

Mathematische Kontrolltheorie

Lars Grüne
Mathematisches Institut
Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Bayreuth
95440 Bayreuth
lars.gruene@uni-bayreuth.de
www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/

Vorlesungsskript
Wintersemester 2013/2014

Vorwort

Dieses Skript ist im Rahmen einer gleichnamigen Vorlesung entstanden, die ich im Wintersemester 2013/2014 an der Universität Bayreuth gehalten habe. Kapitel 1–7 bilden eine vollständig überarbeitete dritte Auflage eines Skripts über lineare Kontrolltheorie aus den Wintersemestern 2005/2006 sowie 2008/2009, in der einige Tippfehler verbessert wurden und Kapitel 5 vollständig neu geschrieben wurde. Kapitel 8–14 sind gründlich überarbeitete Teile meines Skripts über nichtlineare Kontrolltheorie aus dem Sommersemester 2006. Die Vorlesung wird im Sommersemester 2014 mit einer Spezialvorlesung über Modellprädiktive Regelung fortgesetzt.

Teile des Skriptes wurden auf Basis des Skripts [4], der Lehrbücher [14] und [13] sowie der Monographie [10] erstellt, die auch ohne explizite Erwähnung intensiv genutzt wurden. Herzlich bedanken möchte ich mich wie immer bei allen aufmerksamen Studentinnen und Studenten, die mich auf Fehler und Ungenauigkeiten hingewiesen haben.

Eine elektronische Version dieses Skripts erhalten Sie im Internet auf der Seite

<http://num.math.uni-bayreuth.de/de/team/Gruene%5FLars/lecture%5Fnotes>.

Die zugehörigen Übungsaufgaben finden sich im E-Learning-System der Universität Bayreuth, für das ich Ihnen auf Anfrage an lars.gruene@uni-bayreuth.de gerne einen Gastzugang geben.

Bayreuth, Februar 2014

LARS GRÜNE

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Grundbegriffe	1
1.1 Lineare Kontrollsysteme	1
1.2 Existenz und Eindeutigkeit	4
2 Kontrollierbarkeit	11
2.1 Definitionen	11
2.2 Analyse von Kontrollierbarkeitseigenschaften	12
3 Stabilität und Stabilisierung	19
3.1 Definitionen	19
3.2 Eigenwertkriterien	20
3.3 Ljapunov Funktionen	23
3.4 Das Stabilisierungsproblem für lineare Kontrollsysteme	27
3.5 Lösung mit eindimensionaler Kontrolle	29
3.6 Lösung mit mehrdimensionaler Kontrolle	33
4 Beobachtbarkeit und Beobachter	37
4.1 Beobachtbarkeit und Dualität	37
4.2 Asymptotische Beobachtbarkeit	42
4.3 Dynamische Beobachter	43
4.4 Lösung des Stabilisierungsproblems mit Ausgang	45
5 Analyse im Frequenzbereich	47
5.1 Laplace-Transformation	47
5.2 Die Übertragungsfunktion	49
5.3 Eingangs-Ausgangs Stabilität	51

5.4	Feedbacks im Frequenzbereich	54
5.5	Grafische Analyse	55
6	Optimale Stabilisierung	61
6.1	Grundlagen der optimalen Steuerung	61
6.2	Das linear-quadratische Problem	67
6.3	Linear-quadratische Ausgangsregelung	75
7	Der Kalman Filter	81
7.1	Zustandsschätzung auf unendlichem Zeithorizont	81
7.2	Der Kalman-Filter als Beobachter	85
8	Nichtlineare Kontrollsysteme	87
8.1	Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz	87
9	Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungen	91
9.1	Vergleichsfunktionen	92
9.2	Stabilität	93
9.3	Beispiele	94
9.4	Ljapunov-Funktionen	96
9.5	Ljapunov-Funktion \Rightarrow Asymptotische Stabilität	97
9.6	Asymptotische Stabilität \Rightarrow Ljapunov-Funktion	100
10	Asymptotische Kontrollierbarkeit...	107
10.1	Definition	107
10.2	Brocketts Bedingung	109
10.3	Beispiel: Artsteins Kreise	113
11	Linearisierung	117
11.1	Die linearisierte Differentialgleichung	117
11.2	Approximation der Lösungstrajektorien	118
11.3	Stabilität und Linearisierung	119
11.4	Feedback-Stabilisierung mittels Linearisierung	121
12	Kontroll-Ljapunov-Funktionen	125
12.1	Definition und alternative Darstellungen	125
12.2	Ljapunov-Funktion \Leftrightarrow asymptotische Kontrollierbarkeit	130

13 Sontags Universelle Formel	135
14 Stabilisierung mit Abtastfeedback	143
14.1 Abtast-Lösungen	143
14.2 Stabilität und Abtastung	144
14.3 Abtastung und Ljapunov-Funktionen	145
14.4 Existenz von Abtast-Ljapunov-Funktionen	148
14.5 Schematische Übersicht der Stabilitäts-Ergebnisse	151
Literaturverzeichnis	152
Index	155

Kapitel 1

Grundbegriffe

Kontrollsysteme sind dynamische Systeme in kontinuierlicher oder diskreter Zeit, die von einem Parameter $u \in \mathbb{R}^m$ abhängen, der sich — abhängig von der Zeit und/oder vom Zustand des Systems — verändern kann. Dieser Parameter kann verschieden interpretiert werden. Er kann entweder als Steuergröße verstanden werden, also als Größe, die von außen aktiv beeinflusst werden kann (z.B. die Beschleunigung bei einem Fahrzeug, die Investitionen in einem Unternehmen) oder auch als Störung, die auf das System wirkt (z.B. Straßenunebenheiten bei einem Auto, Kursschwankungen bei Wechselkursen). Für das mathematische Fachgebiet, das sich mit der Analyse dieser Systeme beschäftigt, hat sich im deutschen Sprachgebrauch der Begriff „Kontrolltheorie“ etabliert, wenngleich er eine etwas missverständliche Übersetzung des englischen Ausdrucks „control theory“ darstellt, da es hier nicht um Kontrolle im Sinne von Überwachung sondern im Sinne von Einflussnahme von außen geht. Statt von Kontrolle spricht man auch von *Steuerung*, wenn die Parameter u lediglich von der Zeit abhängen und von *Regelung*, wenn die Parameter u vom aktuellen Zustand abhängen.

1.1 Lineare Kontrollsysteme

Wir werden uns in dieser Vorlesung mit Kontrollsystemen beschäftigen, die in kontinuierlicher Zeit definiert sind und durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Allgemein sind solche Systeme durch Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.1)$$

beschrieben. Die Variable $t \in \mathbb{R}$ werden wir hierbei stets als *Zeit* interpretieren und die Notation $\dot{x}(t)$ steht kurz für die zeitliche Ