofort aus Satz 4.3.  $\square$

**Beispiel 4.8** Betrachte das nichtlineare invertierte Pendel (vgl. Beispiel 1.3)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + g \sin x_1(t) + u(t) \cos x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= u(t) \end{aligned} \right\} =: f(x(t), u(t)).$$

Die Linearisierung (4.6) ergibt hier

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

vgl. [Kontrolltheorie I, Formel (1.4)]. In Aufgabe 2 vom 7. Übungsblatt zur Kontrolltheorie I wurde ein stabilisierendes lineares Feedback  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  für dieses lineare System berechnet. Die zugehörige Matrix  $F \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$  lautet

$$F = \left( -\frac{g+k^2}{g^2} - \frac{4k}{g} - 6 - g, \quad -\frac{k}{g^2} - \frac{4}{g} - 4 + k, \quad \frac{1}{g}, \quad \frac{k}{g^2} + \frac{4}{g} \right)$$

Abbildung (4.1) zeigt, dass dieses Feedback auch das nichtlineare Pendel stabilisiert. Die Abbildung zeigt die Komponenten der Trajektorie  $\varphi(t, x, F)$  für  $x = (1/2, 0, 0, 0)^T$ .  $\square$

**Beispiel 4.9** Betrachte wiederum Brocketts nichtholonomen Integrator, vgl. Beispiel 3.5.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t)u_1(t) \end{aligned}$$

Da das Vektorfeld offensichtlich Lipschitz in  $u$  ist, liefert jedes stabilisierende lineare Feedback automatisch ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Da ein solches nach Brocketts Bedingung nicht existieren kann, kann das linearisierte System folglich nicht stabilisierbar sein. Wir wollen diese Tatsache noch einmal explizit nachprüfen:

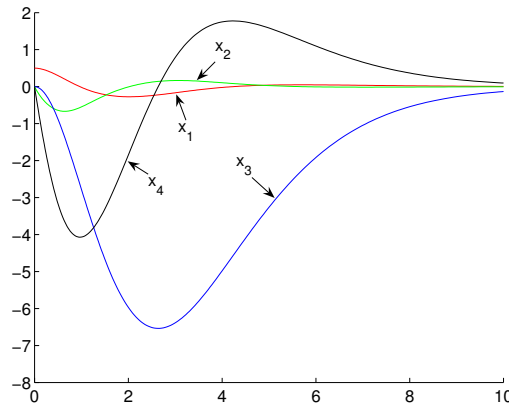


Abbildung 4.1: Lösungstrajektorie des nichtlinearen Pendels mit stabilisierendem linearem Feedback

Ausrechnen der Ableitungen liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir (4.6) mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Die dritte Zeile der linearisierten Differentialgleichung ergibt sich damit zu

$$\dot{x}_3(t) = 0,$$

d.h., egal wie wir  $u(t)$  bzw.  $F$  wählen gilt für die Lösung stets

$$\varphi_3(t, x, u) = x_3.$$

Die Lösung kann also nicht nach  $x^* = 0$  konvergieren, weswegen kein stabilisierendes Feedback für die Linearisierung existieren kann.  $\square$

## 4.5 Tracking Kontrolle

In der Praxis ist man oft nicht an der Stabilisierung eines Gleichgewichtes  $x^*$  sondern an der (zumindest lokalen) Stabilisierung einer Referenzlösung  $\varphi_r(t) = \varphi(t, x_0, u_r)$  mit zugehöriger Kontrollfunktion  $u_r(t)$  interessiert. Eine solche Lösung kann z.B. mit Methoden der optimalen Steuerung berechnet werden. Weicht dann der tatsächliche Anfangszustand des Systems  $x$  von  $x_0$  ab oder stimmt das zur Berechnung von  $\varphi_r(t)$  verwendete Modell

nicht hinreichend gut mit dem tatsächlichen System überein, können sich nicht zu tolerierende Abweichungen zwischen  $\varphi(t, x, u_r)$  und  $\varphi_r(t)$ , die man durch die Stabilisierung der Referenzlösung mittels Feedback vermeiden möchte.

Formal bedeutet dies, dass man ein Feedback  $F_r(t, x)$  finden möchte, so dass die Ungleichung

$$\|\varphi(t, t_0, x, F_r) - \varphi_r(t)\| \leq \beta(\|x - \varphi_r(t_0)\|, t - t_0) \quad (4.9)$$

für alle  $t_0 \geq 0$ , alle  $x$  aus einer Umgebung  $B_\varepsilon(\varphi_r(t_0))$  von  $\varphi_r(t_0)$ , alle  $t \geq t_0$  und ein  $\beta \in \mathcal{KL}$  ist. Hierbei bezeichnet  $t_0$  die Anfangszeit der Lösung  $\varphi(t, t_0, x, F)$ , d.h. es gilt  $\varphi(t_0, t_0, x, F) = x$ .

Dies Problem kann wiederum mit (nun zeitvarianten) Ljapunov-Funktionen behandelt werden. Hierzu dient die folgende Definition, die für zeitvariante unkontrollierte Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t)) \quad (4.10)$$

formuliert ist, deren Lösungen mit Anfangszeit  $t_0$  und Anfangswert  $x$  mit  $\varphi(t, t_0, x)$  bezeichnen.

**Definition 4.10** Betrachte eine Differentialgleichung (4.10), eine Referenzlösung  $\varphi_r(t)$  von (4.10) und ein  $\varepsilon > 0$ . Sei  $S := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \geq 0, x \in B_\varepsilon(\varphi_r(t))\}$ . Eine stetige Funktion  $V : S \rightarrow \mathbb{R}$ , die für alle  $(t, x) \in S$  mit  $x \neq 0$  stetig differenzierbar ist, heißt *lokale zeitvariante Ljapunov-Funktion* bzgl. der Referenztrajektorie  $\varphi_r(t)$ , falls Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  und eine stetige Funktion  $W : B_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass die Ungleichungen

$$W(x) > 0, \quad (4.11)$$

$$\alpha_1(\|x - \varphi_r(t)\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x - \varphi_r(t)\|) \quad (4.12)$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)g(t, x) \leq -W(x - \varphi_r(t)) \quad (4.13)$$

für alle  $t \geq 0$  und  $x \in B_\varepsilon(\varphi_r(t)) \setminus \{0\}$  gelten.  $\square$

**Satz 4.11** Betrachte eine Differentialgleichung (2.1) und eine Referenzlösung  $\varphi_r(t)$  von (2.1). Angenommen, es existiert eine lokale Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 2.7. Dann ist die Referenzlösung  $\varphi_r(t)$  lokal asymptotisch stabil im Sinne der Ungleichung (4.9).

Hierbei ist die Vergleichsfunktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus (4.9) gegeben durch

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(r))), \quad (4.14)$$

wobei  $\mu$  die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r \quad (4.15)$$

ist mit  $g$  aus Lemma 2.8 (das mit leichten Modifikationen im Beweis auch dann funktioniert, wenn  $V$  zeitabhängig ist).

**Beweis:** Beachte, dass die Ableitung von  $V$  im zeitvarianten Fall durch

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \left( V(t, \varphi(t, t_0, x)) \right) = \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t_0, x)g(t_0, x)$$

gegeben ist. Mit dieser Beobachtung erhält man ganz analog zum Beweis von Satz 2.10 die Ungleichung

$$V(t, \varphi(t, t_0, x)) \leq \mu(t - t_0, V(t_0 x)) \text{ für alle } t \geq 0. \quad (4.16)$$

Hieraus folgt, ebenfalls analog zum Beweis von Satz 2.10, die Behauptung.  $\square$

Für die lokale Lösung dieses Problems kann man nun wiederum lineare Techniken verwenden, wenn man das System nicht im Gleichgewicht  $x^* = 0$  sondern entlang der Referenzlösung  $\varphi_r$  linearisiert. Man berechnet dazu

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_r(t), u_r(t)) \text{ und } B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi_r(t), u_r(t)) \quad (4.17)$$

und erhält so das lineare *zeitvariante* System

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

Kann man nun ein exponentiell stabilisierendes lineares Feedback  $F(t)$  für dieses System und eine zugehörige Ljapunov-Funktion finden, so stabilisiert das Feedback-Gesetz  $F_r(t, x) = F(t)(x - \varphi_r(t)) + u_r(t)$  unter geeigneten Gleichmäßigkeitsbedingungen auch das nichtlineare System entlang der Referenzlösung (Details dazu werden in einer Übungsaufgabe ausgearbeitet). Ein Problem hierbei ist allerdings, dass die Stabilisierungstheorie für lineare zeitvariante Systeme komplizierter ist als die für lineare zeitinvariante Systeme. Insbesondere ist eine Charakterisierung von Stabilität über die Eigenwerte der Matrizen  $A(t) + B(t)F(t)$  nicht mehr möglich.



# Kapitel 5

## Kontroll–Ljapunov–Funktionen

In diesem Kapitel wollen wir ein wesentliches Hilfsmittel bei der Betrachtung von Stabilität und Stabilisierbarkeit nichtlinearer Kontrollsysteme betrachten, die Kontroll–Ljapunov–Funktion. Dies ist eine direkte Verallgemeinerung der Ljapunov–Funktion für unkontrollierte Differentialgleichungen, wobei wir in der Definition allerdings keine Differenzierbarkeit annehmen. Zur Vereinfachung der Darstellung der Ergebnisse in diesem Abschnitt nehmen wir durchgehend an, dass die Funktion  $\gamma$  aus Definition 3.1(i) eine konstante Funktion ist, also  $\gamma(r) \equiv C \in \mathbb{R}$  ist und schreiben kurz  $U_C = \{u \in U \mid \|u\| \leq C\}$  und  $\mathcal{U}_C = L_\infty(\mathbb{R}, U_C)$ .

### 5.1 Definition und alternative Darstellungen

**Definition 5.1** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$  und eine offene Umgebung  $O \subset \mathbb{R}^n$  von 0. Eine stetige Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *lokale Kontroll–Ljapunov–Funktion* (clf), falls Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ , eine stetige Funktion  $W : O \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass die Ungleichungen

$$W(x) > 0, \tag{5.1}$$

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{5.2}$$

und

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \in [0, \tau(x, u))} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \leq V(x) \tag{5.3}$$

gelten für alle  $x \in O \setminus \{0\}$  und ein  $C > 0$ . Hierbei bezeichnet

$$\tau(x, u) := \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(t, x, u) \notin O\}$$

mit der Konvention  $\varphi(t, x, u) \notin O$  falls die Lösung zur Zeit  $t$  nicht mehr existiert.

Die Funktion  $V$  heißt *globale Kontroll–Ljapunov–Funktion*, falls  $V$  und  $W$  diese Bedingungen für  $O = \mathbb{R}^n$  erfüllen.

Das Paar  $(V, W)$  wird dabei auch als *Kontroll–Ljapunov–Paar* bezeichnet.  $\square$

**Bemerkung 5.2** Analog zu Lemma 2.8 können wir bei Bedarf annehmen, dass  $W(x) = g(V(x))$  ist für eine global Lipschitz–stetige Funktion  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  und alle  $x \in O$ .  $\square$

Das folgende Lemma zeigt, dass man Bedingung (5.3) schwächer formulieren kann. Für eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  definieren wir dazu

$$\tau_K(x, u) := \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(t, x, u) \notin K\}.$$

**Lemma 5.3** Eine stetige Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  erfüllt die Bedingung (5.3) genau dann, wenn sie für ein  $T > 0$  und jede kompakte Menge  $K \subset O$  die Bedingung

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \in [0, \min\{T, \tau_K(x, u)\}]} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \leq V(x) \quad (5.4)$$

erfüllt.

**Beweis:** Die Implikation “(5.3)  $\Rightarrow$  (5.4)” ist unmittelbar klar.

Zum Beweis der Implikation “(5.4)  $\Rightarrow$  (5.3)” wählen wir eine abzählbare Familie von kompakten Mengen  $\{K_0, K_1, K_2, \dots\}$  mit

$$K_j \subset \text{int } K_{j+1} \quad \text{und} \quad \bigcup_{j \geq 0} K_j = O.$$

Für jedes  $x \in O$  bezeichne  $K(x)$  die kleinste der Mengen  $K_j$ , für die  $x \in \text{int } K(x)$  gilt. Für jedes  $i \in \mathbb{N}_0$ , jedes  $x \in O$  und jedes  $\varepsilon > 0$  existiert wegen (5.4) ein  $u_{x, \varepsilon} \in \mathcal{U}_C$  mit

$$\sup_{t \in [0, t_i]} \left\{ V(\varphi(t, x, u_{x, \varepsilon})) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{x, \varepsilon})) ds - V(x) \right\} \leq \varepsilon \quad (5.5)$$

mit  $t_i = \min\{T, \tau_{K(x_i)}(x_i, u_{x_i, \varepsilon_i})\}$ . Nun wählen wir die Folge  $\varepsilon_i = \varepsilon/2^{i+1}$  und definieren induktiv

$$x_0 = x, \quad x_{i+1} = \varphi(t_i, x, u_{x_i, \varepsilon_i})$$

für alle  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Beachte, dass aus der Definition von  $\tau_K$  und der Kompaktheit von  $K(x)$  die Inklusion  $x_{i+1} \in K(x_i) \subset O$  folgt. Zudem gilt

$$K(x_i) \neq K(x_{i+1}) \Leftrightarrow \tau_{K(x_i)}(x_i, u_{x_i, \varepsilon_i}) \leq T. \quad (5.6)$$

Definieren wir nun  $T_i = \sum_{j=0}^{i-1} t_j$  und setzen die Kontrollen mittels

$$u(t) = u_{x_i, \varepsilon_i}(t - T_i), \quad t \in [T_i, T_{i+1})$$

zusammen, so erhalten wir

$$\varphi(T_i + t, x, u) = \varphi(t, x_i, u_{x_i, \varepsilon_i})$$

für alle  $t \in [0, t_i)$ . Damit erhalten wir aus (5.5) für jedes  $i = 0, 1, 2, \dots$  und jedes  $t \in [T_i, T_{i+1})$  die Ungleichung

$$V(\varphi(t, x, u)) + \int_{T_i}^t W(\varphi(s, x, u)) ds - V(x_i) \leq \varepsilon_i. \quad (5.7)$$



und daraus für  $t = T_{i+1}$  insbesondere

$$V(x_{i+1}) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} W(\varphi(s, x, u)) ds - V(x_i) \leq \varepsilon_i. \quad (5.8)$$

Addieren wir nun (5.8) für  $i = 1, \dots, k-1$  und (5.7) für  $i = k$  so erhalten wir

$$V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds - V(x) \leq \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \leq \varepsilon$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $t \in [T_k, T_{k+1}]$ . Daraus folgt

$$\sup_{t \in [0, T^*)} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds - V(x) \right\} \leq \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \leq \varepsilon. \quad (5.9)$$

mit  $T^* = \lim_{i \rightarrow \infty} T_i$ . Da  $x_i \in O$  liegt, folgt  $T^* \leq \tau(x, u)$ . Falls  $T^* = \infty$  ist oder die Lösung  $\varphi(T^*, x, u)$  nicht mehr existiert, folgt  $T^* = \tau(x, u)$ . Wir zeigen nun noch, dass  $T^* = \tau(x, u)$  auch gilt, wenn  $T^*$  endlich ist und die Lösung zum Zeitpunkt  $T^*$  noch existiert.

In diesem Fall gilt wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  die Gleichung  $\varphi(T^*, x, u) = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i =: x_\infty$ . Um  $T^* = \tau(x, u)$  zu zeigen müssen wir beweisen,  $x_\infty \notin O$  gilt und nehmen dazu das Gegenteil an, also  $x_\infty \in O$ . Da die Mengen  $K_j$  die Menge  $O$  ausschöpfen, existiert ein  $j \in \mathbb{N}_0$  mit  $x_\infty \in K_j$ . Wegen der Inklusionseigenschaft der  $K_j$  folgt dann  $x_\infty \in \text{int } K_{j+1}$ , und da das Innere  $\text{int } K_{j+1}$  eine offene Menge ist, existiert ein  $i^* > 0$  mit

$$x_i \in K_{j+1} \quad \text{für alle } i \geq i^*.$$

Definieren wir nun zu jedem  $x_i$  den Index  $j(i)$  so, dass  $K(x_i) = K_{j(i)}$  gilt, so folgt  $j(i) \leq j+1$  für alle  $i \geq i^*$ . Zudem ist  $j(i)$  nach Konstruktion von  $K(x_i)$  und der Inklusionseigenschaft der  $K_j$  eine monoton wachsende Folge, also muss sie konvergieren. Da alle  $j(i)$  aber ganze Zahlen sind, muss  $j(i) = j(i+1)$  sein für alle hinreichend großen  $i$ . Aus (5.6) folgt  $t_i = T$  für alle hinreichend großen  $i$ , was der Endlichkeit von  $T^* = \sum_{i=0}^{\infty} t_i$  widerspricht.

Wir erhalten also in allen Fällen  $T^* = \tau(x, u)$ . Da zudem  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt (5.3) aus (5.9).  $\square$

Im differenzierbaren Fall können wir (5.3) durch eine Bedingung ersetzen, die ähnlich zu der für unkontrollierte Differentialgleichungen ist.

**Lemma 5.4** Für eine stetig differenzierbare Funktion  $V : O \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gilt (5.3) genau dann, wenn die Ungleichung

$$\inf_{u \in U_C} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) \quad (5.10)$$

für alle  $x \in O$  gilt.

**Beweis:** Vorüberlegung: Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Stetigkeit von  $DV$ ,  $\varphi$  und  $W$  folgt

$$\begin{aligned} V(\varphi(t, x, u)) - V(x) &= \int_0^t DV(\varphi(s, x, u))f(\varphi(s, x, u), u(s)) ds \\ &= \int_0^t DV(x)f(x, u(s)) ds + r_V(t, x, u) \\ &= DV(x) \int_0^t f(x, u(s)) ds + r_V(t, x, u) \end{aligned} \quad (5.11)$$

und

$$\int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds = tW(x) + r_W(t, x, u). \quad (5.12)$$

Für jede kompakte Menge  $K \subset O$  lassen sich die Restterme hierbei für alle  $x \in K$  abschätzen durch

$$\|r_V(t, x, u)\| + \|r_W(t, x, u)\| \leq \eta_K(t)$$

für ein  $\eta_K : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\eta_K(t)/t \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ . Nun zeigen wir die einzelnen Implikationen.

“(5.3)  $\Rightarrow$  (5.10)”: Sei  $x \in O$ . Dann existiert eine kompakte Menge  $K \subset O$  mit  $\varphi(s, x, u) \in K$  für alle  $u \in \mathcal{U}_C$  und alle hinreichend kleinen  $t > 0$ . Aus (5.11), (5.12) und (5.3) folgt daher

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \frac{1}{t} DV(x) \int_0^t f(x, u(s)) ds - W(x) \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \left\{ \frac{1}{t} (V(\varphi(t, x, u)) - V(x)) - \frac{1}{t} \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} + \frac{\eta_D(t)}{t} \leq \frac{\eta_D(t)}{t}. \end{aligned}$$

Für jedes  $u \in \mathcal{U}_C$  gilt nun aber

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(x, u(s)) ds \in \text{cl co } f(x, U_C),$$

wobei  $\text{cl co } f(x, U_C)$  den Abschluss der konvexen Hülle von  $f(x, U_C)$  bezeichnet. Es gilt also für  $t \rightarrow 0$

$$\inf_{w \in \text{co } f(x, U_C)} DV(x)w = \inf_{w \in \text{cl co } f(x, U_C)} DV(x)w \leq -W(x).$$

Für jedes Element aus der konvexen Hülle gilt nun aber

$$w = \sum_i \lambda_i w_i$$

mit  $w_i \in f(x, U_C)$  und  $\sum \lambda_i = 1$ . Damit folgt für jedes  $w \in \text{co } f(x, U_C)$

$$DV(x)w = \sum_i DV(x)\lambda_i w_i \geq \min_i DV(x)w_i.$$

Folglich erhalten wir

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} DV(x)f(x, u) = \inf_{w \in f(x, U_C)} DV(x)w \leq \inf_{w \in \text{co } f(x, U_C)} DV(x)w \leq -W(x),$$

also (5.10).

“(5.10)  $\Rightarrow$  (5.3)”: Wir beweisen (5.4) für  $T = 1$ . Sei dazu  $K \subset O$  eine beliebige kompakte Menge. Für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $\Delta t > 0$  so klein, dass

$$\eta_K(t) \leq \varepsilon t \quad \text{für alle } t \leq \Delta t \quad (5.13)$$

gilt.

Wähle nun  $x_0 \in K$ .

Wir identifizieren im Folgenden einen Kontrollwert  $u \in U_C$  mit der konstanten Kontrollfunktion  $t \mapsto u$ . Mit dieser Konvention erhalten wir aus (5.11), (5.12) und (5.10) die Ungleichung

$$\inf_{u_0 \in U_C} \left\{ V(\varphi(t, x_0, u_0)) + \int_0^t W(\varphi(s, x_0, u_0)) ds - V(x_0) \right\} \leq \eta_K(t) \leq \varepsilon t. \quad (5.14)$$

für  $t \leq \min\{\Delta t, \tau_K(x_0, u_0)\}$ . Falls  $\tau_K(x_0, u_0) > \Delta t$  ist, können wir für  $x_1 = \varphi(\Delta t, x_0, u_0) \in K_D$  die gleiche Abschätzung erhalten, also

$$\inf_{u_1 \in U_C} \left\{ V(\varphi(t, x_1, u_1)) + \int_0^t W(\varphi(s, x_1, u_1)) ds - V(x_1) \right\} \leq \varepsilon t \quad (5.15)$$

für  $t \leq \min\{\Delta t, \tau_K(x_1, u_1)\}$ . Für die Kontrollfunktion  $u_2^*$  definiert durch  $u_2^*(t) = u_0$ ,  $t \in [0, \Delta t)$ ,  $u_2^*(t) = u_1$ ,  $t \geq \Delta t$  erhalten wir

$$\varphi(s, x_0, u_0) = \varphi(s, x_0, u_2^*) \text{ und } \varphi(s, x_1, u_1) = \varphi(\Delta t + s, x_0, u_2^*), \text{ jeweils für } s \in [0, \Delta t].$$

Damit können wir (5.15) schreiben als

$$\inf_{u_1 \in U_C} \left\{ V(\varphi(\Delta t + t, x_0, u_2^*)) + \int_{\Delta t}^{\Delta t + t} W(\varphi(s, x_0, u_2^*)) ds - V(\varphi(\Delta t, x_0, u_0)) \right\} \leq \varepsilon t. \quad (5.16)$$

Addieren von (5.14) und (5.16) (für  $i = 2$ ) und direkte Anwendung von (5.14) (für  $i = 1$ ) liefert dann

$$\inf_{u_0, u_1 \in U_C} \sup_{t \in [0, \min\{2\Delta t, \tau_K(x_0, u_2^*)\}]} \left\{ V(\varphi(t, x_0, u_2^*)) + \int_0^t W(\varphi(s, x_0, u_2^*)) ds - V(x_0) \right\} \leq 2\varepsilon \Delta t.$$

Setzen wir nun  $\Delta t = 1/N$  für ein  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass (5.13) gilt, und wenden die obige Konstruktion iterativ für  $i = 1, \dots, N-1$  an so erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf_{u_0, \dots, u_{N-1} \in U_C} \sup_{t \in [0, \min\{N\Delta t, \tau_K(x_0, u_2^*)\}]} \left\{ V(\varphi(t, x, u_N^*)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u_N^*)) ds - V(x) \right\} \\ \leq N\varepsilon \Delta t = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $u_N^* \in \mathcal{U}_C$  (als stückweise konstante Funktion), folgt daraus

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \in [0, \min\{1, \tau_K(x, u)\}]} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \leq V(x) + \varepsilon$$

und da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt (5.4) mit  $T = 1$  und daher mit Lemma 5.3 auch (5.3).  $\square$

## 5.2 Kontroll–Ljapunov–Funktion $\Leftrightarrow$ asymptotische Kontrollierbarkeit

Wir formulieren nun die analogen Resultate zu den Sätzen 2.10 und 2.13.

**Satz 5.5** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0,0) = 0$ . Angenommen, es existiert eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 5.1. Dann ist das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) asymptotisch kontrollierbar.

Hierbei ist die Vergleichsfunktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  aus Definition 3.1 gegeben durch

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\mu(t, (1 + \delta)\alpha_2(r))), \quad (5.17)$$

wobei  $\mu$  die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r \quad (5.18)$$

ist mit  $g$  aus Bemerkung 5.2 ist und  $\delta > 0$  beliebig ist.

**Beweis:** Wir fixieren ein beliebiges  $\delta > 0$  und wählen ein  $C > 0$  so dass die Menge  $O$  eine echte Umgebung von  $V^{-1}([0, C + \delta C])$  ist und setzen  $N = V^{-1}([0, C])$ . Sei  $x \in N \setminus \{0\}$  (für  $x = 0$  folgt die Behauptung mit  $u \equiv 0$ ). Aus der Definition der Ljapunov-Funktion und Bemerkung 5.2 folgt, dass für gegebenes  $\varepsilon > 0$  ein  $u \in \mathcal{U}_C$  existiert mit

$$V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t g(V(\varphi(s, x, u)))ds \leq V(x) + \delta V(x)$$

für alle  $t \in [0, \tau(x, u)]$ . Aus dieser Ungleichung folgt  $\tau(x, u) = \infty$ , da  $V(\varphi(t, x, u)) \leq V(x) + \delta V(x) < (1 + \delta)C$  ist und  $\varphi(t, x, u)$  daher für alle  $t \geq 0$  in  $V^{-1}([0, C + \delta]) \subset O$  liegt.

Analog zum Beweis von Satz 2.10 folgt aus dieser Integralungleichung die Ungleichung

$$V(\varphi(t, x, u)) \leq \mu(t, (1 + \varepsilon)V(x)).$$

Damit folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 2.10.  $\square$

Als nächstes betrachten wir eine Umkehrung von Satz 5.5.

**Satz 5.6** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0,0) = 0$ . Wenn das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) asymptotisch kontrollierbar ist, dann existiert eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Ljapunov-Funktion  $V$  im Sinne von Definition 5.1.

**Beweis:** Die Konstruktion ist ganz ähnlich zum Beweis von Satz 2.13; wie dort beschränken wir uns auf den globalen Fall. Wir wählen  $W$  wie  $\widetilde{W}$  im Beweis von Satz 2.13 und definieren

$$V(x) := \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \int_0^\infty W(\varphi(s, x, u))ds.$$

Die oberen und unteren Schranken  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  leitet man analog zum Beweis von Satz 2.13 her. Zudem gilt

$$\begin{aligned} V(x) &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \int_0^\infty W(\varphi(s, x, u))ds \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u))ds + \int_t^\infty W(\varphi(s, x, u))ds \right\} \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u))ds + \int_0^\infty W(\varphi(s, \varphi(t, x, u), u(t + \cdot)))ds \right\} \\ &\geq \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u))ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\}, \end{aligned}$$

also (5.3).

Mit [Kontrolltheorie I, Satz 5.2] folgt, dass  $V$  für jedes  $t \geq 0$  die Gleichung

$$V(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\}$$

erfüllt. Mit Hilfe dieser Gleichung beweisen wir nun die Stetigkeit von  $V$ : Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann können wir für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  und jedes  $t > 0$  eine Kontrollfunktion  $u_{x,t} \in \mathcal{U}_C$  finden, so dass

$$\begin{aligned} V(x) &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\} \\ &\geq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{x,t})) - \varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Hieraus folgt, dass Zeiten  $T(t) \in [0, t]$  existieren, so dass  $\varphi(T(t), x, u_{x,t})$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, da ansonsten das Integral über  $W$  für  $t \rightarrow \infty$  divergieren würde, was nicht sein kann, da  $V(x) + \varepsilon$  eine endliche obere Schranke für dieses Integral ist. Zudem gilt

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{x,t})) - \varepsilon \\ &= \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + \int_{T(t)}^t W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{x,t})) - \varepsilon \\ &\geq \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(T(t), x, u_{x,t})) - \varepsilon \end{aligned}$$

Für gegebenes  $R > 0$  wählen wir nun  $\tilde{\varepsilon}$  so klein und  $t > 0$  so groß, dass

$$\|\varphi(T(t), x, u_{x,t})\| \leq \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \alpha_2(2\tilde{\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

gilt für alle  $x$  mit  $\|x\| \leq R$ . Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq R$  und  $\|y\| \leq R$  folgt dann

$$\begin{aligned} V(x) - V(y) &\leq \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{y,t})) ds + V(\varphi(T(t), x, u_{y,t})) \\ &\quad - \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds - V(\varphi(T(t), y, u_{y,t})) + \varepsilon \\ &\leq \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{y,t})) - W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds + V(\varphi(T(t), x, u_{y,t})) + \varepsilon \end{aligned}$$

Falls nun  $\|x - y\|$  klein ist, folgt aus Gronwalls Lemma, dass auch

$$\|\varphi(\tau, x, u_{y,t}) - \varphi(\tau, y, u_{y,t})\|$$

für  $\tau \in [0, t]$  klein ist. Falls also  $\|x - y\|$  hinreichend klein ist, erhalten wir wegen  $T(t) \leq t$

$$\int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{y,t})) - W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds \leq \varepsilon$$

und

$$\|\varphi(T(t), x, u_{y,t})\| \leq \|\varphi(T(t), y, u_{y,t})\| + \tilde{\varepsilon} \leq 2\tilde{\varepsilon}.$$

Aus dieser zweiten Ungleichung folgt

$$V(\varphi(T(t), x, u_{y,t})) \leq \alpha_2(\|\varphi(T(t), x, u_{y,t})\|) \leq \alpha_2(2\tilde{\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

Also gilt für  $x$  hinreichend nahe an  $y$  die Ungleichung

$$V(x) - V(y) \leq 3\varepsilon,$$

womit aus Symmetriegründen auch die Ungleichung

$$|V(x) - V(y)| \leq 3\varepsilon$$

folgt. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt also die Stetigkeit von  $V$ .  $\square$

Beachte, dass wir hier — im Gegensatz zum Beweis von Satz 2.13 — keine Lipschitz-Stetigkeit erhalten. Es gibt allerdings (sehr komplizierte) Konstruktionen, mit denen man die Existenz Lipschitz-stetiger Kontroll-Ljapunov-Funktionen beweisen kann. Allerdings ist selbst für Lipschitz-stetige  $V$  der Satz 2.16 nicht anwendbar, da das “inf” vor der Ableitung nicht zu den Voraussetzungen dieses Satzes passt.

**Beispiel 5.7** Wir betrachten wiederum Artsteins Kreise (vgl. (3.3)), gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left( -x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \right) u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left( -2x_1(t)x_2(t) \right) u(t) \end{aligned}$$

Betrachte die Funktion

$$V(x) = \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} - |x_1|.$$

Wegen  $\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}/2 \geq |x_1|$  und  $\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}/2 \geq \sqrt{3}|x_1|/2$  erhält man die untere Schranke  $\alpha_1(r) = \sqrt{3}r/2$ ; als obere Schranke kann man  $\alpha_2(r) = 2r$  wählen.

Die Funktion ist differenzierbar für  $x_1 \neq 0$ . Für  $x_1 > 0$  errechnet man

$$DV(x)f(x, -1) = -W(x)$$

und für  $x_1 < 0$  erhalten wir

$$DV(x)f(x, 1) = -W(x) \tag{5.19}$$

mit

$$W(x) = \frac{4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}}{\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}}.$$

Diese Funktion ist positiv für  $x \neq 0$ : Für  $x_1^2 - x_2^2 < 0$  folgt dies, weil alle Summanden im Zähler positiv sind. Für  $x_1^2 - x_2^2 \geq 0$  (also  $|x_1| \geq |x_2|$ ) erhalten wir für den Zähler

$$\begin{aligned}
& 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} \\
& \geq 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)(\sqrt{4x_1^2} + \sqrt{3x_2^2}) \\
& = 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)(2|x_1| + \sqrt{3}|x_2|) \\
& = 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - 2|x_1|^3 - \underbrace{\sqrt{3}x_1^2|x_2|}_{\leq \sqrt{3}|x_1|^3} + 2x_2^2|x_1| + \sqrt{3}|x_2|^3 \\
& \geq (2 - \sqrt{3})|x_1|^3 + 4|x_1|x_2^2 + \sqrt{3}|x_2|^3 > 0
\end{aligned}$$

für  $x \neq 0$ . Wenn wir nun zu einem Anfangswert  $x \in \mathbb{R}^2$  mit  $x_1 \neq 0$  die Kontrollfunktion  $u_x \equiv -1$  falls  $x_1 > 0$  bzw.  $u_x \equiv 1$  falls  $x_1 < 0$  wählen, so wissen wir aus der expliziten Darstellung der Trajektorien in Abschnitt 3.3, dass die  $x_1$ -Komponente der Lösungen für alle Zeiten positiv bleibt. Die Differentialungleichung (5.19) ist also für alle  $x = \varphi(t, x, u_x)$  gültig und wir können sie integrieren, was die Ungleichung

$$V(\varphi(t, x, u_x)) + \int_0^t W(\varphi(\tau, x, u_x))d\tau \leq V(x)$$

für alle  $t \geq 0$  liefert. Da alle Funktionen in dieser Ungleichung stetig in  $x$  sind (wenn  $u_x$  festgehalten wird) gilt die Ungleichung tatsächlich auch für  $x_1 = 0$ , wobei wir wahlweise  $u_x \equiv -1$  oder  $u_x \equiv 1$  verwenden können. Folglich erhalten wir (5.3), womit wir nachgewiesen haben, dass  $V$  eine Kontroll-Ljapunov-Funktion ist.  $\square$

**Bemerkung 5.8** Beachte, dass der Beweis explizit die Kenntnis der Lösungen des Systems verwendet, da wir ausgenutzt haben, dass die Lösungen zu den verwendeten Kontrollen die Nichtdifferenzierbarkeitsstellen  $x_1 = 0$  nicht überqueren. Auf dem 5. Übungsblatt wird eine Methode hergeleitet, mit der die Bedingung (5.3) auch für  $x_1 = 0$  aus den Richtungsableitungen von  $V$  in Richtung  $f$  berechnet werden kann, obwohl die Funktion dort nicht differenzierbar ist.  $\square$

Diese Kontroll-Ljapunov-Funktion  $V$  wurde von A. Bacciotti und F. Ceragioli [2] als Beispiel angegeben. Beachte, dass  $V$  in diesem Beispiel nicht differenzierbar ist. Wir werden im nächsten Kapitel beweisen, dass für dieses Beispiel tatsächlich überhaupt keine differenzierbare Kontroll-Ljapunov-Funktion existieren kann.

Zunächst aber betrachten wir hier ein “umgekehrtes” Resultat, nämlich eine hinreichende Bedingung, unter der eine differenzierbare Kontroll-Ljapunov-Funktion existiert.

**Satz 5.9** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, u^*) = 0$  für ein  $u^* \in U$ . Wenn das Gleichgewicht  $x^* = 0$  lokal (bzw. global) Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar ist, dann existiert eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Ljapunov-Funktion  $V \in C^\infty(O, \mathbb{R})$  im Sinne von Definition 5.1.

**Beweis:** Nach Satz 2.13 existiert eine stetig differenzierbare Ljapunov-Funktion  $V$  für das Feedback-geregelte Vektorfeld  $g(x) = f(x, F(x))$ . Diese Funktion erfüllt (5.1), (5.2) und (5.10), weswegen sie nach Lemma 5.4 eine Kontroll-Ljapunov-Funktion ist.  $\square$



## Kapitel 6

# Konstruktive nichtlineare Methoden

Das Gebiet der “konstruktiven nichtlinearen Regelung” befasst sich mit Methoden, mit denen explizite Formeln für Feedback–Regler berechnet werden können.

In diesem Kapitel werden wir zwei konstruktive Verfahren kennen lernen: Eines zur Berechnung eines stabilisierenden Feedbacks aus einer (differenzierbaren) Kontroll–Ljapunov–Funktion und eines zur Berechnung einer differenzierbaren Kontroll–Ljapunov–Funktion.

Typisch an den Methoden der konstruktiven nichtlinearen Regelung ist, dass sie nicht für allgemeine nichtlineare Kontrollsysteme der Form (1.1) funktionieren. Statt dessen benötigt man geeignete Strukturannahmen an  $f(x, u)$ , die wir in den jeweiligen Abschnitten definieren werden.

### 6.1 Sontags Universelle Formel

Wir betrachten in diesem Abschnitt *kontroll–affine* Kontrollsysteme. Diese sind gegeben durch

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) := f_0(x(t)) + \sum_{k=1}^m f_k(x)u_k(t) \quad (6.1)$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in U = \mathbb{R}^m$ , wobei die  $f_i$  lokal Lipschitz stetige Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$  sind.

Zudem betrachten wir in diesem Abschnitt stetige Feedbacks  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die die folgende Annahme erfüllen.

$$F \text{ ist Lipschitz–stetig auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ und erfüllt } F(0) = 0 \quad (6.2)$$

Die Bedingung  $F(0) = 0$  kann hierbei o.B.d.A. angenommen werden, ansonsten transformieren wir  $f$  und  $F$  mittels  $\tilde{f}(x, u) = f(x, u + F(0))$ ,  $\tilde{F}(x) = F(x) - F(0)$ .

Beachte, dass  $f(x, F(x))$  für ein solches Feedback nicht unbedingt Lipschitz–stetig in  $x = 0$  sein muss. Wir schwächen unsere bisher gemachten Bedingungen also etwas ab. Insbesondere müssen die Lösungen von (6.1) mit diesem Feedback für Anfangswert  $x = 0$  nicht

eindeutig sein. Wenn das Feedback  $F$  allerdings asymptotisch stabilisierend ist, erhalten wir wieder Eindeutigkeit, da aus der Ungleichung

$$\varphi(t, 0, F) \leq \beta(\|0\|, t) = 0$$

zwingend  $\varphi(t, 0, F) \equiv 0$  folgt und es daher nur die Nulllösung zum Anfangswert  $x = 0$  geben kann.

Wenn wir nun ein ein Lipschitz–stetig stabilisierendes Feedback  $F$  für (6.1) finden können, das zusätzlich (6.2) erfüllt, so können wir Satz 5.9 anwenden und erhalten eine  $C^\infty$  Kontroll–Ljapunov–Funktion  $V$ .

Wegen  $F(0) = 0$  und der Stetigkeit von  $F$  erhalten wir aber noch etwas mehr: Wir können eine Funktion  $\gamma \in \mathcal{K}$  finden, so dass die Ungleichung

$$F(x) \leq \gamma(\|x\|)$$

gilt, z.B. indem wir  $\gamma(r) := \max_{\|x\| \leq r} \|F(x)\| + r$  setzen. Für jede solche Funktion  $\gamma \in \mathcal{K}$  gilt dann die Ungleichung

$$\inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq DV(x)f(x, F(x)) \leq -W(x).$$

Die Kontrollwerte, für die man die Negativität der Richtungsableitung erhält, können also um so kleiner (in der Norm) gewählt werden, je näher  $x$  an  $x^* = 0$  liegt.

Diese Eigenschaft

$$\inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) \quad \text{für ein } \gamma \in \mathcal{K}. \quad (6.3)$$

wird im Folgenden wichtig sein. Das Ziel in diesem Abschnitt ist es nämlich, unter Annahme (6.3) eine Umkehrung von Satz 5.9 zu beweisen, dass nämlich aus der Existenz einer glatten Kontroll–Ljapunov–Funktion mit mit den dortigen Eigenschaften die Existenz eines stabilisierenden Feedbacks folgt — ein Resultat, das auf Z. Artstein zurück geht. Wir werden aber noch etwas mehr als einen abstrakten Existenzbeweis führen, denn man kann sogar eine explizite Formel für  $F$  angeben. Diese Formel ist in der Literatur als *universelle Formel* oder — nach ihrem Erfinder E.D. Sontag — *Sontag–Formel* bekannt. Das daraus resultierende Feedback wird i.A. nicht mehr Lipschitz–stetig stabilisierend sein (in diesem Sinne erhalten wir also nicht die exakte Umkehrung von Satz 5.9), erfüllt aber die nur leicht schwächere Bedingung (6.2), was für praktische Zwecke in der Regel ausreicht.

Um die Rechnungen zu vereinfachen beschränken wir uns im folgenden Satz auf den Fall  $m = 1$  in (6.1), d.h.

$$f(x, u) = f_0(x) + f_1(x)u$$

mit  $u \in \mathbb{R}$  und geben die allgemeine Lösung in Bemerkung 6.2 nur an.

**Satz 6.1** Betrachte ein kontroll–affines Kontrollsystem (6.1) mit  $m = 1$ . Sei  $V$  eine stetig differenzierbare globale Kontroll–Ljapunov–Funktion, die Bedingung (6.3) erfüllt und deren

Ableitung für  $x \neq 0$  Lipschitz stetig ist. Dann ist  $F$  gegeben durch  $F(0) = 0$  und

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4}}{DV(x)f_1(x)} & \text{falls } DV(x)f_1(x) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } DV(x)f_1(x) = 0 \end{cases}$$

für  $x \neq 0$  ein stetiges Feedback, das (6.2) erfüllt und für das die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$$

global asymptotisch stabil ist.

**Beweis:** Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$\psi(a, b) := \begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}, & b \neq 0 \\ 0, & b = 0 \end{cases}$$

und die Menge

$$S := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > 0 \text{ oder } a < 0\}.$$

Wir zeigen, dass  $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Abbildung ist. Dies folgt aus dem impliziten Funktionensatz, da  $\psi$  die Gleichung  $\phi(a, b, \psi(a, b)) = 0$  erfüllt für

$$\phi(a, b, p) = bp^2 - 2ap - b.$$

Die Funktion  $\phi$  ist auf  $S$  differenzierbar und die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}(a, b, p) = 2bp - 2a$$

hat in einer (hinreichend kleinen) offenen Umgebung der Menge  $(a, b, \psi(a, b))$  vollen Rang: falls  $b = 0$  ist, gilt  $2bp - 2a = -2a > 0$  und falls  $b \neq 0$ , gilt

$$2b\psi(a, b) - 2a = 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a = \sqrt{a^2 + b^2} > 0.$$

Daher ist der implizite Funktionensatz anwendbar und  $\psi$  ist differenzierbar.

Wir zeigen nun zunächst die Lipschitz-Stetigkeit von  $F$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Wir können  $F$  mit Hilfe von  $\psi$  als

$$F(x) = -DV(x)f_1(x)\psi(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2)$$

schreiben. Falls  $x \neq 0$  und  $DV(x)f_1(x)^2 = 0$  ist, muss — wegen  $\inf_u DV(x)f(x, u) \leq -W(x) < 0$  — die Ungleichung  $DV(x)f(x, u) < 0$  gelten. Also gilt

$$(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2) \in S$$

für  $x \neq 0$ , weswegen  $\psi(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2)$  und damit auch  $F$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  eine Komposition Lipschitz-stetiger Funktionen ist und damit selbst Lipschitz-stetig ist.

Wir schreiben nun kurz  $g(x) = f(x, F(x))$ . Wegen

$$DV(x)g(x) = DV(x)f_0(x) + DV(x)f_1(x)F(x) = -\sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4}$$

für  $x \neq 0$  (beachte, dass diese Gleichung auch im Fall  $DV(x)f_1(x) = 0$  gilt) ist  $V$  eine Ljapunov-Funktion für  $g$  mit

$$W(x) = \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4} > 0 \quad \text{für } x \neq 0,$$

woraus die globale asymptotische Stabilität mit Satz 2.10 folgt<sup>1</sup>.

Es bleibt die Stetigkeit von  $F$  in  $x = 0$  zu zeigen, wegen  $F(0) = 0$  ist also zu zeigen, dass  $F(x_n) \rightarrow 0$  gilt für jede Folge  $x_n \rightarrow 0$ . Da  $V$  in 0 ein lokales Minimum besitzt folgt  $DV(0) = 0$ , also  $DV(x_n) \rightarrow 0$  für  $x_n \rightarrow 0$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

**1. Fall:** Falls  $DV(x)f_0(x) \geq 0$  ist, betrachte die Ungleichung

$$DV(x)f_0(x) + \inf_{\substack{u \in U \\ |u| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f_1(x)u = \inf_{\substack{u \in U \\ |u| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) \leq 0.$$

Das Infimum im ersten Summanden wird hier entweder für  $u = \gamma(x)$  oder  $u = -\gamma(x)$  angenommen und ist in jedem Fall gleich  $-\gamma(x)|DV(x)f_1(x)|$ . Also erhalten wir unter Ausnutzung von  $DV(x)f_0(x) \geq 0$  die Ungleichung

$$|DV(x)f_0(x)| - \gamma(x)|DV(x)f_1(x)| = DV(x)f_0(x) - \gamma(x)|DV(x)f_1(x)| \leq 0.$$

Daraus folgt

$$|DV(x)f_0(x)| \leq \gamma(x)|DV(x)f_1(x)|$$

und wegen

$$DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4} \leq 2|DV(x)f_0(x)| + \left(DV(x)f_1(x)\right)^2$$

ergibt sich

$$|F(x)| \leq 2 \frac{|DV(x)f_0(x_n)|}{|DV(x)f_1(x)|} + \frac{\left(DV(x)f_1(x)\right)^2}{|DV(x)f_1(x)|} \leq 2\gamma(\|x\|) + |DV(x)f_1(x)|.$$

**2. Fall:** Falls  $DV(x)f_0(x) < 0$  ist, gilt

$$DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4} \leq \left(DV(x)f_1(x)\right)^2,$$

also

$$|F(x)| \leq \frac{\left(DV(x)f_1(x)\right)^2}{|DV(x)f_1(x)|} = |DV(x)f_1(x)| \leq |DV(x)f_1(x)|,$$

<sup>1</sup>Tatsächlich haben wir in Satz 2.10 Lipschitz-Stetigkeit des Vektorfeldes für ganz  $\mathbb{R}^n$  vorausgesetzt. Betrachtet man den Beweis genauer, so sieht man aber, dass Lipschitz-Stetigkeit in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , die hier aus der bereits bewiesenen Lipschitz-Stetigkeit von  $F$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und der Struktur (6.1) folgt, für den Beweis ausreicht.

d.h. wir erhalten eine kleinere Schranke als in Fall 1.

Für  $x_n \rightarrow 0$  folgt damit

$$|F(x_n)| \leq \underbrace{2\gamma(\|x_n\|)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|DV(x_n)|}_{\rightarrow 0} \underbrace{|f_1(x_n)|}_{\text{beschränkt}} \rightarrow 0,$$

wobei  $DV(x_n) \rightarrow 0$  aus der Stetigkeit von  $DV$  und der Tatsache folgt, dass  $x = 0$  ein lokales Minimum von  $V$  ist, woraus  $DV(0) = 0$  folgt. Dies zeigt die Stetigkeit von  $F$  und beendet damit den Beweis.  $\square$

**Bemerkung 6.2** Im allgemeinen Fall (d.h.  $m \geq 1$ ) erhält man für die  $i$ -te Komponente des Feedbacks  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Formel

$$F_i(x) = -DV(x)f_i(x) \psi \left( DV(x)f_0(x), \sum_{k=1}^m \left( DV(x)f_k(x) \right)^2 \right)$$

für  $x \neq 0$  und  $F(0) = 0$ , mit  $\psi$  aus dem Beweis von Satz 6.1.  $\square$

Wir illustrieren das Resultat an zwei Beispielen.

**Beispiel 6.3** Betrachte die mathematische Pendelgleichung, bei der der Nullpunkt dem aufgerichteten Pendel entspricht

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + \sin x_1(t) \end{aligned}$$

vgl. (2.3).

Wir setzen  $k = 1$  und addieren nun eine Kontrollvariable in der zweiten Komponente, also

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + \sin x_1(t) + u \end{aligned}$$

was physikalisch einer Kraft entspricht, mit der die Winkelgeschwindigkeit beeinflusst werden kann, z.B. durch einen Motor an der Drehachse.

Betrachte die Funktion

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 \right),$$

die wegen

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( x_1^2 + x_2^2 + \underbrace{2x_1x_2}_{\geq -x_1^2/2 - 3x_2^2/2} + x_1^2 \right) \geq \frac{1}{4} (x_1^2 + x_1^2) = \frac{1}{4} \|x\|^2$$

durch  $\alpha_1(r) = r^2/4$  nach unten und wegen

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( \underbrace{(x_1 + x_2)^2}_{\leq 2x_1^2 + 2x_2^2} + x_1^2 \right) \leq 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 3\|x\|^2$$

durch  $\alpha_2(r) = 3r^2$  nach oben abgeschätzt werden kann. Für diese Funktion gilt

$$DV(x)f((x), u) = (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_2 + \sin(x_1) + u).$$

Wir zeigen, dass dies eine Kontroll-Ljapunov-Funktion für das gegebene System ist, indem wir geeignete  $u$  wählen, so dass die Ableitungsbedingung erfüllt ist:

Hierzu setzen wir  $u = -x_1 - x_2 - \sin x_1$ , woraus  $|u| \leq 3\|x\|$  folgt; wir können also  $\gamma(r) = 3r$  wählen. Für die Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned} DV(x)f(x, u) &= (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_2 + \sin(x_1) - x_1 - x_2 - \sin x_1) \\ &= (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_1 - 2x_2) \\ &= 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 \\ &= -x_1^2 - x_2^2 - \underbrace{x_1x_2}_{\geq -x_1^2/2 - x_2^2/2} \leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = -\|x\|^2/2 < 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $V$  eine Kontroll-Ljapunov-Funktion für das System, die (6.3) erfüllt.

In der Form 6.1 geschrieben gilt für das System

$$f_0(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 + \sin x_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also

$$DV(x)f_0(x) = (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_2 + \sin x_1) = x_1x_2 + (x_1 + x_2) \sin x_1$$

und

$$DV(x)f_1(x) = x_1 + x_2.$$

Die universelle Formel liefert daher

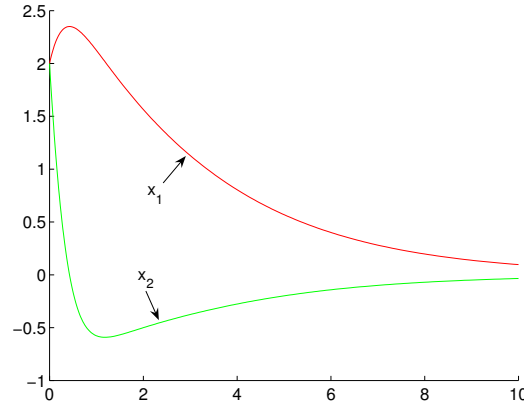
$$F(x) = -\frac{x_1x_2 + (x_1 + x_2) \sin x_1 + \sqrt{(x_1x_2 + (x_1 + x_2) \sin x_1)^2 + (x_1 + x_2)^4}}{x_1 + x_2}$$

Abbildung (6.1) zeigt, dass dieses Feedback das Pendel stabilisiert. Die Abbildung zeigt die Komponenten der Trajektorie  $\varphi(t, x, F)$  für  $x = (2, 2)^T$ . □

**Beispiel 6.4** Betrachte wiederum Artsteins Kreise, gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left( -x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \right) u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left( -2x_1(t)x_2(t) \right) u(t) \end{aligned}$$

In Abschnitt 3.3 haben wir bewiesen, dass das System asymptotisch kontrollierbar ist aber nicht stabilisierbar mit stetigem Feedback. In Beispiel (5.7) haben wir gezeigt, dass eine nichtglatte Kontroll-Ljapunov-Funktion existiert.



Abbildungung 6.1: Lösungstrajektorie des nichtlinearen Pendels mit stabilisierendem Feedback

Mit Satz 6.1 können wir nun zeigen, dass keine stetig differenzierbare Kontroll-Ljapunov-Funktion mit Lipschitz stetiger Ableitung existieren kann. Nehmen wir dazu an, dass  $V$  eine solche Kontroll-Ljapunov-Funktion im Sinne der Definition von Abschnitt 5 ist, d.h. es gilt die Ungleichung (5.10)

$$\inf_{u \in U_C} DV(x)f(x, u) \leq -W(x)$$

für ein  $C > 0$  in einer Umgebung der 0. Setzen wir  $\gamma(r) = r$ , so erhalten wir aus der Struktur der Gleichung

$$\inf_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ |u| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq \inf_{u \in U_C} DV(x)f(x, u)\gamma(\|x\|)/C \leq -W(x)\gamma(\|x\|)/C =: -\widetilde{W}(x).$$

Da für die neue Funktion  $\widetilde{W}$  offenbar  $\widetilde{W}(x) > 0$  für  $x \neq 0$  gilt, erfüllt  $V$  die Bedingung (6.3). Satz 6.1 liefert also die Existenz eines Lipschitz-stetigen Feedbacks, was nach Abschnitt 3.3 nicht existiert. Deswegen kann auch  $V$  nicht existieren.

(Tatsächlich kann man sogar etwas mehr zeigen: Die Lipschitz Annahme an  $DV$  im Beweis von Satz 6.1 brauchen wir nämlich nur, um die Lipschitz-Stetigkeit von  $F$  sicher zu stellen; falls  $DV$  nur stetig ist erhalten wir immer noch ein stetiges stabilisierendes Feedback  $F$ . Da in Abschnitt 3.3 gezeigt wurde, dass nicht einmal ein stetiges stabilisierendes  $F$  existieren kann, existiert folglich auch keine stetig differenzierbare Kontroll-Ljapunov-Funktion. Um dies formal sauber zu beweisen, muss man allerdings die mögliche Nichteindeutigkeit der Lösungen für nicht Lipschitz-stetiges  $F$  berücksichtigen, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen.)  $\square$

## 6.2 Backstepping

Sontags universelle Formel bietet eine konstruktive Möglichkeit, ein stabilisierendes glattes Feedback aus einer Kontroll-Ljapunov-Funktion zu berechnen. Voraussetzung für ihre Anwendbarkeit ist daher die Kenntnis einer solchen Kontroll-Ljapunov-Funktion.

Das ‘‘Backstepping’’ genannte Verfahren ist eine systematische Methode, eine solche Ljapunov-Funktion zu berechnen. Der folgende Satz formuliert die Grundlage dieser Methode.

**Satz 6.5** Gegeben sei ein Kontrollsystem (1.1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

mit Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$ , Kontrolle  $u \in \mathbb{R}^m$  und stetig differenzierbarem  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ . Für dieses System und  $x^* = 0$  existiere ein lokal (global) stabilisierendes  $C^2$  Feedback  $F_f$  mit  $F_f(0) = 0$ <sup>2</sup> und zugehöriger stetiger und für  $x \neq 0$  stetig differenzierbarer Ljapunov-Funktion  $V_f$ . Gegeben sei weiterhin eine Abbildung  $h \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  mit  $h(0, z^*) = 0$  für ein  $z^* \in \mathbb{R}^m$ .

Dann ist das Gleichgewicht  $\tilde{x}^* = 0 \in \mathbb{R}^{n+m}$  des gekoppelten Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= h(x(t), z(t)) + u(t) \end{aligned}$$

mit Zustand  $\tilde{x} = (x, z) \in \mathbb{R}^{n+m}$  und Kontrolle  $u \in \mathbb{R}^m$  lokal (global) stabilisierbar mit  $C^1$  Feedback  $F$  und zugehöriger Ljapunov-Funktion

$$V(\tilde{x}) = V(x, z) := V_f(x) + \frac{1}{2} \|z - F_f(x)\|^2. \quad (6.4)$$

**Beweis:** Wir beweisen den globalen Fall, der lokale wird analog durch Einschränkung auf eine Umgebung des Gleichgewichtes bewiesen.

Wegen  $F_f(0) = 0$  ist angegebene Funktion  $V$  positiv für  $\tilde{x} \neq 0$  und konvergiert für  $\tilde{x} \rightarrow 0$  gegen 0. Zudem wächst  $V(x)$  unbeschränkt für  $\tilde{x} \rightarrow \infty$ , weswegen wir als  $\mathcal{K}_\infty$  Schranken die Funktionen

$$\alpha_1(r) = \min_{\|\tilde{x}\| \geq r} V(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad \alpha_2(r) = \max_{\|\tilde{x}\| \leq r} V(\tilde{x})$$

verwenden können.

Wir bezeichnen die Lösung des gekoppelten Systems mit Anfangswert  $\tilde{x} = (x, z)$  als

$$\varphi(t, \tilde{x}, u) = (\varphi_f(t, x, z, u), \varphi_h(t, x, z, u))$$

Aus der Annahme an  $f$  folgt

$$DV_f(x)f(x, F_f(x)) \leq -W_f(x)$$

für ein stetiges  $W_f(x)$  mit  $W_f(x) > 0$  für alle  $x \in O \setminus \{0\}$ . Betrachte nun die Menge

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid z = F_f(x)\}.$$

<sup>2</sup>Falls  $F_f(0) = 0$  nicht gilt, können wir  $F_f$  und  $f$  ersetzen durch

$$\tilde{F}_f(x) = F_f(x) - F_f(0) \quad \text{und} \quad \tilde{f}(x, u) = f(x, u + F_f(0)).$$



Für jeden Punkt  $(x, z) \in S$  mit  $x \neq 0$  gilt offenbar

$$DV_f(x)f(x, z) \leq -W_f(x).$$

Solange also  $\tilde{x} = (x, z)$  in  $S$  liegt, nimmt die Ljapunov-Funktion ab. Die Idee der Konstruktion von  $F$  liegt nun darin, die  $\varphi_h$ -Komponente der Lösung an der Menge  $S$  zu stabilisieren. Die Lösungen des gekoppelten Systems laufen dann zunächst nach  $S$  und dann entlang von  $S$  nach  $\tilde{x}^* = 0$ .

Zur Konstruktion dieses Feedbacks dient nun die oben angegebene Ljapunov-Funktion, deren zweiter Term gerade den (quadratischen) Abstand  $\|z - F_f(x)\|^2$  des Punktes  $(x, z)$  von  $S$  misst. Für ein beliebiges  $u \in \mathbb{R}^m$  erhalten wir die Ableitung

$$DV(x)(f(x, z), h(x, z) + u) = DV_f(x)f(x, z) + (z - F_f(x))^T(h(x, z) + u - DF_f(x)f(x, z)).$$

Geben wir uns nun eine beliebige Funktion  $\hat{u} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  vor und setzen

$$F(x, z) = -h(x, z) + DF_f(x)f(x, z) + \hat{u}(x, z),$$

so erhalten wir

$$DV(x, z)(f(x, z), h(x, z) + F(x, z)) = DV_f(x)f(x, z) + (z - F_f(x))^T \hat{u}(x, z).$$

Definieren wir nun

$$g(\lambda) := f(x, z + \lambda(F_f(x) - z))$$

für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so folgt

$$\begin{aligned} f(x, z) - f(x, F_f(x)) &= g(0) - g(1) = -\int_0^1 g'(\lambda) d\lambda \\ &= -\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(x, z + \lambda(F_f(x) - z))(F_f(x) - z) d\lambda \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(x, z + \lambda(F_f(x) - z)) d\lambda}_{=: G(x, z) \in \mathbb{R}^{n \times m}} (z - F_f(x)). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\hat{u}(x, z) = [-DV_f(x)G(x, z)]^T + \tilde{u}(x, z)$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &DV(x, z)(f(x, z), h(x, z) + F(x, z)) \\ &= DV_f(x)f(x, z) + (z - F_f(x))^T \hat{u}(x, z) \\ &= DV_f(x)f(x, z) + (z - F_f(x))^T [-DV_f(x)G(x, z)]^T + (z - F_f(x))^T \tilde{u}(x, z) \\ &= DV_f(x)f(x, z) - \underbrace{DV_f(x)G(x, z)(z - F_f(x))}_{=DV_f(x)f(x, z) - DV_f(x)f(x, F_f(x))} + (z - F_f(x))^T \tilde{u}(x, z) \\ &= DV_f(x)f(x, F_f(x)) + (z - F_f(x))^T \tilde{u}(x, z) \leq -W_f(x) + (z - F_f(x))^T \tilde{u}(x, z). \end{aligned}$$

Definieren wir schließlich

$$\tilde{u}(x, z) = -(z - F_f(x))$$

so ergibt sich

$$DV(x, z)(f(x, z), h(x, z) + F_f(x, z)) \leq -W_f(x) - \|z - F_f(x)\|^2 =: -W(x, z),$$

eine stetige Funktion, die offenbar  $W(\tilde{x}) > 0$  für alle  $\tilde{x} = (x, z) \in O \times \mathbb{R}^m$  mit  $\tilde{x} \neq 0$  erfüllt.  $\square$

**Bemerkung 6.6** Die Konstruktion von  $F$  im Beweis ist konstruktiv aber recht kompliziert, da das Integral über  $\partial f / \partial z$  berechnet werden muss. Einfacher ist es i.A., ein stabilisierendes Feedback über Sontags universelle Formel basierend auf  $V$  herzuleiten.  $\square$

Das Lemma liefert also die Möglichkeit, durch Zerlegung eines Systems in geeignete Untersysteme eine differenzierbare Kontroll-Ljapunov-Funktion zu konstruieren. Besonders einfach ist die Anwendung des Satzes, wenn das  $f$ -Untersystem eindimensional gewählt werden kann.

**Beispiel 6.7** Betrachte die vereinfachte Pendelgleichung aus Beispiel 6.3

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + \sin x_1(t) + u.\end{aligned}$$

Wir setzen  $x = x_1$ ,  $z = x_2$  und erhalten damit

$$f(x, u) = u \quad \text{und} \quad h(x, z) = -z + \sin x.$$

Das erste Teilsystem ist damit von der Form

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

und daher sicherlich Feedback-stabilisierbar, z.B. mit  $F_f(x) = -x$ . Im eindimensionalen funktioniert darüberhinaus immer die Ljapunov-Funktion  $x^2/2$ , weswegen wir  $V_f(x) = x^2/2$  setzen. Damit gilt

$$DV_f(x)f(x, F_f(x)) = x(-x) = -x^2 =: -W_f(x).$$

Die Lyapunov-Funktion für das Gesamtsystem ergibt sich damit zu

$$V(x, z) = V_f(x) + \frac{1}{2}|z - F_f(x)|^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (z + x)^2).$$

Dies ist gerade die Ljapunov-Funktion aus Beispiel 6.3.  $\square$

# Kapitel 7

## Stabilisierung mit Abtastfeedback

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass stetige stabilisierende Feedbacks nicht immer existieren. Wenn man das Feedback–Stabilisierungsproblem trotzdem lösen möchte, lässt es sich folglich nicht vermeiden, unstetige Feedbacks zu verwenden. Dies werden wir in diesem Abschnitt betrachten.

In diesem Kapitel wollen wir zunächst ein Lösungskonzept für Feedback–geregelter Kontrollsysteme einführen, das auch für unstetige Feedbacks zu mathematisch sinnvollen Lösungen führt.

### 7.1 Abtast–Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir ein Lösungskonzept für Feedback–geregelter Kontrollsysteme einführen, das auch für unstetige Feedbacks zu mathematisch sinnvollen Lösungen führt.

**Definition 7.1** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1). Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  eine beliebige Abbildung, die die Abschätzung  $\|F(x)\| \leq \delta(x)$  für eine stetige Funktion  $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  erfüllt.

Zu einer gegebenen *Abtastperiode* (auch *Abtastzeit* oder *Sampling–Periode*)  $T > 0$  definieren wir die *Abtastlösung* (auch *Sampling–Lösung*) des Anfangswertproblems  $\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$ ,  $x(0) = x_0$  für  $t \geq 0$  induktiv mittels

$$\varphi_T(t, x_0, F) = \varphi(t - iT, x_i, F(x_i)) \text{ für alle } t \in [iT, (i+1)T]$$

wobei  $\varphi(\cdot, x_i, F(x_i))$  die Lösung von (1.1) mit Anfangswert  $x_i := \varphi_T(t_i, x_0, F)$  und konstanter Kontrollfunktion  $u(t) \equiv F(x_i)$  bezeichnet.  $\square$

Beachte, dass — unter unseren Standard–Voraussetzungen an (1.1) und wegen der Beschränktheits–Annahme an  $F$  — die Lösung  $\varphi_T$  für jede Abtastperiode  $T > 0$  eindeutig existiert, unabhängig von den sonstigen Regularitätseigenschaften des Feedbacks  $F$ .

Neben diesem mathematischen Vorteil hat diese Art der Definition aber auch eine sehr praxisnahe Interpretation: In der modernen Regelungstechnik werden Feedbacks zur Regelung

nicht mehr nur als analoge elektronische Schaltungen sondern immer öfter mittels digitaler Computer implementiert, da diese zum einen inzwischen billig und überall verfügbar und zum anderen flexibel programmierbar sind. Aufgrund der Arbeitsweise digitaler Computer ist es allerdings nicht möglich, das Feedback  $F$  für jeden Punkt  $x(t)$  auf der Trajektorie auszuwerten; statt dessen muss man sich von vornherein auf eine endliche Anzahl von Auswertungen an Punkten  $x(t_i)$  beschränken, was exakt der obigen Definition entspricht. Aus praktischen Gründen werden also auch stetige Feedbacks heutzutage oft mittels Abtastung implementiert. Wir werden auf die digitale Regelung in späteren Kapiteln noch genauer eingehen.

## 7.2 Stabilität und Abtastung

Wenn man Feedbacks entwerfen bzw. berechnen will, so dass die Abtastlösungen (in geeignetem Sinne) asymptotisch stabil werden, so steht man vor der prinzipiellen Entscheidung, ob man das Feedback  $F$  unabhängig von der Abtastfolge  $\mathbf{t}$  oder in Abhängigkeit davon definieren soll. Flexibler ist es sicherlich, das Feedback  $F$  unabhängig von  $\mathbf{t}$  zu entwerfen, so dass es für eine große Menge von Abtastfolten  $\mathbf{t}$  funktioniert. Wir werden hier trotzdem den zweiten Ansatz verfolgen, da dies die mathematische Behandlung etwas vereinfacht.

Wir verwenden die folgende Definition; wiederum zur Vereinfachung beschränken wir uns auf den globalen Fall, der hier allerdings *semiglobal* heißt.

**Definition 7.2** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0,0) = 0$ . Wir sagen, dass eine Familie von Feedbacks  $F_T : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  für  $T \in (0, T^*]$  das Gleichgewicht  $x^* = 0$  des Abtastsystems *semiglobal praktisch asymptotisch stabilisiert*, falls eine Funktion  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert, so dass für je zwei Konstanten  $R > \varepsilon > 0$  ein  $T_0 > 0$  existiert, so dass für alle  $T \in (0, T_0]$  die Abtastlösungen  $\varphi_T(t, x, F_T)$  die Abschätzung

$$\|\varphi_T(t, x, F_T)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \varepsilon\}$$

für alle  $t \geq 0$  und alle Anfangswerte  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq R$  erfüllt.  $\square$

Der Begriff “semiglobal” bezieht sich hierbei auf die Konstante  $R$ , der Begriff “praktisch” auf die Konstante  $\varepsilon$ . Je weiter entfernt der Anfangswertes von  $x^* = 0$  ist und je näher man dem Gleichgewicht  $x^* = 0$  kommen will, desto kleiner muss man die Abtastzeit  $T$  wählen, d.h. desto öfter muss man  $F$  auswerten. Im Allgemeinen ist dies das Beste, was man mit Abtastfeedback erzielen kann, da die nicht-kontinuierliche Auswertung von  $F$  zu Einbußen in der Kontroll-Genauigkeit führt, die sich nahe dem Gleichgewicht  $x^* = 0$  und weit entfernt davon besonders auswirkt: Nahe dem Gleichgewicht deswegen, da man hier sehr präzise steuern muss, weit entfernt deswegen, da die Dynamik des Kontrollsystems hier sehr schnell sein kann, was ebenfalls häufiges Messen und Auswerten des Feedbacks erfordert.

Tatsächlich ist es manchmal trotzdem möglich, auch mit konstantem  $T$  “echte” asymptotische Stabilität des Abtastsystems zu erhalten, wie im folgenden Beispiel.

**Beispiel 7.3** Betrachte das System (3.3)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \left(-x_1(t)^2 + x_2(t)^2\right)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(-2x_1(t)x_2(t)\right)u(t).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$F_T(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0 \\ -1, & x_1 < 0 \end{cases}$$

Mit dieser Wahl wird das System global asymptotisch stabil für jedes  $T > 0$ , d.h. wir erreichen sogar echte asymptotische Stabilität für die Abtastlösungen; darüberhinaus ist  $F_T$  hier unabhängig von  $T$ . Der Grund hierfür ist, dass diese Wahl von  $F$  tatsächlich zu einer konstanten Steuerstrategie  $F(x(t))$  führt, da die Sampling-Lösungen des Systems die "Schaltlinie"  $x_1 = 0$  niemals kreuzen. Daher ist die Länge  $T$  der Sampling-Intervalle für dieses System unerheblich.  $\square$

Für andere Systeme kann man natürlich nicht erwarten, dass das Feedback  $F$  konstant entlang der Lösungen ist. In diesem Fall ist die semiglobale praktische Stabilität aus Definition 7.2 i.A. das Beste, was man mit Abtastung erreichen kann.

### 7.3 Abtastung und Ljapunov-Funktionen

Ebenso wie bei stetigem Feedback können auch für unstetiges Feedback Ljapunov-Funktionen als Hilfsmittel zur Konstruktion stabilisierender Feedbacks verwendet werden. Die folgende Definition liefert das zu Definition 7.2 passende Konzept.

**Definition 7.4** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0, 0) = 0$ . Eine Familie von stetigen Funktionen  $V_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für  $T \in (0, T^*]$  heißt *semiglobale praktische Familie von (Abtast-) Ljapunov-Funktionen*, falls Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ , ein  $C > 0$  und eine stetige Funktion  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass die Ungleichungen

$$W(x) > 0, \tag{7.1}$$

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V_T(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{7.2}$$

für alle  $T \in (0, T^*]$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  erfüllt sind und für alle Konstanten  $C_2 > C_1 > 0$  ein  $T_0 > 0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\inf_{u \in U_C} V_T(\varphi(T, x, u)) \leq \max\{V_T(x) - TW(x), C_1\} \tag{7.3}$$

gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $V_T(x) \leq C_2$  und alle  $T \in (0, T_0]$ .  $\square$

Beachte, dass das  $u$  in (7.3) ein konstanter Kontrollwert aus  $U_C$  und keine messbare Kontrollfunktion aus  $\mathcal{U}_C$  ist. Da die Lösung  $\varphi(T, x, u)$  stetig von  $u \in U_C$  abhängt, ist das Infimum in (7.3) tatsächlich ein Minimum.

Der folgende Satz zeigt, dass wir aus den Ljapunov-Funktionen  $V_T$  stabilisierende Feedbacks im Sinne von Definition 7.2 erhalten können. Hierzu verwenden wir für eine reelwertige Funktion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Minimum  $u^*$  über  $U_c$  existiert, für die also

$$\min_{u \in U_c} h(u) = h(u^*)$$

gilt, die Schreibweise

$$\operatorname{argmin}_{u \in U_c} h(u) := u^*.$$

Beachte, dass das  $\operatorname{argmin}$  i.A. nicht eindeutig ist; im Falle der Nichteindeutigkeit wählen wir einfach einen der möglichen minimierenden Kontrollwerte.

**Satz 7.5** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0,0) = 0$ . Sei  $V_T$  für  $T \in (0, T^*]$  eine semiglobale praktische Familie von Ljapunov-Funktionen. Dann ist die Familie von Feedbacks  $F_T$  definiert durch

$$F_T(x) := \operatorname{argmin}_{u \in U_c} V_T(\varphi(T, x, u))$$

eine Familie von semiglobal praktisch asymptotisch stabilisierenden Feedbacks im Sinne von Definition 7.2.

**Beweis:** Analog zum Beweis von Lemma 2.8 können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $W(x) \geq g(V_T(x))$  für ein geeignetes global Lipschitz-stetiges  $g : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0$  mit  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  ist. Tatsächlich kann  $g$  unabhängig von  $T$  gewählt werden, da alle  $V_T$  durch die gleichen  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktionen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beschränkt sind. Indem wir  $T^*$  falls nötig verkleinern, können wir o.B.d.A.  $T^* < 1/L$  annehmen, wobei  $L$  die Lipschitz-Konstante von  $g$  ist.

Seien nun  $R > \varepsilon > 0$  gegeben. Wir wählen  $C_2 = \alpha_2(R)$  und  $C_1 = \alpha_1(\varepsilon/2)$ , betrachten das zugehörige  $T_0$  aus Definition 7.4 und wählen ein beliebiges  $T \in (0, T_0]$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq R$  die Ungleichung  $V_T(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \leq \alpha_2(R) = C_2$ , also folgt aus der Definition von  $F_T$  und (7.3) die Ungleichung

$$V_T(\varphi(T, x, F_T(x))) \leq \max\{V_T(x) - Tg(V_T(x)), C_1\}.$$

Betrachte nun die Funktionen  $\mu(r, t)$ , die induktiv definiert ist durch  $\mu(r, 0) = r$  und

$$\mu(r, iT + \tau) = \mu(r, iT) - \tau g(\mu(r, iT)) \quad \text{für alle } \tau \in (0, T].$$

Die so definierte Funktion  $\mu$  ist offenbar streng monoton fallend in  $t$ . Zudem konvergiert sie gegen 0:

Nehmen wir an, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(r, t) =: \gamma > 0$  ist. Wir wählen ein  $\varepsilon_0 > 0$ . Dann folgt für jedes  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  und alle  $i > 0$  mit  $\mu(r, iT) \leq \gamma + \varepsilon$  die Ungleichung

$$\mu(r, T + iT) = \mu(r, iT) - \underbrace{T g(\mu(r, iT))}_{=: \alpha_0} \leq \gamma + \varepsilon - T\alpha_0.$$

Für  $\varepsilon < T\alpha_0$  folgt also  $\mu(r, iT + T) < \gamma$ , was zu einem Widerspruch führt. Also gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(r, t) = 0$ . Aus der Lipschitz-Stetigkeit von  $g$  folgt zudem, dass  $\mu$  in  $r$  streng monoton wachsend ist, weswegen  $\mu \in \mathcal{KL}$  ist.

Beachte, dass das hier konstruierte  $\mu$  zwar von  $T$  abhängt, aber für alle  $T \in (0, T^*]$  durch eine von  $T$  unabhängige  $\mathcal{KL}$  Funktion beschränkt werden kann. Dies folgt aus der stetigen Abhängigkeit der  $\mu$  von  $T$  und der Tatsache, dass  $\mu$  für  $T \rightarrow 0$  gegen die Lösung der Differentialgleichung  $\dot{\mu} = -g(\mu)$  konvergiert (beachte, dass  $\mu$  nichts anderes als die Euler-Diskretisierung dieser DGL ist), deren Lösung wieder eine  $\mathcal{KL}$ -Funktion ist.

Aus der Definition von  $\mu$  folgt mittels Induktion über  $i$  die Ungleichung

$$V_T(\varphi_T(iT, x, F_T)) \leq \max\{\mu(V_T(x), iT), C_1\}$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $V(x) \leq C_2$ . Daraus folgt mit  $\|x\| \leq R$  ( $\Rightarrow V(x) \leq \alpha_2(R) = C_2$ ) für  $\beta(r, t) := \alpha_1^{-1}(\mu(\alpha_2(r), t)) \in \mathcal{KL}$  die Ungleichung

$$\|\varphi_t(iT, x, F_T)\| \leq \max\{\alpha_1^{-1}(\mu(\alpha_2(\|x\|), iT)), \alpha_1^{-1}(C_1)\} = \max\{\beta(\|x\|, t), \varepsilon/2\}$$

für  $i \in \mathbb{N}$ . Wegen der Stetigkeit von  $\|\varphi_t(t, x, F_T)\|$  gilt diese Abschätzung für hinreichend kleines  $T > 0$  auch für beliebige  $t$  in den Zwischenintervallen  $[iT, (i+1)T]$ , wenn wir  $\varepsilon/2$  durch  $\varepsilon$  ersetzen und  $\beta$  durch  $C\beta$  für eine geeignete Konstante  $C > 1$  ersetzen. Damit folgt die behauptete semiglobale praktische Stabilität.  $\square$

**Bemerkung 7.6** In der Praxis wird man  $F_T$  oft nicht wie in diesem Satz aus  $V_T$  berechnen, sondern zunächst ein  $F_T$  berechnen und dann sicher stellen, dass dazu ein passendes  $V_T$  existiert, selbst wenn man dies nicht explizit ausrechnen kann (oder will)<sup>1</sup>. Hierbei ist es tatsächlich nicht so wichtig, dass  $u = F_T(x)$  tatsächlich das Minimum von  $V(\varphi(T, x, u))$  realisiert; um den obigen Beweis zu führen reicht die Ungleichung

$$V_T(\varphi(T, x, F_T(x))) \leq \max\{V_T(x) - TW(x), C_1\}$$

aus.

Zudem wird man  $V_T$  (bzw. das zugehörige  $F_T$ ) oft nicht für alle beliebige kleinen  $T \in (0, T_0]$  zur Verfügung haben, z.B. wenn man  $V_T$  oder  $F_T$  numerisch berechnet; in diesem Fall ist die Berechnung für beliebig kleine  $T$  oft nicht praktisch realisierbar.

Tatsächlich reicht es aber auch aus, wenn man zu vorgegebenen  $R > \varepsilon > 0$  eine Ljapunov-Funktion  $V_{T_0}$  mit  $C_2 \geq \alpha_2(R)$ ,  $C_1 \leq \alpha_1^{-1}(\varepsilon/2)$  und hinreichend kleinem  $T_0 > 0$  berechnen kann oder theoretisch sicher stellen kann, dass ein solches  $V_T$  zu einem numerisch berechneten  $F_T$  existiert. Der Beweis von Satz 7.5 ist dann für diese Parameter  $R$  und  $\varepsilon$  durchführbar und garantiert die Stabilität des berechneten Feedbacks  $F_T$  für diese Parameter, ohne dass dazu die Kenntnis von  $V_T$  bzw.  $F_T$  für  $T < T_0$  nötig ist.  $\square$

## 7.4 Existenz von Abtast-Ljapunov-Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir nun beweisen, dass eine Familie von Ljapunov-Funktion im Sinne von Definition 7.4 immer existiert, wenn das System asymptotisch kontrollierbar ist. Dies formuliert der folgende Satz.

<sup>1</sup>Dies entspricht z.B. dem Vorgehen bei MPC-Schemata, vgl. das derzeit laufende Seminar zu diesem Thema

**Satz 7.7** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit  $f(0,0) = 0$ . Dann gilt: Wenn das System asymptotisch kontrollierbar ist, so existiert eine Familie von Ljapunov-Funktionen im Sinne von Definition 7.4. Insbesondere ist das Abtastsystem damit semiglobal praktisch asymptotisch stabilisierbar.

Der Beweis dieses Satzes benötigt etwas Vorbereitung. Für eine gegebene stetige Funktion  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$  für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$  und  $\beta \in (0, 1]$  definieren wir die Funktionen

$$V_\beta(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ V(y) + \frac{\|x - y\|^2}{2\beta^2} \right\}, \quad (7.4)$$

die sogenannten (*quadratischen*) *inf-Konvolutionen* von  $V$ . Mit  $y_\beta(x)$  bezeichnen wir einen Punkt, in dem das Minimum in (7.4) für  $x$  angenommen wird; damit definieren wir den Vektor  $\zeta_\beta(x) := (x - y_\beta(x))/2\beta^2$ . Dann gilt das folgende Lemma.

**Lemma 7.8** Die Funktionen  $V_\beta$  haben die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\bar{\alpha}_1(\|x\|) \leq V_\beta(x) \leq V(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und eine von  $\beta \in (0, 1]$  unabhängige Funktion  $\bar{\alpha}_1 \in \mathcal{K}_\infty$
- (ii) Für alle  $R, \delta > 0$  gibt es ein  $\beta_0 > 0$ , so dass die Abschätzungen

$$\|y_\beta(x) - x\| \leq \delta, \quad \|\zeta_\beta(x)\| \|y_\beta(x) - x\| \leq \delta \quad \text{und} \quad |V(y_\beta(x)) - V_\beta(x)| < \delta$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \leq R$  und alle  $\beta \leq \beta_0$  gelten.

- (iii) Für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  und alle  $\tau > 0$  gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} V_\beta(x + \tau v) &\leq V_\beta(x) + \tau \langle \zeta_\beta(x), v \rangle + \frac{\tau^2 \|v\|^2}{2\beta^2} \\ V(y_\beta(x) + \tau v) &\geq V(y_\beta(x)) + \tau \langle \zeta_\beta(x), v \rangle - \frac{\tau^2 \|v\|^2}{2\beta^2}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Alle Eigenschaften folgen mit elementaren aber zum Teil etwas technischen Abschätzungen, wobei man die gleichmäßige Stetigkeit von  $V$  auf kompakten Mengen ausnutzt.  $\square$

**Bemerkung 7.9** Die Abschätzungen in (iii) haben Ähnlichkeit mit einer Taylor-Entwicklung, wobei  $\zeta_\beta(x)$  die Rolle des Gradienten spielt. Tatsächlich wird  $\zeta_\beta(x)$  *Supergradient* der Funktion  $V_\beta$  in  $x$  und *Subgradient* der Funktion  $V$  in  $y_\beta(x)$  genannt.  $\square$

**Beweis von Satz 7.7:** Sei  $V$  die Kontroll-Ljapunov-Funktion aus Satz 5.6 und seien  $R, \varepsilon > 0$  gegeben. Wir konstruieren nun eine Funktion  $V_T$ , die die Bedingungen der Definition 7.4 erfüllt.

Wir wählen  $\beta \in (0, 1]$  so, dass für  $V_\beta$  und  $y_\beta(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\varepsilon \leq \|x\| \leq R$  die Abschätzung

$$W(y_\beta(x)) \geq W(x)/2 \quad (7.5)$$



gilt und wir wählen  $T_0$  so, dass für alle  $T \leq T_0$  und alle  $x$  wie oben die Ungleichung

$$\int_0^T W(\varphi(s, x, u)) ds \leq T3W(x)/4$$

gilt für alle  $u \in U_C$ .

Aus der zweiten Ungleichung von Lemma 7.8 (iii) folgt damit aus der Ljapunov-Ungleichung aus Definition 5.1 mit  $v = (\varphi(T, y_\beta(x), u) - y_\beta(x))/T$  und  $\tau = T$  für alle  $\beta \in (0, \beta_0]$  und alle hinreichend kleinen  $T$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U_C} \langle \zeta_\beta(x), (\varphi(T, y_\beta(x), u) - y_\beta(x))/T \rangle &\leq -3W(y_\beta(x))/4 + \frac{T\|v\|^2}{2\beta^2} \\ &\leq -W(y_\beta(x))/2 \leq -W(x)/4. \end{aligned}$$

Wegen

$$\varphi(T, y_\beta(x), u) - y_\beta(x) = \int_0^T f(\varphi(t, y_\beta(x)), u(t)) dt = \int_0^T f(y_\beta(x), u(t)) dt + O(T^2)$$

und der Tatsache, dass

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(y_\beta(x), u(t)) dt$$

in der konvexen Hülle der Menge  $F_\beta := \{f(y_\beta(x), u) \mid u \in U_C\}$  liegt, folgt daraus die Abschätzung

$$\min_{w \in \text{co}F_\beta} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/6.$$

Da der zu minimierende Ausdruck linear in  $w$  ist, wird das Minimum für ein  $w \in F_\beta$  angenommen (Konvexkombinationen von Elementen aus  $F_\beta$  können keine kleineren Werte liefern), also folgt

$$\min_{w \in F_\beta} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/6.$$

Für hinreichend kleine  $\beta > 0$  liegt  $y_\beta(x)$  nahe an  $x$ , so dass wir die Ungleichung

$$\min_{w \in F} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/8$$

mit  $F := \{f(x, u) \mid u \in U_C\}$  folgern können. Für Kontrollwerte  $\bar{u} \in U_C$  gilt nun

$$\varphi(T, x, \bar{u}) - x = \int_0^T f(\varphi(t, x), \bar{u}) dt = \int_0^T f(x, \bar{u}) dt + O(T^2)$$

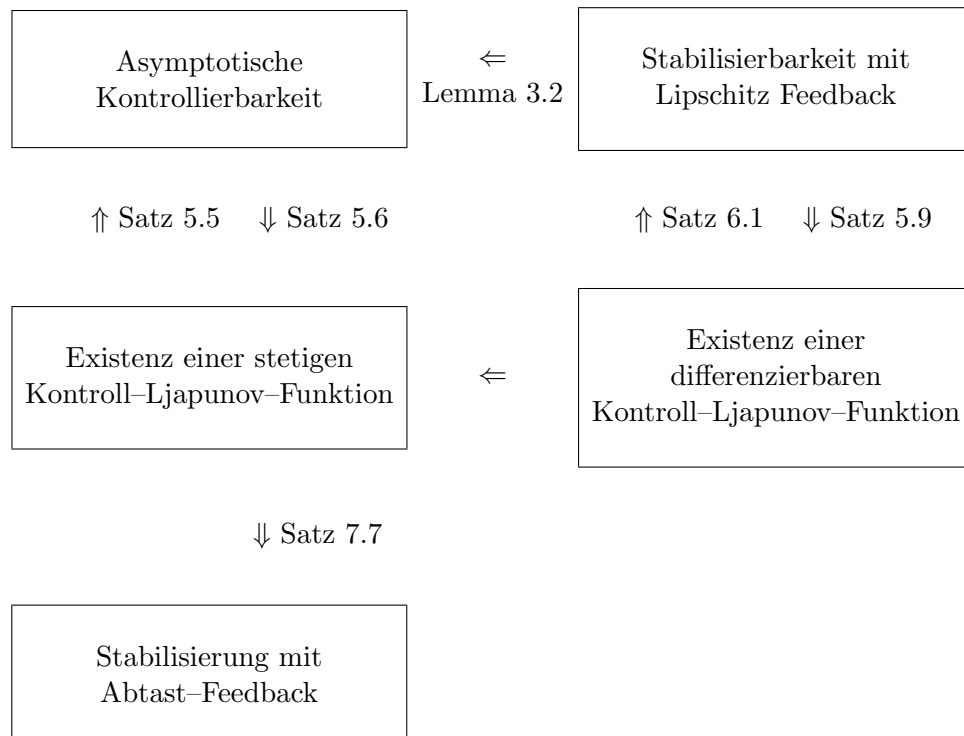
Also folgt mit  $v(\bar{u}) = (\varphi(T, x, \bar{u}) - x)/T$  aus der ersten Ungleichung von Lemma 7.8 (iii) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \inf_{\bar{u} \in U_C} V_\beta(\varphi(T, x, \bar{u})) &\leq \inf_{\bar{u} \in U_C} V_\beta(x + Tv(\bar{u})) \\ &\leq \inf_{\bar{u} \in U_C} \left\{ V_\beta(x) - T\langle \zeta_\beta(x), v(\bar{u}) \rangle + \frac{T^2\|v(\bar{u})\|^2}{2\beta^2} \right\} \\ &= \min_{w \in F} \left\{ V_\beta(x) - T\langle \zeta_\beta(x), w \rangle + O(T^2) + \frac{T^2\|w\|^2}{2\beta^2} \right\} \\ &\leq V_\beta(x) - TW(x)/8 + O(T^2) + \frac{T^2\|w^*\|^2}{2\beta^2} \\ &\leq V_\beta(x) - TW(x)/16 \end{aligned}$$

für alle hinreichend kleinen  $T > 0$ , wobei  $w^* \in F$  den Wert bezeichnet, in dem das Minimum angenommen wird. Dies ist die gewünschte Ljapunov-Ungleichung, weswegen  $V_T = V_\beta$  die gesuchte Sampling-Ljapunov-Funktion ist.  $\square$

## 7.5 Schematische Übersicht der Stabilitäts-Ergebnisse

Die folgende Übersicht stellt die Ergebnisse über die Stabilisierbarkeit nichtlinearer Kontrollsysteme schematisch dar. Hierbei werden nicht alle benötigten Voraussetzungen dargestellt; diese finden sich jeweils präzise in den angegebenen Sätzen.



# Kapitel 8

## Stabilität gestörter Systeme

In diesem Kapitel betrachten wir Kontrollsysteme, in die zusätzlich eine Störung  $w(t)$  eingeht. Bevor wir zu den Kontrollsystemen übergehen, werden wir zunächst gestörte Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)) \quad (8.1)$$

mit  $f : \mathbb{R}^n \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten, wobei  $W \subseteq \mathbb{R}^l$  die Menge der zulässigen Störungswerte ist. Die Menge der zulässigen Störfunktionen  $w(t)$  definieren wir analog zur Menge  $\mathcal{U}$  der zulässigen Kontrollfunktionen als

$$\mathcal{W} := L_\infty(\mathbb{R}, W).$$

Das Vektorfeld  $f$  erfülle hierbei die üblichen Bedingungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes 1.5 mit  $w$  an Stelle von  $u$ . Ganz analog zu den Kontrollsystemen bezeichnen wir die Lösungen von (8.1) mit  $\varphi(t, x_0, w)$ .

### 8.1 Input-to-state Stabilität

Das Konzept der Input-to-state Stabilität (ISS) wurde 1989 von E. Sontag eingeführt und hat sich seitdem als ein fundamentales Konzept zur Stabilitätsanalyse gestörter nichtlinearer Systeme etablieren können.

Zur Motivation des ISS-Konzepts betrachten wir eine lineare Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Nehmen wir an, dass diese Gleichung asymptotisch stabil ist. Dann folgt, dass alle Eigenwerte von  $A$  negativen Realteil besitzen und dass sich die Matrixexponentialfunktion  $e^{At}$  in der Norm durch

$$\|e^{At}\| \leq ce^{-\sigma t}$$

für geeignete Konstanten  $c, \sigma > 0$  abschätzen lässt.

Betrachten wir nun die Störung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dw(t)$$

dieses Systems für eine Matrix  $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ . Die Lösung des gestörten Systems lässt sich explizit als

$$\varphi(t; x, w) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Dw(s)ds$$

schreiben. Daraus erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\varphi(t; x, w)\| &\leq \|e^{At}x\| + \left\| \int_0^t e^{A(t-s)}Dw(s)ds \right\| \\ &\leq ce^{-\sigma t}\|x\| + \int_0^t ce^{-\sigma t}\|D\|\|w(s)\|ds \\ &\leq ce^{-\sigma t}\|x\| + c\|D\|\|w\|_\infty \int_0^t e^{-\sigma t}ds \leq ce^{-\sigma t}\|x\| + \frac{c\|D\|}{\sigma}\|w\|_\infty. \end{aligned}$$

Dies bedeutet also, dass die Lösung für  $t \rightarrow \infty$  gegen den Ball mit Radius  $\frac{c\|D\|}{\sigma}\|w\|_\infty$  konvergiert. Die Lösungen zeigen also ein stabilitätsähnliches Verhalten, konvergieren dabei zwar nicht mehr gegen 0 aber immer noch gegen eine Umgebung der 0, deren Größe proportional zur  $\infty$ -Norm der Störung ist.

Für nichtlineare Systeme ist diese “globale Robustheit” der Stabilität nicht mehr automatisch gegeben. Betrachte z.B. das eindimensionale System

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x+1}, & x \geq 1 \\ -x, & x \in [-1, 1] \\ e^{x+1}, & x \leq -1 \end{cases}$$

Dies System ist asymptotisch stabil, was man z.B. mit der Lyapunov-Funktion  $V(x) = x^2/2$  mit  $W(x) = -xf(x) > 0$  sehen kann. Betrachten wir nun das zugehörige gestörte System

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + w(t),$$

so findet sich für  $w \equiv \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig, immer ein  $\delta > 0$ , so dass  $f(x) + w > \varepsilon/2$  ist für alle  $x \geq \delta$ . Jede Lösung mit Anfangswert  $x \geq \delta$  muss also mit konstanter Rate streng monoton wachsen und damit gegen  $\infty$  divergieren. Die obige Robustheit — in dem Sinne, dass man für kleine Störung noch Konvergenz in eine Umgebung der 0 erhält — ist hier also nicht gegeben.

Die ISS-Eigenschaft verlangt nun gerade diese Robustheit — in einer geeigneten nichtlinearen Verallgemeinerung — als *Definition*:

**Definition 8.1** Es sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Umgebung der 0. Eine gestörte Differentialgleichung heißt *input-to-state stabil (ISS)* auf  $N$ , falls Funktionen  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  existieren, so dass

$$\|\varphi(t, x, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|w\|_\infty)$$

gilt für alle  $x \in N$  und alle  $t \geq 0$ .

Die Gleichung heißt *global ISS*, falls sie ISS auf  $N = \mathbb{R}^n$  ist. □

## 8.2 Ein ISS–Anwendungsbeispiel: Stabilität von Kaskaden

Wir werden die ISS–Eigenschaft in den nächsten Kapitel in der Analyse digitaler Abtastsysteme ausführlich verwenden. Um zu illustrieren, wie ISS auch in der “traditionellen” stetigen Feedback–Regelung eingesetzt werden kann, wollen wir in diesem Abschnitt eine wichtige Anwendung von ISS herleiten und beweisen, die konzeptionell Ähnlichkeiten mit der Backstepping–Methode besitzt.

Hierzu brauchen wir zunächst das folgende Resultat.

**Satz 8.2** Ein System (8.1) ist global ISS genau dann, wenn eine Funktion  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^+)$  sowie Funktionen  $\alpha_1, \alpha_2, \sigma, \chi \in \mathcal{K}_\infty$  existieren mit

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (8.2)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und

$$DV(x)f(x, w) \leq -\sigma(\|x\|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, w \in W \text{ mit } \|x\| \geq \chi(\|w\|).$$

Die Funktion  $V$  heißt dann *ISS–Ljapunov–Funktion*.

**Beweisskizze:**<sup>1</sup> Wir skizzieren den Existenzbeweis für  $V$ : Zunächst zeigt man, dass aus der ISS–Eigenschaft folgt, dass eine  $\mathcal{K}_\infty$ –Funktion  $\delta$  existiert, so dass für jede Abbildung  $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow W$  mit  $\|k(t, x)\| \leq \delta(\|x\|)$  für alle  $t \geq 0$  die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$$

asymptotisch stabil ist mit Attraktionsrate  $\beta$  unabhängig von der Wahl von  $k$ . Nun verwendet man einen Satz über die Existenz von Lyapunov–Funktionen für gestörte Differentialgleichungen (der Beweis ist ganz ähnlich zu dem von Satz 2.13) und erhält so eine differenzierbare Ljapunov–Funktion  $V$  mit

$$DV(x)f(x, k(t, x)) \leq -\sigma(\|x\|)$$

für ein  $\sigma \in \mathcal{KL}$  und alle  $k$  mit der obigen Schranke. Daraus folgt

$$DV(x)f(x, w) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

falls  $\|w\| \leq \delta(\|x\|)$ . Hieraus folgt die Behauptung mit  $\chi = \delta^{-1}$ .  $\square$

Beachte, dass  $\sigma(\|x\|)$  hier die Rolle des Terms  $W(x)$  spielt, den wir bisher in der Definition der Ljapunov–Funktionen verwendet haben.

Das folgende Lemma bietet eine alternative Darstellung der ISS–Ljapunov–Funktion.

**Lemma 8.3** Für eine Funktion  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^+)$  sind die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent:

<sup>1</sup>Der ausführliche Beweis findet sich in der Arbeit “On characterizations of the input–to–state stability property” von E. Sontag und Y. Wang [16].

(i) Es existieren  $\chi, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$  mit

$$DV(x)f(x, w) \leq -\sigma(\|x\|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, w \in W \text{ mit } \|x\| \geq \chi(\|w\|)$$

(ii) Es existieren  $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$  mit

$$DV(x)f(x, w) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|w\|)$$

**Beweis:** Übungsaufgabe.

**Hinweis:** Für die Richtung “(i)  $\Rightarrow$  (ii)” beweist man zunächst, dass mit

$$\hat{\alpha}_4(r) = \max\{0, DV(x)f(x, w) + \sigma(\chi(\|w\|)) \mid \|x\| \leq \chi(r), \|w\| \leq r\}$$

die Ungleichung in (ii) für  $\alpha_3 = \sigma$  und  $\hat{\alpha}_4$  an Stelle von  $\alpha_4$  erfüllt ist. Dann beweist man, dass  $\hat{\alpha}_4$  durch eine  $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion  $\alpha_4$  nach oben abgeschätzt werden kann.  $\square$

Mit Hilfe der ISS-Ljapunov-Funktionen können wir das folgende Resultat über sogenannte *Kaskaden* gestörter Systeme beweisen.

**Satz 8.4** Betrachte die gestörten Systeme

$$\dot{y}(t) = g(y(t), v(t)), \quad \dot{z}(t) = h(z(t), w(t)) \quad (8.3)$$

mit Zuständen  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$  und Störungen  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $w \in \mathbb{R}^l$ , und das zugehörige gekoppelte System mit  $x = (y^T, z^T)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $w \in \mathbb{R}^l$  gegeben durch

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)) := \begin{pmatrix} g(y(t), z(t)) \\ h(z(t), w(t)) \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

Dann gilt: Falls jedes der beiden Systeme (8.3) global ISS ist, so ist auch (8.4) global ISS.

**Beweis:** Da beide Systeme (8.3) ISS sind, existieren ISS Ljapunov-Funktionen  $V^g, V^h$  mit

$$DV^g(x)g(y, v) \leq -\alpha_3^g(\|y\|) + \alpha_4^g(\|v\|) \text{ und } DV^h(x)h(z, w) \leq -\alpha_3^h(\|z\|) + \alpha_4^h(\|w\|).$$

Durch eine geeignete Reskalierung  $V^g \rightarrow \rho^g(V^g)$  und  $V^h \rightarrow \rho^h(V^h)$  mit  $\rho^g, \rho^h \in \mathcal{K}_\infty$  können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\alpha_3^h(r) \geq 2\alpha_4^g(r)$  gilt.<sup>2</sup> Setzen wir nun  $V(x) := V^g(y) + V^h(z)$  so folgt

$$\begin{aligned} DV(x)f(x, w) &= DV^g(y)g(y, z) + DV^h(z)g(y, w) \\ &\leq -\alpha_3^g(\|y\|) + \alpha_4^g(\|z\|) - \alpha_3^h(\|z\|) + \alpha_4^h(\|w\|) \\ &\leq -\alpha_3^g(\|y\|) - \alpha_4^g(\|v\|) + \alpha_4^h(\|w\|). \end{aligned}$$

Definieren wir

$$\alpha_3(r) := \min\{\alpha_3^g(\|y\|) + \alpha_4^g(\|z\|) \mid \|(y, z)\| = r\},$$

<sup>2</sup>Für einen Beweis siehe das Korollar in Abschnitt I in der Arbeit “Changing supply functions in input/state stable systems” von E. Sontag and A. Teel, IEEE Transactions on Automatic Control 40(1995), 1476–1478.

so sieht man leicht, dass dies eine  $\mathcal{K}_\infty$ –Funktion ist, die die Ungleichung

$$\alpha_3(\|x\|) \leq \alpha_3^g(\|y\|) + \alpha_4^g(\|z\|)$$

erfüllt. Also folgt

$$DV(x)f(x, w) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4^h(\|w\|)$$

weswegen  $V$  eine ISS–Ljapunov–Funktion für (8.4) ist. Damit folgt ISS.  $\square$

**Korollar 8.5** Betrachte die Systeme

$$\dot{y}(t) = g(y(t), v(t)), \quad \dot{z}(t) = h(z(t)) \quad (8.5)$$

mit Zuständen  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$  und Störung  $v \in \mathbb{R}^m$ , und das zugehörige gekoppelte System mit  $x = (y^T, z^T)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $w \in \mathbb{R}^l$  gegeben durch

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)) := \begin{pmatrix} g(y(t), z(t)) \\ h(z(t)) \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Dann gilt: Falls das  $y$ –System global ISS und das  $z$ –System global asymptotisch stabil ist, so ist (8.6) global asymptotisch stabil.

**Beweis:** Wir können das  $z$ –System durch Addition von “ $0 \cdot w$ ” zu einem gestörten System erweitern, Aus der globalen asymptotischen Stabilität des Systems folgt, dass dieses (formal) gestörte System global ISS ist. Die Anwendung von Satz 8.4 liefert dann globale ISS für  $f$ , woraus die globale asymptotische Stabilität folgt.  $\square$

**Beispiel 8.6** Betrachte das Kontrollsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t)x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$

(dies ist eine Variante des Satellitenmodells vom 6. Übungsblatt in anderen Koordinaten). Die Behauptung ist, dass das Feedback

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 - x_2x_3 \\ -x_3 + x_1^2 + 2x_1x_2x_3 \end{pmatrix}$$

das System global stabilisiert.

Das closed loop System ist gerade gegeben durch (zur Vereinfachung der Notation ohne Argument  $(t)$  geschrieben)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + x_1^2 + 2x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Führen wir nun eine Koordinatentransformation  $\tilde{x} = \Psi(x)$  mittels  $\tilde{x}_1 = x_1$ ,  $\tilde{x}_2 = x_1 + x_2$  und  $\tilde{x}_3 = x_3 - x_1^2$  so ergibt sich das System vermöge der üblichen Vektorfeld-Transformation  $\tilde{f}(\tilde{x}) = D\Psi(\Psi^{-1}(\tilde{x}))f(\Psi^{-1}(\tilde{x}))$  zu

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + \tilde{x}_2\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_1\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1^3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -\tilde{x}_3\end{aligned}$$

Nun rechnet man nach, dass Korollar 8.5 mit  $y = \tilde{x}_1$  und  $z = (\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$  anwendbar ist, wodurch asymptotische Stabilität für das transformierte System folgt, die sich auf das System in den Originalkoordinaten überträgt.  $\square$

### 8.3 Gestörte Kontrollsysteme

In diesem Kapitel betrachten wir Kontrollsysteme, in die zusätzlich eine Störung  $w(t)$  eingeht. Das Grundmodell (1.1) erweitert sich damit zu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)) \quad (8.7)$$

mit  $f : \mathbb{R}^n \times U \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $W \subseteq \mathbb{R}^l$  die Menge der zulässigen Störungswerte ist. Die Menge der zulässigen Störfunktionen definieren wir analog zur Menge  $\mathcal{U}$  der zulässigen Kontrollfunktionen als

$$\mathcal{W} := L_\infty(\mathbb{R}, W).$$

Wir nehmen hierbei an, dass  $f$  die Bedingungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes 1.5 für  $(u, w)$  an Stelle von  $u$  erfüllt. Zudem nehmen wir der Einfachheit halber durchgehend an, dass  $f$  global gleichmäßig Lipschitz-stetig in  $w$  mit einer Lipschitz-Konstante  $L_w > 0$  ist, dass also

$$\|f(x, u, w_1) - f(x, u, w_2)\| \leq L_w \|w_1 - w_2\|$$

gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in U$ ,  $w_1, w_2 \in W$ .

Im Folgenden sei für (8.7) ein Feedback  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  gegeben. Falls  $f(x, F(x), w)$  Lipschitz in  $x$  ist, so definieren wir die zugehörigen Lösungen  $\varphi(t, x_0, F, w)$  als Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)), w(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Im anderen Fall definieren wir die Lösungen  $\varphi_T(t, x_0, F, w)$  analog zu Definition 7.1 für eine Abtastrate  $T > 0$  induktiv mittels

$$\varphi_T(t, x_0, F, w) = \varphi(t - iT, x_i, F(x_i), w) \text{ für alle } t \in [iT, (i+1)T]$$

wobei  $\varphi(\cdot, x_i, F(x_i), w)$  die Lösung von (8.7) mit Anfangswert  $x_i := \varphi_T(t_i, x_0, F, w)$  und konstanter Kontrollfunktion  $u(t) \equiv F(x_i)$ . Um die Schreibweise zu vereinheitlichen, schreiben wir  $\varphi(t, x_0, F, w)$  auch als  $\varphi_0(t, x_0, F, w)$ . Damit können wir im Folgenden alle Lösungen einheitlich als  $\varphi_T$ ,  $T \in [0, T^*]$  schreiben.



Definition 8.1 lässt sich damit ganz analog auf die Feedback-geregelten gestörten Lösungen  $\varphi_T(t, x, F, w)$  für  $T \in [0, T^*]$  anwenden.

Wir haben oben gesehen, dass globale ISS für nichtlineare Systeme nicht automatisch aus der globalen asymptotischen Stabilität folgt. Allerdings folgt ISS für beliebige kompakte Teilmengen des Zustandsraumes aus der asymptotischen Stabilität, wenn der Störbereich  $W$  hinreichend klein ist und das System Lipschitz ist. Der folgende Satz formalisiert dies und zeigt auch, dass die Attraktionsrate aus der asymptotischen Stabilität beim Übergang zu ISS erhalten bleiben kann. In diesem Satz verwenden wir für eine beschränkte Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  die Maße

$$d_{max}(N) := \sup\{\|x\| \mid x \in N\} \text{ und } d_{min}(N) := \inf\{\|x\| \mid x \notin N\}.$$

**Satz 8.7** Es existieren Abbildungen

$$\gamma : \mathcal{KL} \times (\mathbb{R}^+)^4 \rightarrow \mathcal{K}_\infty \quad \text{und} \quad \alpha : \mathcal{KL} \times (\mathbb{R}^+)^4 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn  $\beta \in \mathcal{KL}$ , ein  $T \in [0, T^*]$  und eine beschränkte Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  mit  $d_{min}(N) > 0$  existieren, so dass die Lösungen  $\varphi_T(t, x, F, 0)$  die Ungleichung

$$\|\varphi_T(t, x, F, 0)\| \leq \beta(\|x\|, t)$$

für alle  $x \in B$  und alle  $t \geq 0$  erfüllen und zudem  $L > 0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\|f(x, F(x), 0) - f(y, F(y), 0)\| \leq L\|x - y\|$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|, \|y\| \leq d_{max}(N) + d_{min}(N) + \beta(d_{max}(N), 0)$  erfüllt ist, dann ist das gestörte System ISS auf  $N$  mit Störungsmenge  $W = B_{\alpha(\beta, d_{max}(N), d_{min}(N), L, L_w)}(0)$ , Attraktionsrate  $\beta$  und Robustheitsmaß  $\gamma(\beta, d_{max}(N), d_{min}(N), L, L_w)$ .

**Beweis:** Beachte zunächst, dass aus Gronwall's Lemma, der Lipschitz-Annahme und der Abschätzung

$$\|\varphi_T(t, x, F, 0)\| \leq \beta(\|x\|, t) \leq \beta(\|x\|, 0) \leq \beta(d_{max}(N), 0)$$

für  $x \in N$  die Ungleichung

$$\|\varphi_T(t, x, F, w) - \varphi_T(t, x, F, 0)\| \leq e^{Lt} L_w \|w\|_\infty \quad (8.8)$$

folgt für alle  $t, w$  mit  $e^{Lt} L_w \|w\|_\infty \leq d_{min}(N)$ . Mit der asymptotischen Stabilität von  $\varphi_T(t, x, F, 0)$  folgt daraus

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + e^{Lt} L_w \|w\|_\infty. \quad (8.9)$$

Wir wählen nun  $\varepsilon \in (0, d_{min}(N)/2]$  maximal mit  $\beta(\varepsilon, 0) \leq d_{min}(N)/2$ ,  $t^* > 0$  minimal mit  $\beta(d_{max}(N), t^*) \leq \varepsilon/2$  (und  $t^*$  ganzzahliges Vielfaches von  $T$  für  $T > 0$ ) und setzen

$$\alpha = \alpha(\beta, d_{max}(N), d_{min}(N), L, L_w) := \frac{\varepsilon}{2e^{Lt^*} L_w}.$$

Dann ist die Bedingung  $e^{Lt}L_w\|w\|_\infty < d_{\min}(N)$  wegen  $d_{\min} > \varepsilon$  und der Wahl von  $t^*$  und  $\alpha$  für alle  $t \in [0, t^*]$  und alle  $x \in N$  erfüllt. Daher können wir (8.9) anwenden und erhalten  $\|\varphi_T(t^*, x, F, w)\| \leq \varepsilon$  für alle Störfunktionen  $w$  mit  $w(t) \in W = B_\alpha(0)$ . Aus der Wahl von  $\varepsilon$  folgt damit  $\varphi_T(t^*, x, F, w) \in N$ , weswegen wir induktiv für  $i \in \mathbb{N}$  fortfahren können und  $\|\varphi_T(it^*, x, F, w)\| \leq \varepsilon$  für alle Störfunktionen  $w$  mit  $w(t) \in W = B_\alpha(0)$  erhalten.

Für  $t \in [it^*, (i+1)t^*]$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , erhalten wir daraus wiederum mit (8.9)

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|\varphi_T(it^*, x, F, w)\|, t - it^*) + e^{Lt^*}L_w\|w\| \leq \beta(\varepsilon, 0) + e^{Lt^*}L_w\|w\| < d_{\min}$$

woraus  $\varphi_T(t, x, F, w) \in B_{d_{\min}(N)}(0) \subset N$  folgt für alle  $x \in N$ , alle  $t \geq t^*$  und alle Störfunktionen  $w$  mit  $w(t) \in W$ .

Für jedes  $\eta \in (0, \alpha]$  wählen wir nun  $t_\eta \geq t^*$  maximal mit  $e^{Lt_\eta}L_w \leq 1/\sqrt{\eta}$  (und  $t_\eta$  ganzzahliges Vielfaches von  $T$  falls  $T > 0$ ), woraus die Divergenz  $t_\eta \rightarrow \infty$  für  $\eta \rightarrow 0$  folgt. Mit dieser Wahl von  $t_\eta$  erhalten wir aus (8.9) für jedes  $x \in B$  und jedes  $w$  mit  $w(t) \in W$

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \sqrt{\|w\|_\infty}$$

für  $t \in [0, t_{\|w\|_\infty}]$ . Für  $t \geq t_{\|w\|_\infty}$  fahren wir für  $i \in \mathbb{N}$  induktiv fort und erhalten so  $\|\varphi_T(it_{\|w\|_\infty}, x, F, w)\| \leq \beta(d_{\max}(N), t_{\|w\|_\infty}) + \sqrt{\|w\|_\infty}$ . Für  $t \geq t_{\|w\|_\infty}$  ergibt sich daraus

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\beta(d_{\max}(N), t_{\|w\|_\infty}) + \sqrt{\|w\|_\infty}, 0) + \sqrt{\|w\|_\infty}.$$

Daraus folgt

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|w\|_\infty)$$

für  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  gegeben durch  $\gamma(\eta) := \beta(\beta(d_{\max}(N), \tilde{t}_\eta) + \sqrt{\eta}, 0) + \sqrt{\eta}$ , wobei  $\tilde{t}_\eta$  eine untere Schranke von  $t_\eta$  darstellt, die stetig und monoton fallend in  $\eta$  ist mit  $\tilde{t}_\eta \rightarrow \infty$  für  $\eta \rightarrow 0$  (beachte, dass  $t_\eta$  stückweise konstant ist für  $T > 0$ ; wir brauchen in diesem Fall die stetige Schranke  $\tilde{t}_\eta$  um die Stetigkeit von  $\gamma$  zu gewährleisten).  $\square$

## 8.4 Praktische Stabilität

Den Begriff der praktischen Stabilität haben wir bereits in Definition 7.2 kennen gelernt. Hier werden wir diesen Begriff etwas systematischer einführen und auch auf die ISS Eigenschaft erweitern. Zudem werden wir zeigen, dass Satz 8.7 im praktischen Fall erhalten bleibt.

**Definition 8.8** Betrachte Feedback-geregelte Systeme  $\varphi_T(t, x, F)$  für  $t \in [0, T^*]$  und eine Umgebung  $N \subset \mathbb{R}^n$  der 0.

(i) Ein System heißt  $\eta$ -praktisch asymptotisch stabil für ein  $\eta > 0$ , falls ein  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert, so dass für alle  $x \in N$  die Ungleichung

$$\|\varphi_T(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \eta$$

gilt für alle  $t \geq 0$ .

(ii) Eine Familie von Systemen  $\varphi_{T_k}^k(t, x, F_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , heißt *praktisch asymptotisch stabil*, falls eine Folge  $\eta_k \rightarrow 0$  und ein  $\beta \in \mathcal{KL}$  existiert, so dass für alle  $x \in N$  die Ungleichung

$$\|\varphi_{T_k}^k(t, x, F_k)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \eta_k$$

gilt für alle  $t \geq 0$  und alle  $k \in \mathbb{N}$ . □

**Definition 8.9** Betrachte Feedback-geregelte gestörte Systeme  $\varphi_T(t, x, F, w)$ ,  $T \in [0, T^*]$ , und eine Umgebung  $N \subset \mathbb{R}^n$  der 0.

(i) Ein System heißt  $\eta$ -*praktisch ISS* für ein  $\eta > 0$ , falls  $\beta \in \mathcal{KL}$  und  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  existieren, so dass für alle  $x \in N$  und alle  $w \in \mathcal{W}$  die Ungleichung

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|w\|_\infty) + \eta$$

gilt für alle  $t \geq 0$ .

(ii) Eine Familie von Systemen  $\varphi_{T_k}^k(t, x, F_k, w)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , heißt *praktisch ISS*, falls eine Folge  $\eta_k \rightarrow 0$  und  $\beta \in \mathcal{KL}$  und  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  existieren, so dass für alle  $x \in N$  und alle  $w \in \mathcal{W}$  die Ungleichung

$$\|\varphi_{T_k}^k(t, x, F_k, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|w\|_\infty) + \eta_k$$

gilt für alle  $t \geq 0$  und alle  $k \in \mathbb{N}$ . □

Für die praktischen Stabilitätsbegriffe gilt Satz 8.7 analog:

**Satz 8.10** Es existieren Abbildungen

$$\gamma : \mathcal{KL} \times (\mathbb{R}^+)^4 \rightarrow \mathcal{K}_\infty \quad \text{und} \quad \alpha : \mathcal{KL} \times (\mathbb{R}^+)^4 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn  $\beta \in \mathcal{KL}$ , ein  $T \in [0, T^*]$  und eine beschränkte Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  mit  $d_{\min}(N) > 0$  existieren, so dass die Lösungen  $\varphi_T(t, x, F, 0)$  die Ungleichung

$$\|\varphi_T(t, x, F, 0)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \eta$$

für alle  $x \in B$ , alle  $t \geq 0$  und ein  $\eta \leq d_{\min}/2$  erfüllen und zudem  $L > 0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\|f(x, F(x), 0) - f(y, F(y), 0)\| \leq L\|x - y\|$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|, \|y\| \leq 2d_{\min}(N) + \beta(d_{\max}(N), 0)$  erfüllt ist, dann ist das gestörte System  $\eta$ -praktisch ISS auf  $N$  mit Störungsmenge  $W = B_{\alpha(\beta, d_{\max}(N), d_{\min}(N), L, L_w)}(0)$ , Attraktionsrate  $\beta$  und Robustheitsmaß  $\gamma(\beta, d_{\max}(N), d_{\min}(N), L, L_w)$ .

**Beweis:** Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Satz 8.7 mit einigen kleineren Modifikationen, um das  $\eta$  in den Beweis einzubeziehen:

Beachte zunächst, dass aus Gronwall's Lemma, der Lipschitz-Annahme und der Abschätzung

$$\|\varphi_T(t, x, F, 0)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \eta \leq \beta(\|x\|, 0) + \eta \leq \beta(d_{\max}(N), 0) + \eta$$

für  $x \in N$  die Ungleichung

$$\|\varphi_T(t, x, F, w) - \varphi_T(t, x, F, 0)\| \leq e^{Lt} L_w \|w\|_\infty \quad (8.10)$$

folgt für alle  $t, w$  mit  $e^{Lt} L_w \|w\|_\infty \leq d_{\min}(N)$ . Mit der asymptotischen Stabilität von  $\varphi_T(t, x, F, 0)$  folgt daraus

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + e^{Lt} L_w \|w\|_\infty + \eta. \quad (8.11)$$

Wir wählen nun  $\varepsilon \in (0, d_{\min}(N)/4]$  maximal mit  $\beta(\varepsilon, 0) \leq d_{\min}(N)/4$ ,  $t^* > 0$  minimal mit  $\beta(d_{\max}(N), t^*) \leq \varepsilon/2$  (und  $t^*$  ganzzahliges Vielfaches von  $T$  für  $T > 0$ ) und setzen

$$\alpha = \alpha(\beta, d_{\max}(N), d_{\min}(N), L, L_w) := \frac{\varepsilon}{4e^{Lt^*} L_w}.$$

Dann ist die Bedingung  $e^{Lt} L_w \|w\|_\infty < d_{\min}(N)$  wegen  $d_{\min} > \varepsilon$  und der Wahl von  $t^*$  und  $\alpha$  für alle  $t \in [0, t^*]$  und alle  $x \in N$  erfüllt. Daher können wir (8.9) anwenden und erhalten  $\|\varphi_T(t^*, x, F, w)\| \leq \varepsilon$  für alle Störfunktionen  $w$  mit  $w(t) \in W = B_\alpha(0)$ . Aus der Wahl von  $\varepsilon$  folgt damit  $\varphi_T(t^*, x, F, w) \in N$ , weswegen wir induktiv für  $i \in \mathbb{N}$  fortfahren können und  $\|\varphi_T(it^*, x, F, w)\| \leq \varepsilon$  für alle Störfunktionen  $w$  mit  $w(t) \in W = B_\alpha(0)$  erhalten.

Für  $t \in [it^*, (i+1)t^*]$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , erhalten wir daraus wiederum mit (8.9)

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|\varphi_T(it^*, x, F, w)\|, t - it^*) + e^{Lt} L_w \|w\| \leq \beta(\varepsilon, 0) + e^{Lt} L_w \|w\| + \eta < d_{\min}$$

woraus  $\varphi_T(t, x, F, w) \in B_{d_{\min}(N)}(0) \subset N$  folgt für alle  $x \in N$ , alle  $t \geq t^*$  und alle Störfunktionen  $w$  mit  $w(t) \in W$ .

Für jedes  $\delta \in (0, \alpha]$  wählen wir nun  $t_\delta \geq t^*$  maximal mit  $e^{Lt_\delta} L_w \leq 1/\sqrt{\delta}$  (und  $t_\delta$  ganzzahliges Vielfaches von  $T$  falls  $T > 0$ ), woraus die Divergenz  $t_\delta \rightarrow \infty$  für  $\delta \rightarrow 0$  folgt. Mit dieser Wahl von  $t_\delta$  erhalten wir aus (8.9) für jedes  $x \in B$  und jedes  $w$  mit  $w(t) \in W$

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \sqrt{\|w\|_\infty} + \eta$$

für  $t \in [0, t_{\|w\|_\infty}]$ . Für  $t \geq t_{\|w\|_\infty}$  fahren wir für  $i \in \mathbb{N}$  induktiv fort und erhalten so  $\|\varphi_T(it_{\|w\|_\infty}, x, F, w)\| \leq \beta(d_{\max}(N), t_{\|w\|_\infty}) + \sqrt{\|w\|_\infty} + \eta$ . Für  $t \geq t_{\|w\|_\infty}$  ergibt sich daraus

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\beta(d_{\max}(N), t_{\|w\|_\infty}) + \sqrt{\|w\|_\infty}, 0) + \sqrt{\|w\|_\infty} + \eta.$$

Daraus folgt

$$\|\varphi_T(t, x, F, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|w\|_\infty) + \eta$$

für  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  gegeben durch  $\gamma(\delta) := \beta(\beta(d_{\max}(N), \tilde{t}_\delta) + \sqrt{\delta}, 0) + \sqrt{\delta}$  wobei  $\tilde{t}_\delta$  wie im Beweis von Satz 8.7 eine stetige untere Schranke von  $t_\delta$  ist.  $\square$

# Kapitel 9

## Stabilität unter Digitalisierung

In diesem Kapitel werden wir die folgende Fragestellung untersuchen: Gegeben ein stetiges Feedback  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , so dass  $f(x, F(x))$  Lipschitz-stetig ist. Dieses Feedback wird nun mit Hilfe eines digitalen Rechners implementiert, so dass das tatsächliche geregelte System die Form eines Abtastsystems aus Definition (7.1) besitzt. Die Frage, die sich nun stellt, ist: Ist dieses digital geregelte System noch asymptotisch stabil, zumindest für hinreichend kleine Abtastzeiten  $T > 0$ ?

Um diese Frage zu beantworten, werden wir zunächst einige Konzepte aus der Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen<sup>1</sup> und der Numerik Dynamischer Systeme<sup>2</sup> wiederholen, die wir hier etwas modifizieren, um sie an unsere Gegebenheiten anzupassen.

Wenn wir in diesem Kapitel von einem “System” sprechen, ist immer ein Feedback-geregeltes (ungestörtes oder gestörtes) System zu verstehen, dessen Lösungen entweder im klassischen oder im Abtast-Sinne definiert sind. Wo dies ohne Missverständnisse möglich ist, werden wir das Feedback  $F$  und die Abtastzeit  $T$  nicht separat als Parameter aufführen.

### 9.1 Konsistenz

Der wesentliche Begriff, den wir hier aus der Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen benötigen, ist die *Konsistenz*, die wir hier nur im (einfacheren) Sinne der Einschrittverfahren benötigen.

**Definition 9.1** Betrachte zwei Systeme  $\varphi_1(t, x)$  und  $\varphi_2(t, x)$  und eine Zeit  $\Delta > 0$ . Dann nennen wir die beiden Systeme  $\varepsilon$ -konsistent auf einer Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ , wenn für alle  $t \in [0, \Delta]$  und alle  $x \in D$  die Ungleichung

$$\|\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x)\| \leq t\varepsilon$$

gilt. □

---

<sup>1</sup>siehe [www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/numerik05/](http://www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/numerik05/)

<sup>2</sup>siehe [www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/numdyn0506/](http://www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/numdyn0506/)

Beachte, dass wir diesen Konsistenzbegriff in einem “gemischten” diskret–kontinuierlichen Sinne definiert haben: Die “diskrete” Zeit  $\Delta > 0$  gibt ein Intervall  $[0, \Delta]$  vor, auf dem wir die Konsistenz betrachten, auf diesem Intervall soll die Bedingung aber für alle “kontinuierlichen” Zeiten  $t \in [0, \Delta]$  erfüllt sein. Diese Forderung ist durch die besondere Struktur der Abtastsysteme bedingt, die zwar zeitdiskret geregelt werden, deren Lösung aber trotzdem in kontinuierlicher Zeit definiert ist. In der Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, bei der zeitdiskrete Approximationen betrachtet werden, wird die Ungleichung nur für  $t = \Delta$  verlangt.

Der folgende Satz zeigt eine Konsequenz der Konsistenz unter einer Lipschitz–Bedingung.

**Satz 9.2** Gegeben seien zwei  $\varepsilon$ –konsistente Systeme  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  für ein  $\Delta > 0$ , wobei  $\Delta$  im Fall von ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastraten  $T_i$  sei. Für  $i = 1$  oder  $i = 2$  gelte die Lipschitz–Bedingung

$$\|\varphi_i(\Delta, x) - \varphi_i(\Delta, y)\| \leq e^{L_D \Delta} \|x - y\|$$

für ein  $L_D > 0$  und alle  $x, y \in D$ . Sei  $x \in D$  und  $t^* > 0$  so, dass

$$\varphi_1(t, x) \in D, \quad \varphi_2(t, x) \in D \quad \text{für } t \in [0, t^*]$$

gilt. Dann gilt für alle  $t \in [0, t^*]$  die Ungleichung

$$\|\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x)\| \leq \frac{e^{L_D t} - 1}{L_D} \varepsilon.$$

**Beweis:** Der Beweis verläuft ähnlich wie der Konvergenzbeweis für Einschrittverfahren gewöhnlicher Differentialgleichungen:

O.B.d.A. gelte die Lipschitz–Eigenschaft für  $i = 1$ . Wir wählen  $x \in D$  und  $t^* > 0$  wie in der Annahme. Wir betrachten zunächst den Fehler zu den Zeiten  $i\Delta$ , also

$$e_i := \|\varphi_1(i\Delta, x) - \varphi_2(i\Delta, x)\|.$$

Für diesen gilt für  $i \geq 1$

$$\begin{aligned} e_i &= \|\varphi_1(i\Delta, x) - \varphi_2(i\Delta, x)\| \\ &= \|\varphi_1(\Delta, \varphi_1((i-1)\Delta, x)) - \varphi_2(\Delta, \varphi_2((i-1)\Delta, x))\| \\ &\leq \|\varphi_1(\Delta, \varphi_1((i-1)\Delta, x)) - \varphi_1(\Delta, \varphi_2((i-1)\Delta, x))\| \\ &\quad + \|\varphi_1(\Delta, \varphi_2((i-1)\Delta, x)) - \varphi_2(\Delta, \varphi_2((i-1)\Delta, x))\| \\ &\leq e^{L_D \Delta} \|\varphi_1((i-1)\Delta, x) - \varphi_2((i-1)\Delta, x)\| + \Delta \varepsilon \\ &= e^{L_D \Delta} e_{i-1} + \Delta \varepsilon \end{aligned}$$

wobei wir die Lipschitzbedingung und die Konsistenz ausgenutzt haben. Wir erhalten also für den Fehler  $e_i$  die rekursive Gleichung

$$e_i \leq e^{L_D \Delta} e_{i-1} + \Delta \varepsilon$$

sowie die (offensichtliche) ‘‘Anfangsbedingung’’  $e_0 = 0$ .

Mittels Induktion beweisen wir, dass hieraus die Abschätzung

$$e_i \leq \frac{e^{L_D i \Delta} - 1}{L_D} \varepsilon$$

folgt. Für  $i = 0$  ist die Abschätzung klar. Für  $i - 1 \rightarrow i$  verwenden wir

$$e^{L_D \Delta} - 1 = L_D \Delta + \frac{L_D^2 \Delta^2}{2} + \dots \geq L_D \Delta,$$

also

$$\Delta \leq \frac{e^{L_D \Delta} - 1}{L_D} \quad (9.1)$$

und erhalten damit und mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} e_i &\leq e^{L_D \Delta} e_{i-1} + \Delta \varepsilon \\ &\leq e^{L_D \Delta} \frac{e^{L_D (i-1) \Delta} - 1}{L_D} \varepsilon + \frac{e^{L_D \Delta} - 1}{L_D} \varepsilon \\ &= \frac{e^{L_D i \Delta} - e^{L_D \Delta} + e^{L_D \Delta} - 1}{L_D} \varepsilon \\ &= \frac{e^{L_D i \Delta} - 1}{L_D} \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung für  $t = i\Delta$ . Für beliebige  $t \in [0, t^*]$  sei  $i \in \mathbb{N}_0$  maximal mit  $i\Delta \leq t$  und  $\tau := t - i\Delta$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x)\| &= \|\varphi_1(\tau, \varphi_1(i\Delta, x)) - \varphi_2(\tau, \varphi_2(i\Delta, x))\| \\ &\leq \|\varphi_1(\tau, \varphi_1(i\Delta, x)) - \varphi_1(\tau, \varphi_2(i\Delta, x))\| \\ &\quad + \|\varphi_1(\tau, \varphi_2(i\Delta, x)) - \varphi_2(\tau, \varphi_2(i\Delta, x))\| \\ &\leq e^{L_D \tau} e_i + \tau \varepsilon \\ &\leq e^{L_D \tau} \frac{e^{L_D i \Delta} - 1}{L_D} \varepsilon + \frac{e^{L_D \tau} - 1}{L_D} \varepsilon = \frac{e^{L_D t} - 1}{L_D} \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir (9.1) für  $\Delta = \tau$  angewendet haben. Dies liefert die Behauptung.  $\square$

## 9.2 Einbettung

Wir wollen im Folgenden ISS-Techniken zur Stabilitätsanalyse konsistenter Systeme anwenden. Dazu müssen wir Konsistenz in eine Eigenschaft gestörter Systeme übersetzen. Das passende Konzept hierfür ist die Konstruktion der *Einbettung*, die für zwei gestörte Systeme wie folgt definiert ist.

**Definition 9.3** Gegeben seien zwei gestörte Systeme  $\varphi_1(t, x, w)$  und  $\varphi_2(t, x, w)$  mit Störfunktionen  $\mathcal{W}_1$  und  $\mathcal{W}_2$  sowie  $\delta, \rho \geq 0$ . Dann nennen wir das System  $\varphi_2$   $(\delta, \rho)$ -eingebettet in das System  $\varphi_1$  auf einer Menge  $D$ , falls für jede Störfunktion  $w_2 \in \mathcal{W}_2$  und jedes  $x \in D$  und  $t^* > 0$  mit

$$\varphi_2(t, x, w_2) \in D \quad \text{für alle } t \in [0, t^*]$$

eine Störfunktion  $w_1 \in \mathcal{W}_1$  existiert mit

$$\|w_1\|_\infty \leq \delta + \rho \|w_2\|_\infty \quad \text{und} \quad \varphi_1(t, x, w_1) = \varphi_2(t, x, w_2) \quad \text{für alle } t \in [0, t^*].$$

□

**Bemerkung 9.4** Beachte, dass diese Definition auch dann anwendbar ist, wenn  $\mathcal{W}_2 = \{0\}$  ist, d.h., wenn das eingebettete zweite System ungestört ist. In diesem Fall kann immer  $\rho = 0$  gewählt werden. □

Für eingebettete Systeme gilt der folgende Satz.

**Satz 9.5** Betrachte ein System  $\varphi_1$  mit einer beschränkten Störungsmenge  $W_1$  mit  $\|w\| \leq w_{max}$  für alle  $w \in W_1$  ist. Das System  $\varphi_1$  sei  $\eta_1$ -praktisch ISS für  $\eta_1 \geq 0$ ,  $\beta_1 \in \mathcal{KL}$  und  $\gamma_1 \in \mathcal{K}_\infty$  auf einer beschränkten Menge  $N$  Dann gilt:

Wenn ein System  $\varphi_2$   $(\delta, \rho)$ -eingebettet in  $\varphi_1$  auf  $D = B_{\beta_1(d_{max}(N), 0) + \gamma_1(w_{max}) + \eta_1}(0)$  ist, dann ist  $\varphi_2$   $\eta_2$ -praktisch ISS auf  $N$  mit

$$\eta_2 = \eta_1 + \gamma_1(\delta), \quad \beta_2 = \beta_1 \quad \text{und} \quad \gamma_2(r) = \gamma_1(\rho r + \delta) - \gamma_1(\delta).$$

**Beweis:** Beachte zunächst, dass aus der ISS-Annahme für  $x \in N$  die Ungleichung

$$\|\varphi_1(t, x, w_1)\| \leq \beta_1(\|x\|, t) + \gamma_1(\|w_1\|) + \eta_1 \leq \beta_1(d_{max}(N), 0) + \gamma_1(w_{max}) + \eta_1$$

für alle  $t \geq 0$  und damit  $\varphi_1(t, x, w_1) \in D$  gilt.

Also können wir die Einbettung für alle  $x \in N$ , alle  $w_1 \in \mathcal{W}_1$  und alle  $t \geq 0$  anwenden. Damit erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(t, x, w_2)\| &= \|\varphi_1(t, x, w_1)\| \\ &\leq \beta_1(\|x\|, t) + \gamma_1(\|w_1\|_\infty) + \eta_1 \\ &\leq \beta_1(\|x\|, t) + \gamma_1(\delta + \rho \|w_2\|_\infty) + \eta_1 \\ &= \beta_2(\|x\|, t) + \gamma_2(\|w_2\|_\infty) + \eta_2 \end{aligned}$$

für alle  $t \geq 0$  und damit gerade die behauptete praktische ISS Eigenschaft. □

**Bemerkung 9.6** Beachte, dass damit auch die  $\eta_2$ -praktische asymptotische Stabilität von  $\varphi_2(t, x, 0)$  mit Attraktionsrate  $\beta_2$  folgt. Insbesondere folgt also  $\eta_2$ -praktische asymptotische Stabilität, falls das eingebettete  $\varphi_2$  ein ungestörtes System ist, vgl. Bemerkung 9.4 □



Das Einbettungskonzept erlaubt es also, von ISS des einbettenden Systems auf ISS des eingebetteten Systems zu schließen — jedenfalls im praktischen Sinne.

Wir wollen nun zeigen, dass aus der Konsistenz eine Einbettungseigenschaft folgt. Hierzu benötigen wir die folgende Verschärfung des Konsistenzbegriffes für ungestörte Systeme.

**Definition 9.7** Betrachte zwei Systeme  $\varphi_1(t, x)$  und  $\varphi_2(t, x)$  auf einer Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dann nennen wir die beiden Systeme  $\varepsilon$ -ableitungskonsistent wenn für alle  $t \in [0, \Delta]$  und alle  $x \in D$  die Ungleichung

$$\|\dot{\varphi}_1(t, x) - \dot{\varphi}_2(t, x)\| \leq \varepsilon$$

gilt. □

**Bemerkung 9.8** Beachte, dass die Ableitungskonsistenz die Konsistenz impliziert, denn für  $t \in [0, \Delta]$  es gilt

$$\|\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x)\| \leq \int_0^t \|\dot{\varphi}_1(s, x) - \dot{\varphi}_2(s, x)\| ds \leq t\varepsilon.$$

□

Nun nehmen wir an, dass für  $i = 1, 2$  ungestörte Systeme der Form

$$\dot{x}(t) = f_i(x, F_i(x)) \tag{9.2}$$

gegeben sind, die wiederum entweder klassisch oder im Abtastsinne gelöst werden. Zu diesen Systemen definieren wir nun gestörte Systeme der Form

$$\dot{x}(t) = f_i(x, F_i(x)) + w(t) \tag{9.3}$$

mit  $w(t) \in W = B_\alpha(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt der folgende Satz:

**Satz 9.9** Gegeben seien zwei Systeme der Form (9.3) für  $i = 1, 2$  mit  $W_i = B_{\alpha_i}(0)$ , deren Lösungen  $\varphi_i(t, x, F_i, w)$  entweder im klassischen Sinne ( $T_i = 0$ ) oder im Abtastsinne mit  $T_i > 0$  definiert seien. Im Falle  $T_1 > 0$  und  $T_2 > 0$  gelte zudem  $T_1 = T_2$ . Die ungestörten Systeme (9.2) seien  $\varepsilon$ -konsistent und  $\varepsilon$ -ableitungskonsistent auf einer Menge  $D$  mit  $\Delta \geq \max\{T_1, T_2\}$ . Zudem erfülle jedes  $f_i$ ,  $i = 1, 2$  die Lipschitz-Bedingung

$$\|f_i(x, u) - f_i(y, u)\| \leq L_i \|x - y\|$$

für alle  $x, y \in D$  und alle  $u \in F_i(D) \subset U$  und im Falle  $T_i = 0$  zusätzlich die Lipschitz-Bedingung

$$\|f_i(x, F_i(x)) - f_i(y, F_i(x))\| \leq L_i \|x - y\|$$

für alle  $x, y \in D$ .

Dann ist  $\varphi_2(t, x, F_2, w)$   $(\delta, \rho)$ -eingebettet in  $\varphi_1(t, x, F_1, w)$  auf  $D$  mit  $\delta = (1 + L_1 \Delta)\varepsilon$  und  $\rho = ((L_1 + L_2)e^{L_2 \Delta} + 1)$ , falls  $\alpha_1 \geq \rho + \delta \alpha_2$  gilt.

**Beweis:** Falls  $T_i > 0$  können wir o.B.d.A.  $\Delta = T_i$  annehmen. Dann gilt die Gleichung

$$\varphi_{T_i}((j+1)\Delta, x, F_i, w_i) = \varphi_{T_i}(\Delta, \varphi_{T_i}(j\Delta, x, F_i, w_i), F_i, w_i(j\Delta + \cdot)).$$

Es genügt, daher, die Behauptung für jedes  $x \in D$  für  $t \in [0, \Delta]$  zu zeigen, da wir dann mit dem neuen Anfangswert

$$x = \varphi_{T_1}(\Delta, x, F_1, w_1) = \varphi_{T_2}(\Delta, x, F_2, w_2)$$

induktiv fortfahren können.

Für  $t \in [0, \Delta]$  setzen wir nun

$$w_1(t) := f_2(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{22}(t, w_2)) - f_1(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{12}(t, w_2)) + w_2(t)$$

Hierbei ist  $u_{ik}(t, w) = F_i(\varphi_k(t, x, F_k, w))$  falls  $T_i = 0$  und  $u_{ik}(t) = F_i(x)$  falls  $T_i = \Delta > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2(t, x, F_2, w_2) &= f_2(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{22}(t, w_2)) + w_2(t) \\ &= f_2(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{22}(t, w_2)) + w_1(t) \\ &\quad - f_2(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{22}(t, w_2)) + f_1(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{12}(t, w_2)) \\ &= f_1(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{12}(t, w_2)) + w_1(t). \end{aligned}$$

Andererseits gilt natürlich die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi}_1(t, x, F_1, w_1) = f_1(\varphi_1(t, x, F_1, w_1), u_{11}(t, w_1)) + w_1(t).$$

Im Falle  $T_1 > 0$  ist  $u_{11}(t, w_1) = F_1(x) = u_{12}(t, w_2)$  und im Falle  $T_1 = 0$  gilt  $u_{11}(t, w_1) = F_1(\varphi_1(t, x, F_1, w_1))$  und  $u_{12}(t, w_2) = F_1(\varphi_2(t, x, F_2, w_2))$ . In beiden Fällen folgt also, dass  $\varphi_1(t, x, F_1, w_1)$  und  $\varphi_2(t, x, F_2, w_2)$  die gleiche Differentialgleichung erfüllen, weswegen diese beiden Funktionen nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz übereinstimmen müssen. Es gilt also die in der Einbettung geforderte Gleichheit

$$\varphi_1(t, x, F_1, w_1) = \varphi_2(t, x, F_2, w_2) \quad \text{für } t \in [0, \Delta].$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $w_1$  die in der Definition geforderte Schranke erfüllt. Dazu verwenden wir zunächst das Gronwall-Lemma und die Lipschitz-Bedingung an die  $f_i$ , um abzuschätzen

$$\|\varphi_i(t, x, w) - \varphi_i(t, x, 0)\| \leq e^{L_i t} \|w\|.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|w_1(t)\| &\leq \|f_2(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{22}(t, w_2)) - f_1(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{12}(t, w_2))\| + \|w_2(t)\| \\ &\leq \|f_2(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{22}(t, w_2)) - f_2(\varphi_2(t, x, F_2, 0), u_{22}(t, w_2))\| \\ &\quad + \|f_2(\varphi_2(t, x, F_2, 0), u_{22}(t, 0)) - f_1(\varphi_1(t, x, F_1, 0), u_{11}(t, 0))\| \\ &\quad + \|f_1(\varphi_1(t, x, F_1, 0), u_{11}(t, 0)) - f_1(\varphi_2(t, x, F_2, 0), u_{12}(t, 0))\| \\ &\quad + \|f_1(\varphi_2(t, x, F_2, 0), u_{12}(t, 0)) - f_1(\varphi_2(t, x, F_2, w_2), u_{12}(t, w_2))\| + \|w_2(t)\| \\ &\leq L_2 e^{L_2 t} \|w_2\| + \varepsilon + L_1 t \varepsilon + L_1 e^{L_2 t} \|w_2\| + \|w_2\| \\ &\leq (1 + L_1 \Delta) \varepsilon + ((L_1 + L_2) e^{L_2 \Delta} + 1) \|w_2\|. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

### 9.3 Stabilität unter Digitalisierung

Wir betrachten jetzt die folgende Situation: Gegeben sei ein Kontrollsystem (1.1) und ein Feedback  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , so dass  $F$  stetig und  $f(x, F(x))$  lokal Lipschitz stetig ist.

Zu diesem System betrachten wir die Abtastsysteme  $\varphi_T$ , die wir mit dem Feedback  $F$  regel. Wir wählen also das Abtastfeedback für alle  $T \in (0, T^*]$  gleich dem kontinuierlichen Feedback, also  $F_T = F$ .

Sicherlich kann man i.A. nur für kleine Abtastzeiten  $T > 0$  erwarten, dass diese Wahl gut funktioniert. Für unsere Analyse betrachten wir daher Folgen von Abtastzeiten  $T_k > 0$  mit  $T_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Wir zeigen zunächst, dass die Abtastsysteme  $\varepsilon$ -konsistent und  $\varepsilon$ -ableitungskonsistent mit  $\varphi_0$  sind.

**Lemma 9.10** Für die Feedback-geregelte Differentialgleichung  $\varphi_0$  und die Abtastsysteme  $\varphi_{T_k}$  gilt für jede beschränkte Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ :

(i)

$$\|\varphi_0(t, x, F) - \varphi_{T_k}(t, x, F)\| \leq t\varepsilon_k$$

für alle  $t \in [0, T_k]$  mit  $\varepsilon_k = O(T_k)$  (d.h.,  $\varepsilon_k \leq CT_k$  für ein  $C > 0$ )

(ii)

$$\|\dot{\varphi}_0(t, x, F) - \dot{\varphi}_{T_k}(t, x, F)\| \leq \varepsilon_k$$

für alle  $t \in [0, T_k]$  mit  $\varepsilon_k = O(T_k)$

**Beweis:** Nach Bemerkung 9.8 reicht es (ii) zu zeigen. Wegen der Stetigkeit von  $f$  und  $F$  erhalten wir mit  $M_D = \sup_{x,y \in D} \|f(x, F(y))\| < \infty$  die Abschätzungen

$$\|\varphi_0(t, x) - x\| \leq tM_D \quad \text{und} \quad \|\varphi_{T_k}(t, x) - x\| \leq tM_D$$

für alle  $t \geq 0$ , für die die entsprechenden Lösungen auf  $[0, t]$  in  $D$  liegen. Zudem gilt wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit die Ungleichung

$$\|f(x, F(x)) - f(y, F(y))\| \leq L_D \|x - y\|$$

für alle  $x, y \in D$ .

Daraus folgt für  $t \in [0, T_k]$

$$\begin{aligned} \|\dot{\varphi}_0(t, x, F) - \dot{\varphi}_{T_k}(t, x, F)\| &= \|f(\varphi_0(t, x, F), F(\varphi_0(t, x, F))) - f(\varphi_{T_k}(t, x, F), F(x))\| \\ &\leq \|f(\varphi_0(t, x, F), F(\varphi_0(t, x, F))) - f(x, F(x))\| \\ &\quad + \|f(x, F(x)) - f(\varphi_{T_k}(t, x, F), F(x))\| \\ &\leq L_D M_D t + L_D M_D t \leq 2L_D M_D T_k = O(T_k). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 9.11** (i) Beachte, dass die Konstanten im “ $O(T_k)$ ”-Term i.A. um so schlechter werden, je größer die Menge  $D$  wird.

(ii) Der Beweis ist konzeptionell ähnlich zur Konsistenzabschätzung des Euler–Verfahrens, wenn keine Differenzierbarkeit des Vektorfeldes angenommen wird. Tatsächlich kann man die Dreiecksungleichung im Beweis so interpretieren, dass hier die Konsistenz sowohl von  $\varphi_0$  als auch von  $\varphi_{T_k}$  mit der Euler–Approximation  $x + tf(x, F(x))$  ausgenutzt wird.

(iii) Eine sofortige Folgerung aus diesem Satz ist

$$\|\varphi_T(T, x, F) - \varphi_0(T, x, F)\| = O(T^2).$$

Eine darauf basierende Strategie zur Verbesserung des Abtastverhaltens liegt darin, ein digitales Feedback  $F_T(x)$  zu finden, so dass

$$\|\varphi_T(T, x, F_T) - \varphi_0(T, x, F)\| = O(T^p) \quad (9.4)$$

für ein  $p > 2$  gilt. Man kann zeigen, dass (9.4) für

$$F_T(x) := F(x) + \frac{T}{2}DF(x)f(x, F(x))$$

mit  $p = 3$  erfüllt ist, vorausgesetzt, dass  $f$  kontroll–affin ist und  $F$  und  $f$  differenzierbar sind (Übungsaufgabe). Man kann aber auch zeigen, dass (9.4) für  $p > 3$  im Allgemeinen nicht erfüllbar ist.  $\square$

Nun können wir den Hauptsatz dieses Kapitels formulieren:

**Satz 9.12** Für die Feedback–geregelter Differentialgleichung  $\varphi_0$  und die Abtastsysteme  $\varphi_{T_k}$  sind für jede beschränkte Umgebung  $N$  der 0 die folgenden zwei Aussagen äquivalent:

- (i) Die Feedback–geregelter Differentialgleichung  $\varphi_0$  ist asymptotisch stabil für  $x \in N$ .
- (ii) Die Familie von Abtastsystemen  $\varphi_{T_k}$  ist für alle hinreichend großen  $k \in \mathbb{N}$  praktisch asymptotisch stabil für  $x \in N$  mit Attraktionsraten  $\beta \in \mathcal{KL}$  unabhängig von  $k$ .

**Beweis:** Beachte zunächst, dass aus der in Lemma 9.10 bewiesenen Konsistenz für  $\varepsilon_k = O(T_k)$  mit Satz 9.9 die Einbettungseigenschaft für die gemäß (9.3) definierten gestörten Systeme  $\varphi_0(t, x, F, w)$  und  $\varphi_{T_k}(t, x, F)$  mit  $\delta = O(T^k)$  folgt. Hiermit können wir nun beide Richtungen beweisen:

“(i)  $\Rightarrow$  (ii)”: Nach Satz 8.7 ist das gestörte System  $\varphi_0(t, x, F, w)$  ISS auf  $N$  mit Attraktionsrate  $\beta$  (die mit derjenigen des ungestörten Systems übereinstimmt) und einem Robustheitsmaß  $\gamma \in \mathcal{KL}$ . Nach Satz 9.5 ist das gestörte System  $\varphi_{T_k}(t, x, F, w)$  daher für jedes hinreichend große  $k$   $\eta_k$ –praktisch ISS mit Attraktionsrate  $\beta$  (die mit der Attraktionsrate  $\beta$  von  $\varphi_0$  übereinstimmt) und Parameter  $\eta_k = \gamma(O(T_k))$ . Insbesondere (vgl. Bemerkung 9.6) ist das ungestörte Abtastsystem damit  $\eta_k$ –praktisch asymptotisch stabil. Aus  $T_k \rightarrow 0$  folgt  $\eta_k \rightarrow 0$ , weswegen die Familie der Abtastsysteme praktisch asymptotisch stabil ist. Da die Attraktionsrate  $\beta \in \mathcal{KL}$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  mit derjenigen von  $\varphi_0$  übereinstimmt, ist sie insbesondere unabhängig von  $k$ .

“(ii)  $\Rightarrow$  (i)”: Aus der Lipschitz–Stetigkeit von  $f(x, F(x))$  folgt die in Satz 9.2 vorausgesetzte Lipschitz–Bedingung

$$\|\varphi_0(\Delta, x) - \varphi_0(\Delta, y)\| \leq e^{L_D \Delta} \|x - y\|$$

für  $\Delta = T_k$ , so dass dieser Satz anwendbar ist. Für jedes  $t \geq 0$  folgt damit

$$\|\varphi_0(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \eta_k + \frac{e^{L_D t} - 1}{L_D} \varepsilon_k$$

für jedes  $x \in N$ . Da der linke Ausdruck in dieser Ungleichung nicht von  $k$  abhängt, können wir  $k \rightarrow \infty$  gehen lassen und erhalten die Ungleichung

$$\|\varphi_0(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t)$$

für jedes  $t \geq 0$ , was gerade die für die asymptotische Stabilität zu zeigende Ungleichung ist.  $\square$

Im globalen Fall gilt das folgende Korollar.

**Korollar 9.13** Die Feedback–geregelte Differentialgleichung  $\varphi_0$  sei global asymptotisch stabil. Dann ist die Familie von Abtastsystemen  $\varphi_{T_k}$  semiglobal praktisch asymptotisch stabil im Sinne von Definition 7.2.

**Beweis:** Die Voraussetzungen implizieren, dass Satz 9.12(i) für jede beschränkte Umgebung der 0 erfüllt ist. Für gegebene Parameter  $R > \varepsilon > 0$  aus Definition 7.2 können wir den Satz daher mit  $N = \text{cl } B_R(0)$  anwenden und  $k$  so groß wählen, dass  $\eta_k < \varepsilon/2$  gilt. Dann folgt für  $T = T_k$

$$\|\varphi_T(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \varepsilon/2 \leq \max\{\tilde{\beta}(\|x\|, t), \varepsilon\}$$

für  $\tilde{\beta} = 2\beta$ . Definition 7.2 ist also mit der Attraktionsrate  $2\beta$  erfüllt (tatsächlich ist dies eine recht grobe Abschätzung für das  $\beta$  in Definition 7.2, diese soll für unsere Zwecke aber ausreichen).  $\square$

**Bemerkung 9.14** Das Resultat zeigt also, dass sich die asymptotische Stabilität des kontinuierlich geregelten Systems  $\varphi_0$  auf das digital geregelte Abtastsystem  $\varphi_T$  im semiglobal praktischen Sinne überträgt. Dabei hat die Länge der Abtastzeit  $T$  verschiedene Auswirkungen auf die Qualität der Lösung des digitalen Systems:

- (i) Die Konstante  $\eta_k$  bzw.  $\varepsilon$  in der praktischen Stabilität wird i.A. um so größer, je größer  $T$  wird.
- (ii) Der Bereich  $N$ , in dem die praktische asymptotische Stabilität gilt wird i.A. um so kleiner, je größer  $T$  wird.
- (iii) Darüberhinaus kann sich das Verhalten der Lösungen unter Abtastung schlechter sein, auch wenn die Stabilität erhalten bleibt.

$\square$

**Beispiel 9.15** Aspekt (i) dieser Bemerkung wurde in den Übungen in Aufgabe 1 vom Blatt 7 untersucht. Dort wurde das Beispiel

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + x \left( \left( \frac{x_1}{\|x\|} - u \right)^2 - \|x\| \right)$$

mit Feedback  $F(x) = \frac{x_1}{\|x\|}$  betrachtet.

Abbildung 9.1 zeigt jeweils die kontinuierlichen Feedbacklösungen (schwarz, durchgezogen) und die Abtastlösungen (rot, gestrichelt). Während für  $T = 0.1$  kaum ein Unterschied zu erkennen ist, sind diese für  $T = 1$  deutlich sichtbar.

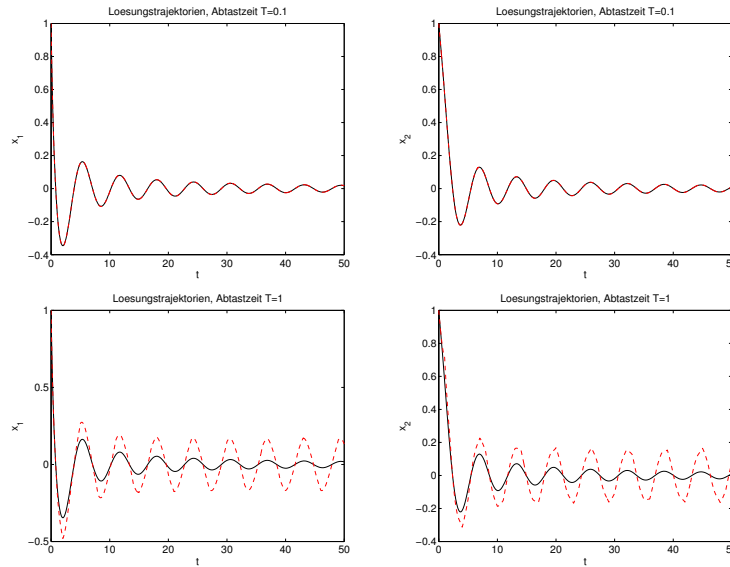


Abbildung 9.1: Kontinuierliche und Abtastlösung für  $T = 0.1$  (oben) und  $T = 1$  (unten)

□

**Beispiel 9.16** Aspekt (ii) wird illustriert durch das 3d System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - 3x_1^2/2 - x_1^3/2 - 3x_3x_1 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 &= -u \\ \dot{x}_3 &= -\sigma x_3(x_3 + 2x_1 + x_1^2). \end{aligned}$$

Dieses System ist eine dreidimensionale Approximation eines Modells einer Flugzeugturbine, das Originalmodell — das sogenannte Moore–Greitzer Modell — ist durch eine partielle Differentialgleichung gegeben. Ziel der Stabilisierung ist es, die Turbine kontrolliert abzuschalten ohne dabei Turbulenzen zu erzeugen, die die Turbinenschaufeln beschädigen könnten. Mittels der Backstepping Methode kann man das stabilisierende Feedback

$$\begin{aligned} F(x) &= -(x_1 - c_2x_2 - c_1x_1 + 3x_1^2/2 + 3x_3) \\ &\quad + (c_1 - 3x_1)(-x_2 - 3x_1^2/2 - x_1^3/2 - 3x_3x_1 - 3x_3) \\ &\quad - 3(-\sigma x_3(x_3 + 2x_1 + x_1^2)) \end{aligned}$$

berechnen. Wir simulieren das System mit den Parametern  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 50$  und  $\sigma = 2$ , dem Anfangswert  $x = (6, 25, 1)^T$  und der Abtastzeit  $T = 0.05$ .

Abbildung 9.2 zeigt, dass das kontinuierliche System tatsächlich asymptotisch stabil ist, während das digital geregelte System offenbar nicht asymptotisch stabil ist.

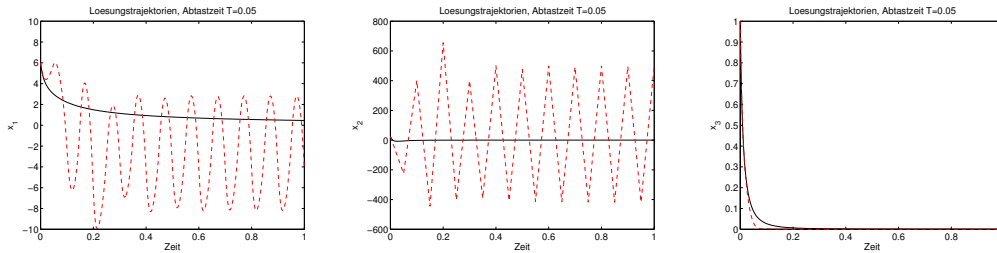


Abbildung 9.2: Kontinuierliche und Abtastlösung für  $T = 0.05$

□

**Beispiel 9.17** Der dritte Punkt in Bemerkung 9.14 wird durch das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - 3x_1^2/2 - x_1^3/2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

mit Feedback  $F(x) = 7x_1 - 5x_2$  illustriert. Dies ist wiederum eine Approximation des Moore–Greitzer Modells mit Backstepping–Feedback, nun zweidimensional.

Abbildung 9.3 zeigt für  $T = 0.1$  und Anfangswert  $x = (22, 21)^T$ , dass die Stabilität zwar erhalten bleibt, das Verhalten der  $x_2$ -Komponente für das Abtastsystem allerdings einen unschönen “Zacken” aufweist.

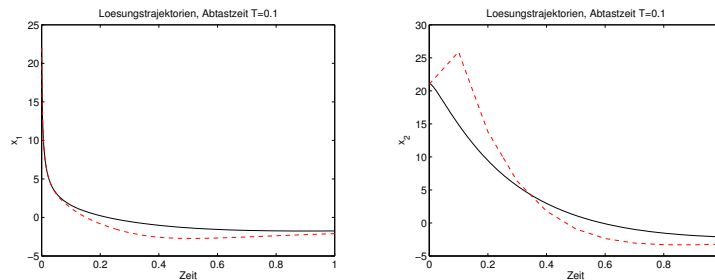


Abbildung 9.3: Kontinuierliche und Abtastlösung für  $T = 0.1$

□





## Kapitel 10

# Digitale Regelung mittels approximativer Systeme

Wir haben an den Beispielen im letzten Kapitel gesehen, dass die digitale Implementierung kontinuierlicher Feedbacks für hinreichend kleine Abtastzeiten  $T > 0$  gut funktioniert, für größere Zeiten  $T$  aber schlechtes Verhalten bis hin zur Instabilität zeigen kann. Wenn man nun größere  $T$  verwenden will (oder aus Hardwaregründen verwenden muss), ist diese Methode also nicht unbedingt zu empfehlen. Statt also ein Feedback  $F$  für  $\varphi_0$  zu berechnen, sollte man besser ein Feedback  $F_T$  direkt für  $\varphi_T$  bestimmen. Hierfür gibt es eine Menge von Ansätzen, z.B. eine zeitdiskrete Variante des Backstepping-Verfahrens, Methoden basierend auf Kontroll-Ljapunov-Funktionen (vgl. z.B. Aufgabe 2 auf dem 7. Übungsblatt) oder diverse auf Optimierungsmethoden beruhende Verfahren, wie z.B. die Modellprädiktive Regelung (model predictive control, MPC). Ein einfacher Optimierungsansatz findet sich im folgenden Abschnitt 10.1.

Bei all diesen Verfahren kann man die kontinuierliche Natur des Systems entweder explizit berücksichtigen (d.h. man wählt  $F_T$  so, dass  $\varphi_T(t, x, F)$  für alle  $t \geq 0$  ein gewünschtes Verhalten aufweist) oder vernachlässigen (d.h. man betrachtet nur  $\varphi_T(iT, x, F)$  zu den diskreten Zeitpunkten  $0, T, 2T, \dots$ ). Da das System ja auf jedem Abtastintervall  $[iT, (i+1)T]$  stetig ist, liefert auch die an sich ungenauere zweite Methode meist zufriedenstellende Ergebnisse, zudem ist sie einfacher zu formulieren und zu analysieren, weswegen wir uns hier auf dieses Vorgehen einschränken wollen. Wir definieren in diesem Abschnitt daher asymptotische Stabilität mittels der Ungleichung

$$\|\varphi_T(iT, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, iT)$$

und ISS mittels

$$\|\varphi_T(iT, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, iT) + \gamma(\|w\|_\infty),$$

d.h. wir betrachten nur jeweils die diskreten Zeitpunkte  $iT$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ .

### 10.1 Ein einfaches numerisches Verfahren

Um zu zeigen, dass man mit einem Feedback-Entwurf für  $\varphi_T$  deutlich besseres Verhalten als mit der Verwendung von  $F$  im Abtastsystem erhalten kann, betrachten wir die Situation

aus dem vorhergehenden Kapitel:

Zu einem Kontrollsystem (1.1) haben wir ein stetiges Feedback mit Lipschitz–stetigem  $f(x, F(x))$  gegeben. Für zu große Abtastzeit zeigt das zugehörige Abtastsystem  $\varphi_T(t, x, F)$  allerdings schlechtes Verhalten oder Instabilitäten, wie wir sie z.B. bei Beispiel 9.16 in Abbildung 9.2 gesehen haben.

Ein besseres Feedback lässt sich nun für jeden Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  wie folgt algorithmisch konstruieren:

- (i) Mit Hilfe eines numerischen DGL–Lösers (z.B. 'ode45' in MATLAB) berechnen wir die quadratische Abstandsfunktion

$$d(x, u) := \|\varphi_T(T, x, u) - \varphi(T, x, F)\|^2$$

- (ii) Mit Hilfe einer numerischen Optimierungsroutine für quadratische Funktionale (z.B. dem Gauß–Newton–Verfahren, das in MATLAB mit der Routine 'lsqnonlin' mit den Optionen 'LargeScale', 'off', 'LevenbergMarquardt', 'off' enthalten ist) bestimme

$$F_T(x) = \operatorname{argmin}_{u \in U} d(x, u).$$

Diese ziemlich einfache Idee ergibt überraschend gute Ergebnisse, wie Abbildung 10.1 (als Erweiterung von Abb. 9.2 für Beispiel 9.16) zeigt.

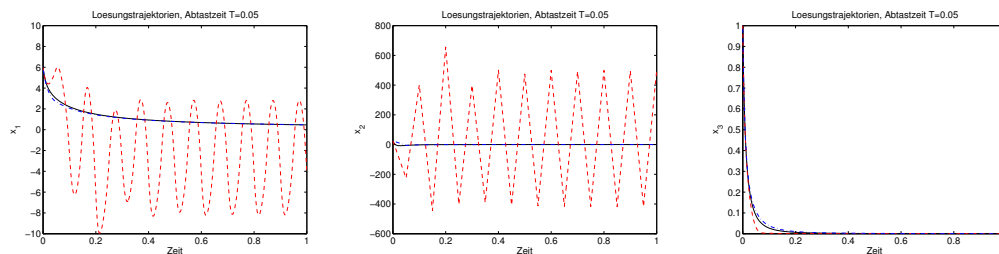


Abbildung 10.1: Kontinuierliche Lösung (schwarz —), Abtastlösung (rot - -) und optimierte Abtastlösung (blau - · -) für Beispiel 9.16 mit  $T = 0.05$

Nachteil der Methode ist zum einen die Rechenzeit, die durch eine effiziente C– oder FORTRAN–Implementierung der Algorithmen allerdings im Vergleich zu MATLAB deutlich erhöht werden kann und zum anderen die Tatsache, dass wir hier numerisch arbeiten und a priori nicht wissen, ob die numerischen Fehler nicht unangenehme Folgen für das geregelte System haben können. Diesen Aspekt wollen wir im Folgenden genauer untersuchen.

## 10.2 Approximative Systeme

Unabhängig davon, obwie man  $F_T$  nun numerisch oder analytisch berechnet, stellt sich dabei im Allgemeinen das Problem, dass man für  $\varphi_T$  keine exakte Formel angeben kann.

Da unser Kontrollsystem durch eine nichtlineare Differentialgleichung gegeben ist, ergibt sich  $\varphi_T(t, x, F)$  als Lösung dieser Gleichung, die i.A. analytisch nicht berechenbar ist. Wir werden also auf eine Approximation  $\varphi_T^\varepsilon$  — z.B. eine numerische Approximation — zurück greifen müssen, wenn wir dies machen wollen. Dies wollen wir in diesem ersten Abschnitt zunächst einmal formalisieren.

Wir betrachten zeitdiskrete Systeme  $\varphi_T^\varepsilon$ , die für eine Kontrollfolge  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots)$  und einen Anfangswert  $x$  iterativ definiert sind mittels

$$\varphi_T^\varepsilon(0, x, \mathbf{u}) = x, \quad \varphi_T^\varepsilon((i+1)T, x, \mathbf{u}) = f_T^\varepsilon(\varphi_T^\varepsilon(iT, x, \mathbf{u}), u_i)$$

für eine Abbildung  $f_T^\varepsilon : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für ein Feedback  $F_T$  kann man ein das System analog mittels

$$\varphi_T^\varepsilon(0, x, F_T) = x, \quad \varphi_T^\varepsilon((i+1)T, x, F_T) = f_T^\varepsilon(\varphi_T^\varepsilon(iT, x, F_T), F_T(\varphi_T^\varepsilon(iT, x, F_T)))$$

definieren.

Die folgende Definition klärt, in welchem Sinne das System  $\varphi_T^\varepsilon$  als “Approximatives System” für  $\varphi_T$  zu verstehen ist.

**Definition 10.1** Betrachte ein Kontrollsystem (1.1) mit Lösungen  $\varphi$ . Eine Abbildung  $f_T^\varepsilon : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T \in (0, T^*]$  heißt  $\varepsilon$ -konsistente Approximation von  $\varphi_T$  für eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  und ein  $R > 0$ , wenn für alle  $x \in D$ , alle Kontrollwerte  $u \in U$  mit  $\|u\| \leq R$  und alle  $T \in (0, T^*]$  die Ungleichung

$$\|f_T^\varepsilon(x, u) - \varphi(T, x, u)\| \leq T\varepsilon$$

gilt. □

**Bemerkung 10.2** Einfachstes Beispiel wäre die Euler-Approximation

$$f_T^\varepsilon(x, u) = x + Tf(x, u),$$

bei der  $\varepsilon = O(T)$  gilt. Allgemeiner könnte man  $f_T^\varepsilon$  als beliebiges Einschrittverfahren wählen, in welchem Fall  $\varepsilon = O(T^p)$  für ein  $p \geq 1$  gilt. Beachte, dass in all diesen Fällen  $\varepsilon$  und  $T$  gekoppelt sind,  $\varepsilon$  taucht also nicht explizit in der Formel für  $f_T^\varepsilon$  auf sondern ist implizit durch  $T$  gegeben. Erzeugt man  $f_T^\varepsilon$  durch eine allgemeine numerische Routine mit Schrittweitensteuerung und vorgegebener Genauigkeit  $\varepsilon/T$  (und nimmt man an, dass die Routine die Genauigkeit auch einhält), so erhält man eine Approximation, bei der  $\varepsilon$  und  $T$  nicht gekoppelt sind. Vorteil dieses Ansatzes ist es, dass man hier die Abtastzeit  $T > 0$  fest halten und den Approximationsfehler  $\varepsilon$  damit auch für große  $T$  klein halten kann. □

### 10.3 Beispiele für Stabilitätsverlust

Die grundlegende Frage, die wir nun untersuchen wollen, ist die folgende:

Gegeben ein System  $\varphi_T$  und eine Approximation  $\varphi_T^\varepsilon$ . Gegeben seien weiterhin Feedbacks  $F_T^\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , so dass  $\varphi_T^\varepsilon(iT, x, F_T^\varepsilon)$  asymptotisch stabil auf einer Menge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  ist.

Ist dann auch  $\varphi_T(iT, x, F_T^\varepsilon)$  asymptotisch stabil, wenn  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein ist, d.h. wenn die Approximation  $\varphi_T^\varepsilon$  hinreichend genau ist.

Die folgenden Beispiele (die aus verschiedenen Arbeiten von D. Nešić stammen, siehe [7, 11, 13]) zeigen, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist.

**Beispiel 10.3** Betrachte das System

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t).$$

Hier lassen sich die exakten Lösungen für konstanten Kontrollwert leicht berechnen, es gilt

$$\varphi_T(T, x, u) = e^T x + Te^T u.$$

Als Approximation verwenden wir

$$f_T^\varepsilon(x, u) = (1 + T)x + Tu/(1 - T).$$

Dies ist keine klassische numerische Approximation, kann aber als eine Mischung des expliziten Euler-Verfahrens (im ersten Term  $(1 + T)x$ ) und des impliziten Euler-Verfahrens (im zweiten Term  $Tu/(1 - T)$ ) aufgefasst werden, woraus sich die Konsistenz mit  $\varepsilon = O(T)$  ergibt.

Wir stabilisieren das approximative System mit Hilfe des (zeitdiskreten) linear-quadratischen Ansatzes. Für geeignetes Kostenfunktional erhält man, dass das Feedback

$$F_T^\varepsilon(x) = \left( -1 + T - \frac{5T^2}{2} \right) x$$

das approximative System stabilisiert.

Abbildung 10.2 zeigt die approximativen (rot gestrichelt) und exakten (schwarz durchgezogen) Lösungen für Abtastzeiten  $T = 0.2, 0.1, 0.05$ . Hier sieht man, dass das exakte System durch das Feedback nicht stabilisiert wird. □

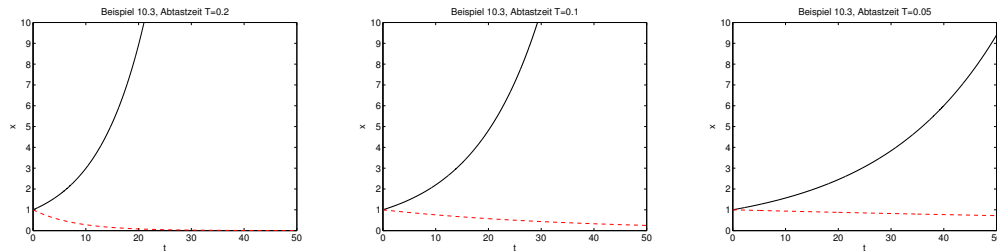


Abbildung 10.2: Exakte (schwarz durchgezogen) und approximative (rot gestrichelt) Lösungen für Beispiel 10.3 mit  $T = 0.2, 0.1, 0.05$

**Beispiel 10.4** Wir betrachten das dreidimensionale System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= u(t).\end{aligned}$$

Als approximatives System wählen wir die Euler-Approximation

$$f_T^\varepsilon(x, u) = \begin{pmatrix} x_1 + Tx_2 \\ x_2 + Tx_3 \\ x_3 + Tu \end{pmatrix}.$$

Das Feedback  $F_T^\varepsilon$  für dieses approximative System wird nun so gewählt, dass das diskrete System in möglichst wenig Schritten exakt nach 0 geregelt wird. Mit Hilfe der Lösung des zeitoptimalen optimalen Steuerungsproblems errechnet man, dass

$$F_T^\varepsilon(x) = -\frac{x_1}{T^3} - \frac{3x_2}{T^2} - \frac{3x_3}{T}$$

genau dieses leistet.

Allerdings zeigt Abbildung 10.3, dass das exakte System mit diesem Regler wieder instabil wird.

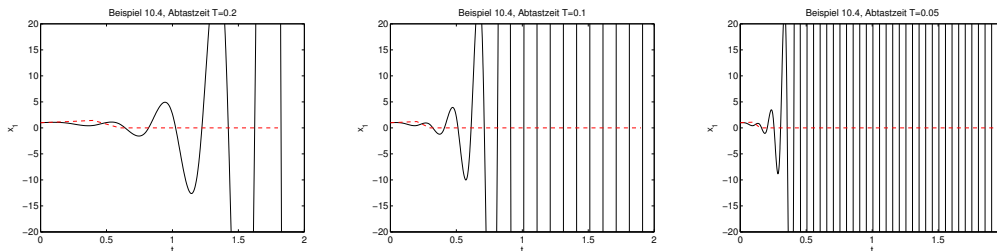


Abbildung 10.3:  $x_1$ -Komponenten der exakten (schwarz durchgezogen) und approximierten (rot gestrichelt) Lösungen für Beispiel 10.4 mit  $T = 0.2, 0.1, 0.05$

□

**Beispiel 10.5** Wir betrachten das eindimensionale System

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

und die Approximation

$$f_T^\varepsilon(x, u) = x + u - T\varepsilon.$$

Beachte, dass der Fehler in dieser (artificialen) Approximation von der Abtastzeit  $T$  entkoppelt ist.

Wir wählen das Feedback  $F_T$  nun wie folgt: im Intervall  $[-1, 1]$  soll das geregelte System einfach der Gleichung

$$f_T^\varepsilon(x, F_T^\varepsilon(x)) = (1 - T)x$$

genügen, woraus exponentielle Konvergenz gegen 0 folgt. Man sieht leicht, dass man dazu für  $x \in [-1, 1]$

$$F_T^\varepsilon(x) = \varepsilon - x$$

setzen muss. Für  $|x| > 1$  wollen wir das Feedback so wählen, dass  $f_T^\varepsilon(x, F_T^\varepsilon(x))$  jeweils zum nächsten ganzzahligen Vielfachen  $iT$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , der Abtastzeit mit  $|iT| < |x|$  springt. Also z.B. für  $x = 2.1$  und  $T = 0.2$ :

$$\varphi_T^\varepsilon(iT, x, F_T^\varepsilon) = 2.1, 2.0, 1.8, 1.6, 1.4, \dots$$

Formal wollen wir für  $|x| > 1$  also

$$f_T^\varepsilon(x, F_T^\varepsilon(x)) = \begin{cases} \lceil \frac{x}{T} \rceil T - T, & x > 1 \\ \lfloor \frac{x}{T} \rfloor T + T, & x < -1 \end{cases}$$

erhalten, wobei  $\lceil x \rceil$  und  $\lfloor x \rfloor$  die kleinste bzw. größte ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq x$  bzw.  $k \leq x$  bezeichnen.

Mit etwas Überlegung sieht man, dass dies gerade für

$$F_t^\varepsilon(x) = \begin{cases} \lceil \frac{x}{T} \rceil - 1 + \varepsilon - \frac{x}{T}, & x > 1 \\ \lfloor \frac{x}{T} \rfloor + 1 + \varepsilon - \frac{x}{T}, & x < -1 \end{cases}$$

erfüllt ist. Abbildung 10.4 bestätigt dies (rote gestrichelte Kurven), zeigt aber auch, dass das exakte System (schwarze durchgezogene Kurven) weit davon entfernt ist, asymptotisch stabil zu sein. Die Simulationen wurden mit  $\varepsilon = 10^{-5}$  durchgeführt, für kleinere  $\varepsilon > 0$  ergeben sich aber keine sichtbaren Unterschiede.

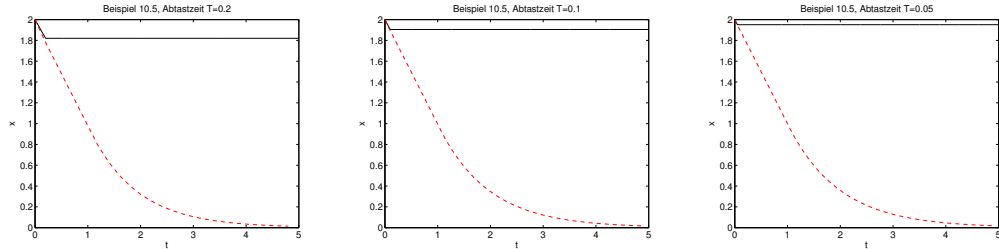


Abbildung 10.4: Exakte (schwarz durchgezogen) und approximative (rot gestrichelt) Lösungen für Beispiel 10.5 mit  $T = 0.2, 0.1, 0.05$

□

## 10.4 Einbettung und Robustheit

Da wir nun die Situation haben, dass wir ein kontinuierliches System  $\varphi_T$  und ein diskretes System  $\varphi_T^\varepsilon$  miteinander vergleichen, können wir die Resultate über Konvergenz und Einbettung kontinuierlicher Systeme aus den Abschnitten 9.1 und 9.2 nicht direkt übernehmen. Wir werden die im Folgenden benötigten Sätze deswegen hier noch einmal für unsere jetzige Situation formulieren.

Hierzu betrachten wir zu  $\varphi_T$  und  $\varphi_T^\varepsilon$  und zu Störfolgen  $\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2, \dots) \in \mathcal{W} = W^{\mathbb{N}_0}$  bzw.  $\mathbf{w}^\varepsilon = (w_0^\varepsilon, w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, \dots) \in \mathcal{W}^\varepsilon = (W^\varepsilon)^{\mathbb{N}_0}$  die induktiv definierten gestörten Systeme  $\psi_T$  bzw.  $\psi_T^\varepsilon$  gegeben durch

$$\psi_T(0, x, F, \mathbf{w}) = x, \quad \psi_T((i+t)T, x, F, \mathbf{w}) = \varphi_T(iT, \psi_T(iT, x, F, \mathbf{w}), F) + Tw_i$$

und

$$\psi_T^\varepsilon(0, x, F, \mathbf{w}^\varepsilon) = x, \quad \psi_T^\varepsilon((i+t)T, x, F, \mathbf{w}^\varepsilon) = \varphi_T^\varepsilon(iT, \psi_T^\varepsilon(iT, x, F, \mathbf{w}^\varepsilon), F) + Tw_i^\varepsilon.$$

Wir definieren nun eine diskrete Version der Einbettung.

**Definition 10.6** Für ein Feedback  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nennen wir  $\psi_T^\varepsilon$   $(\delta, \rho)$ -eingebettet in das System  $\psi_T$  auf einer Menge  $D$ , falls für jede Störfolge  $w^\varepsilon \in \mathcal{W}^\varepsilon$  und jedes  $x \in D$  und  $t^* > 0$  mit

$$\psi_T^\varepsilon(iT, x, \mathbf{w}^\varepsilon) \in D \quad \text{für alle } t \in [0, t^*]$$

eine Störfunktion  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$  existiert mit  $\|\mathbf{w}\|_\infty \leq \delta + \rho\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty$  und

$$\psi_T(t, x, F, \mathbf{w}) = \psi_T^\varepsilon(iT, x, F, \mathbf{w}^\varepsilon) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } iT \in [0, t^*].$$

Analog nennen wir  $\psi_T$   $(\delta, \rho)$ -eingebettet in das System  $\psi_T^\varepsilon$ , wenn die gleiche Eigenschaft mit vertauschten Systemen gilt.  $\square$

Als erstes zeigen wir nun die Folgerung “Konsistenz  $\Rightarrow$  Einbettung”.

**Satz 10.7** Betrachte die gestörten Systeme  $\psi_T$  und  $\psi_T^\varepsilon$  den zugehörigen ungestörten Systemen  $\varphi_T$  und  $\varphi_T^\varepsilon$ . Die ungestörten Systeme seien  $\varepsilon$ -konsistent im Sinne von Definition 10.1 und  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  sei ein Feedback mit  $\|F(x)\| \leq R$  für alle  $x \in D$ .

Dann ist  $\psi_T^\varepsilon$   $(\delta, \rho)$ -eingebettet in  $\psi_T$  und  $\psi_T$  ist  $(\delta, \rho)$ -eingebettet in  $\psi_T^\varepsilon$ , jeweils auf der Menge  $D$  und mit  $\delta = \varepsilon$  und  $\rho = 1$ , falls  $W \subseteq \text{cl } B_\varepsilon(W^\varepsilon)$  bzw.  $W^\varepsilon \subseteq \text{cl } B_\varepsilon(W)$  gilt.

**Beweis:** Es genügt, für jeden Punkt  $x \in D$  und jeden Störwert  $w^\varepsilon \in W^\varepsilon$  einen Störwert  $w \in W$  mit  $\psi_T(T, x, F, w) = \psi_T^\varepsilon(T, x, F, w^\varepsilon)$  zu finden. Die Aussage für  $iT$ ,  $i \geq 2$  und allgemeine Störfolgen  $\mathbf{w}^\varepsilon$  folgt dann per Induktion über  $i$ .

Unser zweites Resultat zeigt die Folgerung “praktische ISS + Einbettung  $\Rightarrow$  praktische ISS”.

**Satz 10.8** Betrachte das gestörte System  $\psi_T$  mit einer beschränkten Störungsmenge  $W$  mit  $\|w\| \leq w_{max}$  für alle  $w \in W$ . Das System  $\psi_T$  sei  $\eta$ -praktisch ISS für  $\eta \geq 0$ ,  $\beta \in \mathcal{KL}$  und  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  auf einer beschränkten Menge  $N$ . Dann gilt:

Wenn das approximative gestörte System  $\psi_T^\varepsilon$   $(\delta, \rho)$ -eingebettet in  $\psi_T$  ist auf der Menge  $D = B_{\beta(d_{max}(N), 0) + \gamma(w_{max}) + \eta}(0)$ , dann ist  $\psi_T^\varepsilon$   $\eta^\varepsilon$ -praktisch ISS auf  $N$  mit

$$\eta^\varepsilon = \eta + \gamma(\delta), \quad \beta^\varepsilon = \beta \quad \text{und} \quad \gamma^\varepsilon(r) = \gamma(\rho r + \delta) - \gamma(\delta).$$

Die gleiche Aussage gilt analog, wenn  $\psi_T$  und  $\psi_\varepsilon$  vertauscht werden.

**Beweis:** Völlig analog zu Satz 9.5. □

Da beide Systeme diskret sind, ist der Beweis hier viel leichter als in der kontinuierlichen Situation von Satz 9.9: Definieren wir nämlich

$$w = \frac{\varphi_T^\varepsilon(T, x, F) - \varphi_T(T, x, F)}{T} + w_\varepsilon$$

so folgt sofort

$$w = \frac{\|\varphi_T^\varepsilon(T, x, F) - \varphi_T(T, x, F)\|}{T} + \|w_\varepsilon\| \leq \frac{T\varepsilon}{T} + \|w_\varepsilon\| \leq \varepsilon + \|w_\varepsilon\|$$

und

$$\begin{aligned} \psi_T(T, x, F, w) &= \varphi_T(T, x, F) + Tw \\ &= \varphi_T(T, x, F) + \varphi_T^\varepsilon(T, x, F) - \varphi_T(T, x, F) + Tw_\varepsilon \\ &= \varphi_T^\varepsilon(T, x, F) + Tw_\varepsilon = \psi_T^\varepsilon(T, x, F, w_\varepsilon), \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Als letzte Variante eines bereits formulierten Resultates betrachten wir die diskrete Version von Satz 8.10, also die Folgerung “praktische asymptotische Stabilität  $\Rightarrow$  praktische ISS”.

**Satz 10.9** Es existieren Abbildungen

$$\gamma : \mathcal{KL} \times (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathcal{K}_\infty \quad \text{und} \quad \alpha : \mathcal{KL} \times (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn  $\beta \in \mathcal{KL}$ , ein  $T \in [0, T^*]$  und eine beschränkte Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  mit  $d_{\min}(N) > 0$  existieren, so dass die Lösungen  $\varphi_T(t, x, F)$  die Ungleichung

$$\|\varphi_T(iT, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, iT) + \eta$$

für alle  $x \in N$ , alle  $t \geq 0$  und ein  $\eta \leq d_{\min}/2$  erfüllen und zudem  $L > 0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\|\varphi_T(T, x, F) - \varphi_T(T, y, F)\| \leq e^{LT} \|x - y\|$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|, \|y\| \leq 2d_{\min}(N) + \beta(d_{\max}(N), 0)$  erfüllt ist, dann ist das gestörte System  $\psi_T$   $\eta$ -praktisch ISS (im diskreten Sinne) auf  $N$  mit Störungsmenge  $W = B_{\alpha(\beta, d_{\max}(N), d_{\min}(N), L)}(0)$ , der Attraktionsrate  $\beta$  aus der Annahme und Robustheitsmaß  $\gamma(\beta, d_{\max}(N), d_{\min}(N), L)$ .

Die gleiche Aussage gilt analog für  $\varphi_T^\varepsilon$  und  $\psi_T^\varepsilon$ .

**Beweis:** Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Satz 8.10, wobei das Gronwall-Lemma durch eine induktive Abschätzung ersetzt wird. □



## 10.5 Stabilität approximationsbasierter Feedbacks

Mit den eben erarbeiteten Grundlagen können wir nun den Hauptsatz dieses Abschnittes formulieren und beweisen. Wir unterscheiden dabei zwei Varianten: Als erstes betrachten wir den allgemeinen Fall, in dem das Feedback  $F_T^\varepsilon$  nicht notwendigerweise stetig sein muss. Dieser Fall ist praktisch relevant, da z.B. Feedbacks, die über ein “argmin” aus Optimierungsmethoden gewonnen werden (wie in Abschnitt 10.1 oder in Satz 7.5) typischerweise nicht stetig sind (es sei denn, die zu minimierende Funktion ist konvex in  $u$  gleichmäßig in  $x$ , wie dies z.B. beim linear quadratischen Problem der Fall ist). Als zweites betrachten wir den Fall, in dem das Feedback-geregelte System Lipschitz-stetig ist.

Wesentlicher Unterschied der beiden Fälle ist, dass wir im Lipschitz-stetigen Fall Satz 10.9 anwenden können und deswegen die ISS Eigenschaft aus der asymptotischen Stabilität erhalten, während wir im allgemeinen Fall ISS explizit voraussetzen müssen.

**Satz 10.10** Gegeben seien

- eine beschränkte Umgebung  $N \subset \mathbb{R}^n$  der 0
- eine  $\mathcal{KL}$ -Funktion  $\beta$
- ein Kontrollsystem mit Abtastlösungen  $\varphi_T$  und zugehörige Approximationen  $\varphi_T^\varepsilon$ , die auf einer Menge  $D \subseteq B_{\beta(d_{max}(N),0)+1}(0)$  und für ein  $R > 0$   $\varepsilon$ -konsistent im Sinne von Definition 10.1 seien
- eine Folge von Abtastzeiten  $T_k \in (0, T^*]$
- eine Folge von Konsistenz-Genauigkeiten  $\varepsilon_k \rightarrow 0$
- Feedbacks  $F_{T_k}^{\varepsilon_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , für die die Abschätzung  $\|F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x)\| \leq R$  für alle  $x \in D$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  gelte.

**1. (allgemeiner Fall)** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Für  $k$  hinreichend groß ist die Familie gestörter Systeme  $\psi_{T_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}, w)$  praktisch ISS auf  $N$  mit Attraktionsrate  $\beta$  aus der Annahme und Robustheitsmaßen  $\gamma_k \in \mathcal{K}_\infty$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(C\varepsilon_k) \rightarrow 0$  für jedes  $C > 0$ .
- (ii) Für  $k$  hinreichend groß ist die Familie gestörter Systeme  $\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}, w)$  praktisch ISS auf  $N$  mit Attraktionsrate  $\beta$  aus der Annahme und Robustheitsmaßen  $\gamma_k^\varepsilon \in \mathcal{K}_\infty$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^\varepsilon(C\varepsilon_k) \rightarrow 0$  für jedes  $C > 0$ .

Insbesondere ist  $\varphi_{T_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})$  also praktisch asymptotisch stabil auf  $N$ , falls das approximative gestörte System  $\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}, w)$  die ISS-Bedingung (ii) erfüllt.

**2. (Lipschitz-stetiger Fall)** Wenn die Lipschitz-Bedingung aus Satz 10.9 für die Systeme  $\varphi_T(T, x, F_T^\varepsilon)$  und  $\varphi_T^\varepsilon(T, x, F_T^\varepsilon)$  für alle  $T, \varepsilon$  mit einer von  $T$  und  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten  $L$  erfüllt ist, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Für  $k$  hinreichend groß ist die Familie  $\varphi_{T_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})$  praktisch asymptotisch stabil auf  $N$  mit Attraktionsrate  $\beta$  aus der Annahme.
- (ii) Für  $k$  hinreichend groß ist die Familie  $\varphi_{T_k}^{\varepsilon_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})$  praktisch asymptotisch stabil auf  $N$  mit Attraktionsrate  $\beta$  aus der Annahme.

**Beweis:** Beachte zunächst, dass die Aussagen in beiden Fällen symmetrisch sind und es daher in beiden Fällen genügt, die Implikation (i)  $\Rightarrow$  (ii) zu beweisen. Zudem folgt aus der Konsistenz und Satz 10.7, dass jedes System  $(\varepsilon_k, 1)$ -eingebettet in das jeweils andere System ist.

**1.** Nach Annahme ist  $\psi_{T_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}, w)$   $\eta_k$ -praktisch ISS mit  $\eta_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Aus der Einbettung folgt mit Satz 10.8 die  $\eta_k^\varepsilon$ -praktische ISS von  $\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}, w)$  mit  $\eta_k^\varepsilon = \eta_k + \gamma_j(\varepsilon_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und  $\gamma_k^\varepsilon(r) = \gamma_k(r + \varepsilon_k) - \gamma_k(\varepsilon_k)$ . Die behauptete Eigenschaft von  $\gamma_k$  folgt damit aus  $\gamma_k^\varepsilon(C\varepsilon_k) \leq \gamma_k((C+1)\varepsilon_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**2.** Es sei  $\varphi_{T_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})$  praktisch asymptotisch stabil auf  $N$  mit Attraktionsrate  $\beta$ . Bezeichne mit  $\eta_k \rightarrow 0$  die Konstanten aus der praktischen asymptotischen Stabilitätseigenschaft. Aus Satz 10.9 folgt, dass die Familie von Systemen dann auch praktisch ISS mit gleicher Attraktionsrate  $\beta$  und gleicher Konstante  $\eta_k$  ist. Hierbei hängt das Robustheitsmaß  $\gamma$  nicht von  $k$  ab, da alle wesentlichen Größen, die  $\gamma$  gemäß Satz 10.9 bestimmen unabhängig von  $k$  sind.

Also folgt mit Satz 10.8 die praktische ISS-Eigenschaft von  $\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}, w)$ , wiederum mit Attraktionsrate  $\beta$ , woraus die behauptete praktische asymptotische Stabilität folgt.  $\square$

## 10.6 Hinreichende Bedingungen für ISS

Während die im Lipschitz-stetigen Fall **2** geforderte Gleichmäßigkeit der Attraktionsgeschwindigkeit bzgl.  $k$  relativ leicht zu überprüfen ist, ist die Bedingung im allgemeinen Fall **1** schwieriger zu testen, da sie das Verhalten des gestörten Systems betrifft. Der Grund dafür ist, dass die im Fall **2** so nützliche Implikation “asymptotische Stabilität  $\Rightarrow$  ISS” hier wegen der Unstetigkeit des Feedbacks i.A. nicht gilt.

Nun könnte man diese benötigte ISS-Eigenschaft von  $\psi_T^\varepsilon$  bei der Berechnung von  $F_T^\varepsilon$  explizit berücksichtigen, was die Ermittlung von  $F_T^\varepsilon$  aber stark verkomplizieren würde. In diesem Abschnitt werden wir daher hinreichende Bedingungen untersuchen, mit denen die in **1.(ii)** geforderte ISS Bedingung garantiert werden kann ohne dass man  $\psi_T^\varepsilon$  explizit betrachten muss.

Wir betrachten dazu Lyapunov-Funktionen  $V_k$  analog zu Definition 7.4 mit  $T_k$  an Stelle von  $T$ , ändern diese aber in zwei Punkten etwas ab, zum einen, um die Stabilität auf der vorgegebenen Menge  $N$  zu berücksichtigen (im Gegensatz zu der semiglobalen Stabilität auf beliebigen kompakten Mengen) und zum anderen, um das Feedback  $F_{T_k}^{\varepsilon_k}$  in die Definition einzubeziehen. Zudem schreiben wir die Funktion  $W$  hier gleich als  $g(V_k)$  und nehmen an, dass  $g$  aus  $\mathcal{K}_\infty$  ist, was auf kompakten Intervallen o.B.d.A. möglich ist. Dies vereinfacht die folgenden Beweise.

Wir betrachten also eine Familie von stetigen Funktionen  $V_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Lipschitz-stetige Funktion  $g \in \mathcal{K}_\infty$ , für die

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad g(r) > 0 \quad \text{für} \quad r > 0 \quad (10.1)$$

und

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V_k(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (10.2)$$

für alle  $T \in (0, T^*]$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  erfüllt sind und für alle Konstanten  $C > 0$  ein  $k_0 > 0$  existiert, so dass die Ungleichung

$$V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon_k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})) \leq \max\{V_{T_k}(x) - T_k g(V_k(x)), C\} \quad (10.3)$$

gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $V_k(x) \leq \alpha_2(d_{max}(N))$  und alle  $k \geq k_0$ .

Mit dem Beweis von Satz 7.5 sieht man leicht, dass aus der Existenz von  $V_k$  mit (10.1)–(10.3) die praktische asymptotische Stabilität von  $\varphi_{T_k}^{\varepsilon_k}$  folgt. Indem wir etwas mehr von den  $V_k$  fordern, können wir nun auch die gewünschte praktische ISS Eigenschaft aus Satz 10.10 1.(ii) sicher stellen. Wir unterscheiden dabei in den folgenden Sätzen zwei verschiedene Situationen: zum einen den Fall  $T_k \geq T_{min} > 0$  für alle  $k \geq 1$  und zum anderen den Fall  $T_k \rightarrow 0$ . Wir beginnen mit dem ersten Fall.

**Satz 10.11** Es seien die Annahmen von Satz 10.10 erfüllt, zudem gelte für die Folge der Abtastzeiten  $T_k \geq T_{min} > 0$  für alle  $k \geq 1$ . Für die approximativen Systeme  $\varphi_{T_k}^{\varepsilon_k}$  seien Lyapunov-Funktionen  $V_k$  gegeben, die (10.1)–(10.3) erfüllen. Zudem seien die Funktionen  $V_k$  gleichgradig stetig bzgl.  $k$  in dem folgenden Sinne:

Es existiere  $\omega \in \mathcal{K}_\infty$  so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $V_k(x), V_k(y) \leq \alpha_2(d_{max}(N))$  die Ungleichung

$$|V_k(x) - V_k(y)| \leq \omega(\|x - y\|)$$

gilt.

Dann erfüllt  $\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}, w)$  die ISS-Bedingung aus Satz 10.10 1.(ii). Insbesondere ist  $\varphi_{T_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})$  also praktisch asymptotisch stabil auf  $N$ .

**Beweis:** Wir definieren eine Funktion  $\mu \in \mathcal{KL}$  als Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mu} = -g(\mu)/2, \quad \mu(r, 0) = r.$$

Da  $g(r) > 0$  für  $r > 0$  ist diese Funktion streng monoton gegen 0 fallend in  $t$  und da sich Lösungen dieser Differentialgleichung nicht schneiden können, folgt die strenge Monotonie in  $r$ . Da  $g$  monoton wachsend ist folgt  $r - \tau g(r)/2 \leq \mu(r, \tau)$  für alle  $\tau \geq 0$ .

Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir mit  $C_k$  das minimale  $C > 0$ , für das (10.3) erfüllt ist. Aus der Annahme an die  $C$  folgt dann  $C_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , zudem nehmen wir o.B.d.A. an, dass  $C_k < \alpha_2(d_{max}(N))/2$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

Wir definieren nun

$$\delta(s) := \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} \circ g^{-1} \left( \frac{2}{T_{min}} \omega(T^* s) \right)$$

Hieraus folgt

$$\omega(T^*s) \leq \frac{T_{min}}{2}g \circ \alpha_1 \circ \alpha_2^{-1} \circ \delta(s)$$

und damit für  $x, W^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} V_k(x) \geq \delta(\|w^\varepsilon\|) &\Rightarrow \alpha_2(\|x\|) \geq \delta(\|w^\varepsilon\|) \\ &\Rightarrow \alpha_2^{-1} \circ \delta(\|w^\varepsilon\|) \leq \|x\| \\ &\Rightarrow \omega(T^*\|w^\varepsilon\|) \leq \frac{T_{min}}{2}g(\alpha_1(\|x\|)) \leq \frac{T_{min}}{2}g(V_k(x)). \end{aligned}$$

Gegeben sei nun  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $V_k(x) \leq \alpha_2(d_{max}(N))$  und  $w^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ . Wir unterscheiden drei Fälle:

(i)  $V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x))) \geq C_k$  und  $V_k(x) \geq \delta(\|w^\varepsilon\|)$ :

Dann gilt

$$\begin{aligned} V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x), w^\varepsilon)) &= V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x)) + T_k w^\varepsilon) \\ &\leq V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x))) + \omega(T_k \|w^\varepsilon\|) \\ &\leq V_k(x) - T_k g(V_k(x)) + \omega(T_k \|w^\varepsilon\|) \\ &\leq V_k(x) - T_k g(V_k(x)) + \omega(T^* \|w^\varepsilon\|) \\ &\leq V_k(x) - T_k g(V_k(x))/2 \leq \mu(V_k(x), T_k). \end{aligned}$$

(ii)  $V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x))) \geq C_k$  und  $V_k(x) < \delta(\|w^\varepsilon\|)$ : In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x), w^\varepsilon)) &= V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x)) + T_k w^\varepsilon) \\ &\leq V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x))) + \omega(T_k \|w^\varepsilon\|) \\ &\leq V_k(x) - T_k g(x) + \omega(T_k \|w^\varepsilon\|) \\ &\leq \delta(\|w^\varepsilon\|) + \omega(T_{max} \|w^\varepsilon\|). \end{aligned}$$

(iii)  $V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x))) < C_k$ : In diesem Fall gilt

$$V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x), w^\varepsilon)) \leq C_k + \omega(T_{max} \|w^\varepsilon\|).$$

Beachte, dass im Fall (i) immer die Ungleichung

$$V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x), w^\varepsilon)) \leq \alpha_2(d_{max}(N))$$

gilt. Definieren wir nun den Störbereich  $W^\varepsilon$  so, dass  $\delta(\|w^\varepsilon\|) + \omega(T_{max} \|w^\varepsilon\|) \leq \alpha_2(d_{max}(N))$  und  $C_2 + \omega(T_{max} \|w^\varepsilon\|) \leq \alpha_2(d_{max}(N))$  gilt, so erhalten wir auch in den Fällen (ii) und (iii) die Ungleichung

$$V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon k}(x), w^\varepsilon)) \leq \alpha_2(d_{max}(N))$$

für alle  $w^\varepsilon \in W^\varepsilon$ .

Für jede Folge  $\mathbf{w}^\varepsilon \in \mathcal{W}^\varepsilon$  und jedes  $x \in N$  ( $\Rightarrow V_k(x) \leq \alpha_2(d_{\max}(N))$ ) können wir diese Abschätzungen daher für  $V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(iT_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon))$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  anwenden und erhalten damit im Falle  $V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}((i+1)T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)) \geq C_k$  und  $V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(iT_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)) \geq \delta(\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty)$  aus (i) die Ungleichung

$$V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(iT_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)) \leq \mu(V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}((i-1)T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)), T_k) \quad (10.4)$$

und im anderen Fall aus (ii) und (iii)

$$V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(iT_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)) \leq \max\{\delta(\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty) + \omega(T_{\max}\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty), C_k + \omega(T_{\max}\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty)\}. \quad (10.5)$$

Wie beweisen nun die folgende Behauptung: Wenn (10.5) für  $i-1 \in \mathbb{N}$  gilt, so gilt (10.5) auch für  $i$ : Für jedes  $i$  gilt entweder (10.4) oder (10.5). Gilt (10.5), so sind wir fertig. Gilt (10.4), so erhalten wir

$$\begin{aligned} V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(iT_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)) &\leq \mu(V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}((i-1)T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)), T_k) \\ &\leq V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}((i-1)T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)) \\ &\leq \max\{\delta(\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty) + \omega(T_{\max}\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty), C_k + \omega(T_{\max}\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty)\} \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus (10.5) für  $i-1$  folgt. Also folgt ebenfalls wieder (10.5).

Führen wir nun also eine Induktion über  $i \in \mathbb{N}$  durch, so existiert  $i_0 \in \mathbb{N}$ , so dass (10.4) für  $i \leq i_0 - 1$  und (10.5) für  $i \geq i_0$  gilt. Nutzen wir dabei die Gleichung  $\mu(\mu(r, iT_k), T_k) = \mu(r, (i+1)T_k)$  aus, so erhalten wir für jedes  $x \in N$  und jede Folge  $\mathbf{w}^\varepsilon \in \mathcal{W}^\varepsilon$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} &V_k(\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(iT_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)) \\ &\leq \max\{\mu(V_k(x), iT_k), \delta(\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty) + \omega(T_{\max}\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty), C_k + \omega(T_{\max}\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty)\} \\ &\leq \max\{\mu(V_k(x), iT_k), 2\delta(\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty), 2\omega(T_{\max}\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty), 2C_k\}. \end{aligned}$$

Setzen wir schließlich  $\beta(r, t) = \alpha_1^{-1} \circ \mu(\alpha_2(r), t) \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma(r) = \alpha_1^{-1}(\max\{2\delta(r), 2\omega(T^*r)\})$  und  $\eta_k = \alpha_1^{-1}(2C_k)$ , so erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \|\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(iT_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}(x), \mathbf{w}^\varepsilon)\| &\leq \max\{\beta(\|x\|, iT_k), \gamma(\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty), \eta_k\} \\ &\leq \beta(\|x\|, iT_k) + \gamma(\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_\infty) + \eta_k. \end{aligned}$$

Es gilt also die gewünschte ISS-Eigenschaft aus Satz 10.10 1.(ii), da  $\gamma_k = \gamma$  hier sogar unabhängig von  $k$  ist.  $\square$

Beachte, dass die Voraussetzung  $T_k \geq T_{\min} > 0$  und  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  den Fall, dass  $\varepsilon_k$  und  $T_k$  wie z.B. bei einem Einschnittverfahren gekoppelt sind, ausschließt. In diesem Fall muss nämlich zwingend  $T_k \rightarrow 0$  gelten. Dies wird im folgenden Satz behandelt.

**Satz 10.12** Es seien die Annahmen von Satz 10.10 erfüllt. Für die approximativen Systeme  $\varphi_{T_k}^{\varepsilon_k}$  seien Lyapunov-Funktionen  $V_k$  gegeben, die (10.1)–(10.3) erfüllen. Zudem seien die Funktionen  $V_k$  gleichgradig stetig bzgl.  $k$  in dem folgenden Sinne:

Es existiere  $\omega \in \mathcal{K}_\infty$  so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $V_k(x), V_k(y) \leq \alpha_2(d_{\max}(N))$  die Ungleichung

$$|V_k(x) - V_k(y)| \leq \omega(\|x - y\|)$$

sowie für alle  $C > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(CT_k \varepsilon_k)/T_k = 0$$

gilt.

Dann erfüllt  $\psi_{T_k}^{\varepsilon_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k}, w)$  die ISS-Bedingung aus Satz 10.10 1.(ii). Insbesondere ist  $\varphi_{T_k}(t, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})$  also praktisch asymptotisch stabil auf  $N$ .

**Beweis:** Der Beweis funktioniert völlig analog, wobei statt  $\delta$

$$\delta_k(s) := \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} \circ g^{-1} \left( \frac{2}{T_k} \omega(T_k s) \right)$$

und statt  $\gamma$

$$\gamma_k(r) = \alpha_1^{-1}(\max\{2\delta_k(r), 2\omega(T_k r)\})$$

verwendet wird. Aus der Annahme an  $\omega$  folgt dann

$$\gamma_k(C\varepsilon_k) = \alpha_1^{-1} \left( \max \left\{ 2\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} \circ g^{-1} \left( \underbrace{\frac{2}{T_k} \omega(CT_k \varepsilon_k)}_{\rightarrow 0} \right), 2\omega(T_k C\varepsilon_k) \right\} \right) \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ , also die in Satz 10.10 1.(ii) gewünschte Eigenschaft.  $\square$

**Bemerkung 10.13** (i) Wenn  $\varphi_T^\varepsilon$  durch einen Schritt eines numerischen Einschrittverfahrens mit Konsistenzordnung  $\varepsilon = O(T^p)$  definiert ist, bedeutet die Bedingung an  $\omega$ , dass  $\omega(CT^{p+1})/T \rightarrow 0$  für  $T \rightarrow 0$  gelten muss. Hinreichend hierfür ist

$$\omega(r) = O(\sqrt[p]{r}).$$

Im speziellen Fall des Euler-Verfahrens gilt  $p = 1$ , wofür

$$\omega(r) = O(r)$$

hinreichend ist. Hieraus folgt  $\omega(r) \leq Lr$  für ein  $L > 0$  und alle hinreichend kleinen  $T$ . Daraus folgt

$$|V_k(x) - V_k(y)| \leq \omega(\|x - y\|) \leq L\|x - y\|,$$

die Lyapunov-Funktionen  $V_k$  müssen also Lipschitz-stetig sein.

Die Bedingung  $\omega(r) = O(r)$ , also die Lipschitz-Stetigkeit der  $V_k$  ist zudem äquivalent dazu, dass in die Funktion  $\gamma_k$  unabhängig von  $k$  ist, da man  $T_k$  in der Funktion von  $\delta_k$  im Beweis von Satz 10.12 genau unter dieser Bedingung herauskürzen kann.  $\square$

**Bemerkung 10.14** In der Literatur werden oft Ljapunov–Funktions–Bedingungen wie in Satz 10.11 und 10.12 verwendet, um Stabilität von  $\varphi_{T_k}(t, x, F_T^\varepsilon)$  direkt ohne Umweg über die ISS–Eigenschaft zu folgern, siehe beispielsweise die Arbeiten von D. Nešić, A. Teel et al. [14, 13]. Dies hat den Vorteil, dass die Beweise etwas einfacher werden, aber den Nachteil, dass immer nur hinreichende Bedingungen hergeleitet werden. Der Umweg über die ISS–Eigenschaft erlaubt es hingegen, hinreichende und notwendige Bedingungen — also Äquivalenz — wie in Satz 10.10 zu zeigen. Elegant an Satz 10.10 ist zudem, dass die Bedingung für beliebige Folgen  $T_k \rightarrow 0$  einheitlich formuliert werden kann, während man bei hinreichenden Ljapunov–Funktions–Bedingungen wie in Satz 10.11 und 10.12 typischerweise den Fall  $T_k \not\rightarrow 0$  und  $T_k \rightarrow 0$  unterscheiden muss.  $\square$

Mit Satz 10.12 können wir nun beweisen, dass das in Abschnitt 10.1 beschriebene Optimierungsverfahren tatsächlich funktioniert:

Nach Satz 2.13 existiert für  $\varphi(t, x, F)$  eine stetig differenzierbare Lyapunov–Funktion  $V$ , für die die Ungleichung

$$DV(x)f(x, F(x)) \leq -g(V(x))$$

und damit auch

$$V(\varphi(T, x, F)) \leq V(x) - \int_0^T g(\varphi(s, x, F)) ds$$

erfüllt ist. Für hinreichend kleine  $T$  folgt daraus wegen Stetigkeit

$$V(\varphi(T, x, F)) \leq V(x) - Tg(V(x)) + C_1 T^2$$

für ein  $K > 0$ . Aus Lemma 9.10(i) folgt

$$\varphi(T, x, F) = \varphi_T(T, x, F) + O(T^2)$$

und die Konsistenz liefert

$$\|\varphi_T^\varepsilon(T, x, F) - \varphi_T(T, x, F)\| \leq T\varepsilon.$$

Zusammen erhalten wir also

$$\|\varphi_T^\varepsilon(T, x, F) - \varphi(T, x, F)\| \leq T\varepsilon + C_2 T^2.$$

Da  $F_T^\varepsilon$  diesen Abstand gerade minimiert, ergibt sich

$$\|\varphi_T^\varepsilon(T, x, F_T^\varepsilon) - \varphi(T, x, F)\| \leq T\varepsilon + C_2 T^2.$$

Da  $V$  als differenzierbare Funktion Lipschitz–stetig ist, erhalten wir also insgesamt

$$V(\varphi(T, x, F)) \leq V(x) - Tg(V(x)) + K(T^2 + T\varepsilon)$$

für ein  $K > 0$ . Wählen wir nun für Folgen  $T_k \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  die Lyapunov–Funktion  $V_k = V$  und setzen

$$\tilde{C} := \max\{V_k(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, V_k(x) \leq \alpha_2(d_{\max}(N)), g(V_k(x))/2 \leq K(T_k + \varepsilon_k)\}$$

und

$$C := \tilde{C} + K(T_k^2 + T_k \varepsilon_k)$$

so folgt für  $V_k(x) \geq \tilde{C}$  die Ungleichung

$$V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon_k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})) \leq V_k(x) - Tg(V_k(x)) + K(T_k^2 + T_k \varepsilon_k) \leq V_k(x) - Tg(V_k(x))/2$$

und für  $V_k(x) < \tilde{C}$

$$V_k(\varphi_{T_k}^{\varepsilon_k}(T_k, x, F_{T_k}^{\varepsilon_k})) \leq V_k(x) - Tg(V_k(x)) + K(T_k^2 + T_k \varepsilon_k) \leq \tilde{C} + K(T_k^2 + T_k \varepsilon_k) = C$$

also insgesamt (10.3), da  $C \rightarrow 0$  für  $\varepsilon_k, T_k \rightarrow 0$  gilt. Damit ist Satz 10.12 anwendbar und wir erhalten praktische asymptotische Stabilität.

Beachte, dass wir hier  $T_k \rightarrow 0$  gehen lassen müssen, um praktische asymptotische Stabilität zu erhalten, für festes  $T$  können wir also i.A. nur erwarten, dass man in eine Umgebung von 0 kontrollieren kann, deren Radius von  $T$  abhängt. Dies kann in der Praxis tatsächlich auftreten, z.B. in Beispiel 9.15, bei dem man auch mit dem Optimierungsalgorithmus nicht asymptotisch nach 0 steuern kann.



# Kapitel 11

## Stabilität unter Messfehlern

In diesem letzten Kapitel werden wir die Robustheit von Abtastfeedbacks unter Messfehlern betrachten. Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass man in der Praxis bei der Auswertung von  $F_T(x)$  den Wert  $x$  im Allgemeinen niemals exakt messen kann, sondern immer mit einem fehlerbehafteten Wert  $x + e$  auskommen muss. Ist  $F_T$  nun unstetig, so kann sich der tatsächliche gewählte Feedback-Wert  $F_T(x + e)$  daher drastisch von dem eigentlich “passenden” Wert  $F_T(x)$  unterscheiden.

Wir haben im letzten Kapitel bereits die Robustheit unstetiger Abtastfeedbacks unter *additiven* Störungen betrachtet und gesehen, dass die Existenz stetiger Ljapunov-Funktionen ausreicht, um Robustheit im ISS-Sinne für nach unten positiv beschränkte Abtastraten zu garantieren, während die Existenz Lipschitz-stetiger Ljapunov-Funktionen ausreicht, Robustheit im ISS-Sinne auch für  $T \rightarrow 0$  zu gewährleisten. Die Resultate in diesem Kapitel werden ähnlich sein, allerdings nicht exakt gleich.

### 11.1 Messfehler

Wir betrachten in diesem Abschnitt Abtastsysteme  $\varphi_T$  mit nicht notwendig stetigem Feedback  $F_T$ . Da wir hier keine approximierenden Systeme betrachten, verzichten wir auf die Indizes  $\varepsilon$  und  $k$  und betrachten das System für eine allgemeine Abtastzeit  $T > 0$ . Zudem werden wir immer nicht-praktische Stabilität des ungestörten Systems annehmen, also  $\eta = 0$  bzw.  $C = 0$  in der Ljapunov-Funktions-Bedingung (10.3).

Formal definieren wir die Messfehler über das folgende Modell:

Zu einer gegebenen Folge  $\mathbf{e} = (e_0, e_1, \dots)$  von Messfehlern bezeichne  $\varphi_T(t, x, F_T, e)$  die Lösung von

$$\varphi_T(t, x, F, e) = \varphi(t - iT, x_i, F(x_i + e_i)) \text{ für alle } t \in [iT, (i + 1)T]$$

mit  $x_0 = x$ ,  $x_i = \varphi_T(iT, x, F, e)$ . Wie im letzten Kapitel betrachten wir das Systemverhalten nur für die diskreten Zeitpunkte  $0, T, 2T, \dots$

Wir nehmen an, dass mit  $F_T$  ein nicht notwendigerweise stetiges asymptotisch stabilisierendes Feedback für  $\varphi_T$  gegeben ist und wollen Bedingungen herleiten, unter denen das

System ISS bezüglich des Messfehlers ist, also

$$\|\varphi_T(t, x, F, e)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|\mathbf{e}\|_\infty)$$

gilt.

## 11.2 Stabilität unter Messfehlern

Der folgende Satz zeigt, dass für hinreichend kleine Messfehler ISS gilt.

**Satz 11.1** Das lokal beschränkte Feedback  $F_T$  stabilisiere  $\varphi_T$  asymptotisch auf einer beschränkten Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  mit stetiger Ljapunov-Funktion  $V_T$ , die (10.1)–(10.3) mit  $C = 0$  erfüllt. Dann ist das System ISS gegenüber Messfehlern.

**Beweis:** Es sei  $\omega \in \mathcal{K}_\infty$  so gewählt, dass

$$|V_T(x) - V_T(y)| \leq \omega(\|x - y\|)$$

für alle  $x, y$  mit  $V_T(x), V_T(y) \leq \alpha_2(d_{\max}(N))$ . Zudem sei  $L > 0$  so dass

$$\|\varphi(T, x, u) - \varphi(T, y, u)\| \leq e^{LT}\|x - y\|$$

für alle diese  $x, y$  und alle  $u = F_T(z)$ ,  $V_T(z) \leq \alpha_2(d_{\max}(N))$  gilt.

Dann gilt

$$\begin{aligned} V_T(\varphi_T(T, x, F_T(x + e))) &= V_T(\varphi_T(T, x + e, F_T(x + e))) + \omega(e^{LT}\|e\|) \\ &\leq V_T(x + e) - Tg(V_T(x + e)) + \omega(e^{LT}\|e\|) \\ &\leq V_T(x) - Tg(V_T(x)) + \omega(e^{LT}\|e\|) + (1 + TLg)\omega(\|e\|) \end{aligned}$$

Definieren wir nun  $\delta \in \mathcal{K}_\infty$  mittels

$$\delta(s) := \alpha_2 \circ g^{-1} \left( \frac{2}{T} (\omega(e^{LT}s) + (1 + TLg)\omega(s)) \right),$$

so erhalten wir die Behauptung ganz analog zum Beweis von Satz 10.11 mit

$$\gamma(r) := \alpha_1^{-1}(\delta(r) + \omega(e^{LT}r) + (1 + TLg)\omega(r)).$$

□

Im Vergleich zu den Beweisen der Sätze 10.11 und 10.12 ergibt sich hier ein wesentlicher Unterschied: Selbst wenn  $V_T$  Lipschitz ist, also  $\omega(r) = Lr$  gilt, ist  $\delta$  (und damit  $\gamma$ ) *nicht* unabhängig von  $T$ , da die Abtastzeit  $T$  hier in anderer Weise in die Definition von  $\delta$  eingeht.

Explizit in Abhängigkeit von  $T$  geschrieben, erhalten wir also eine ISS-Abschätzung der Form

$$\|\varphi_T(iT, x, F, e)\| \leq \beta(\|x\|, iT) + \gamma_1(\gamma_2(\|\mathbf{e}\|_\infty)/T), \quad (11.1)$$

für geeignete  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ . Je kleiner also  $T$  wird, desto schlechter ist die Robustheit bezüglich Messfehlern.

Kann man für Messfehler trotzdem ein Resultat erhalten, bei dem  $\gamma$  (und damit implizit die zulässige Größe der Messfehler  $\|e\|$ ) unabhängig von  $T$  ist?

Die Antwort ist ja, wenn man für  $T \in (0, T^*]$  die Existenz stetig differenzierbarer Ljapunov-Funktionen  $V_T$  annimmt mit

$$\|DV_T(x) - DV_T(y)\| \leq \kappa(\|x - y\|)$$

und

$$\left\| DV_T(x)f(x, u) - \frac{V_T(\varphi_T(T, x, u)) - V_T(x)}{T} \right\| \leq KT$$

für ein  $\kappa \in \mathcal{K}_\infty$  und alle  $x, y$  mit  $V_T(x), V_T(y) \leq \alpha_2(d_{max}(N))$  sowie ein  $K > 0$ .

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & V_T(\varphi_T(T, x, F_T(x + e))) \\ & \leq V_T(x) + TDV_T(x)f(x, F_T(x + e)) + KT^2 \\ & \leq V_T(x) + TDV_T(x)f(x + e, F_T(x + e)) + TML\|e\| + KT^2 \\ & \leq V_T(x) + TDV_T(x + e)f(x + e, F_T(x + e)) + T\kappa(\|e\|)M + TML\|e\| + KT^2 \\ & \leq V_T(x) - Tg(V_T(x + e)) + T\kappa(\|e\|)M + TML\|e\| + 2KT^2 \\ & \leq V_T(x) - Tg(V_T(x)) + TL_g\omega(\|e\|) + T\kappa(\|e\|)M + TML\|e\| + 2KT^2. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 11.1 erhalten wir daraus die Abschätzung

$$\|\varphi_T(iT, x, F, e)\| \leq \beta(\|x\|, iT) + \gamma_3(\|\mathbf{e}\|_\infty) + \gamma_4(T)$$

für geeignete  $\gamma_3, \gamma_4 \in \mathcal{K}_\infty$ . Zusammen mit (11.1) ergibt sich

$$\|\varphi_T(iT, x, F, e)\| \leq \beta(\|x\|, iT) + \min\{\gamma_1(\gamma_2(\|\mathbf{e}\|_\infty)/T), \gamma_3(\|\mathbf{e}\|_\infty) + \gamma_4(T)\}.$$

Die rechte Seite ist immer noch abhängig von  $T$ , kann aber durch einen von  $T$  unabhängigen Ausdruck abgeschätzt werden: Für  $T \geq \sqrt{\gamma_2(r)}$  erhalten wir  $\gamma_2(r)/T \leq \sqrt{\gamma_2(r)}$  und damit

$$\min\{\gamma_1(\gamma_2(r)/T), \gamma_3(r) + \gamma_4(T)\} \leq \gamma_1(\gamma_2(r)/T) = \gamma_1(\sqrt{\gamma_2(r)})$$

und für  $T \leq \sqrt{\gamma_2(r)}$  ergibt sich

$$\min\{\gamma_1(\gamma_2(r)/T), \gamma_3(r) + \gamma_4(T)\} \leq \gamma_3(r) + \gamma_4(T) \leq \gamma_3(r) + \gamma_4(\sqrt{\gamma_2(r)})$$

und damit insgesamt

$$\min\{\gamma_1(\gamma_2(r)/T), \gamma_3(r) + \gamma_4(T)\} \leq \min\{\gamma_1(\sqrt{\gamma_2(r)}), \gamma_3(r) + \gamma_4(\sqrt{\gamma_2(r)})\} =: \gamma(r).$$



# Literaturverzeichnis

- [1] B. AULBACH, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Elsevier–Spektrum Verlag, Heidelberg, 2. ed., 2004.
- [2] A. BACCIOTTI AND F. CERAGIOLI, *Nonsmooth Lyapunov functions and discontinuous Carathéodory systems*, in Proceedings of NOLCOS04, 2004, pp. 1115–1119.
- [3] R. W. BROCKETT, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in Differential Geometric Control Theory, R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, eds., Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 181–191.
- [4] L. C. EVANS AND F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [5] O. FORSTER, *Analysis 2*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1996.
- [6] L. GRÜNE, *Modellierung mit Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 2003. [www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/modellierung03/](http://www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/modellierung03/).
- [7] L. GRÜNE AND D. NEŠIĆ, *Optimization based stabilization of sampled–data nonlinear systems via their approximate discrete–time models*, SIAM J. Control Optim., 42 (2003), pp. 98–122.
- [8] W. HAHN, *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 22, Springer–Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.
- [9] W. HAHN, *Stability of Motion*, Springer–Verlag Berlin, Heidelberg, 1967.
- [10] H. JEGGLE, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1979.
- [11] D. S. LAILA, D. NEŠIĆ, AND A. ASTOLFI, *Sampled-data control of nonlinear systems*, in Advanced Topics in Control Systems Theory: Lecture Notes from FAP 2005, A. Loría, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and E. Panteley, eds., vol. 328 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Berlin, Heidelberg, 2006, Springer–Verlag, pp. 91–137.
- [12] Y. LIN, E. D. SONTAG, AND Y. WANG, *A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability*, SIAM J. Control Optim., 34 (1996), pp. 124–160.

- [13] D. NEŠIĆ AND A. R. TEEL, *A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models*, IEEE Trans. Automat. Control, 49 (2004), pp. 1103–1122.
- [14] D. NEŠIĆ, A. R. TEEL, AND P. V. KOKOTOVIĆ, *Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations*, Syst. Control Lett., 38 (1999), pp. 259–270.
- [15] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Springer Verlag, New York, 2nd ed., 1998.
- [16] E. D. SONTAG AND Y. WANG, *On characterizations of the input-to-state stability property*, Syst. Control Lett., 24 (1995), pp. 351–359.
- [17] F. W. WILSON, *Smoothing derivatives of functions and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., 139 (1969), pp. 413–428.
- [18] V. I. ZUBOV, *Methods of A.M. Lyapunov and their Application*, P. Noordhoff, Groningen, 1964.

# Index

- Abbildungsgrad, 24
- Ableitungskonsistenz, 83
- Abtast–Ljapunov–Funktion, 63
  - Existenz, 65
- Abtastlösungen, 61
- Abtastperiode, 61
- Abtastung, 61
- Abtastung und Stabilität, 62
- Abtastzeit, 61
- Anfangswert, 4
- approximationsbasierte Feedbacks
  - einfaches Verfahren, 91
  - Stabilitätsbeweis, 105
  - Stabilität
    - Gegenbeispiele, 94
    - Satz, 99
- Artsteins Kreise, 27, 48, 56, 62
- asymptotische Kontrollierbarkeit, 22
- asymptotische Stabilität, 7
  - praktisch, 76
  - semiglobal praktisch, 62
- Backstepping, 58
- Brocketts Bedingung, 23, 25
- Brocketts nichtholonomer Integrator, *siehe* nichtholonomer Integrator
- Carathéodory, Satz von, 4
- Differentialgleichung
  - Linearisierung, 32
- Differenzierbarkeit, 31
- Digitalisierung
  - und Stabilität, 86
- Einbettung, 81, 97
  - und ISS, 82, 97
  - und Konsistenz, 83, 97
- Equilibrium, 7
- Euler–Approximation, 93
- Existenz– und Eindeigkeitssatz, 4
- exponentielle Kontrollierbarkeit, 22
- exponentielle Stabilität, 7
- Feedback
  - approximationsbasiert, *siehe* approximationsbasierte Feedbacks
- Feedback–Kontrolle, 21
- Feedback–Stabilisierbarkeit, 22
  - exponentiell, 22
- gestörte Systeme, 69
- Gleichgewicht, 7
- Input–to–state Stabilität, *siehe* ISS
- Instabilität, 7
- invertiertes Pendel, *siehe* Pendel
- ISS, 70
  - hinreichende Bedingung, 101, 103
  - praktisch, 77
    - und praktische asymptotische Stabilität, 77, 98
  - Stabilität von Kaskaden, 72
  - und asymptotische Stabilität, 75
  - und Einbettung, 82, 97
  - unter Messfehlern, 107, 108
- ISS–Ljapunov–Funktion, 71
  - alternative Darstellung, 71
  - Existenz, 71
- Jacobi–Matrix, 31
- $\mathcal{K}$ –Funktion, 6
- $\mathcal{K}_\infty$ –Funktion, 6
- Kaskaden, 72
- $\mathcal{KL}$ –Funktion, 6
- Konkatenation, 3
- Konsistenz, 79, 93
  - Ableitungs–, 83
  - und Einbettung, 83, 97

- von Abtastsystemen, 85
- kontroll-affin, 51
- Kontroll-Ljapunov-Funktion, 41
  - asymptotische Kontrollierbarkeit, 45, 46
  - differenzierbar, 43
  - Feedback-Stabilisierung, 49
- Kontroll-Ljapunov-Paar, 41
- Kontrollfunktionen, 1
- Kontrollsystem, 1
- Kontrollwertebereich, 1
- Konvergenz, 80
- $\mathcal{L}$ -Funktion, 6
- Lebesgue-messbar, 3
- Linearisierung, 32
  - Stabilität, 33
  - Trajektorien, 32
  - zeitvariant, 39
- Ljapunov Funktion
  - bilinear, 35
  - quadratisch, 35
- Ljapunov-Funktion, 10
  - Kontroll-, 41
  - Pendel, 13
  - semiglobal praktisch, 63
  - und asymptotische Stabilität, 11, 14
  - zeitvariant, 38
- Ljapunov-Paar, 10
- messbar, 3
- Messfehler, 107
  - ISS, 107
- nichtholonomer Integrator, 25, 36
- nichtholonomes System, 25
- open-loop Kontrolle, 21
- Pendel
  - Backstepping, 60
  - grafische Veranschaulichung, 1
  - Kontroll-Ljapunov-Funktion, 55
  - linearisiert, 36
  - Ljapunov-Funktion, 13
  - nichtlineares Modell, 2
  - Stabilität, 8
- praktische Stabilität, 76
- Regelung, 21
- Ruhelage, 7
- Sampling, *siehe* Abtastung
- Satz von Rademacher, 16
- Sontag-Formel, 52
- Stabilisierungsproblem
  - schematische Darstellung, 68
- Stabilität, 7
  - asymptotisch, 7
  - Eigenwertkriterium, 34
  - exponentiell, 7
  - Ljapunov Funktionen Kriterium, 35
  - unter Digitalisierung, 86
- Stabilität unter Linearisierung, 33
- Steuerung, 21
- Störfunktion, 69
- stückweise konstant, 3
- Subgradient, 66
- Supergradient, 66
- Tracking Kontrolle, 37
- Trajektorien unter Linearisierung, 32
- universelle Formel, 52
- Vergleichsfunktionen, 6
- Zubovs Gleichung, 19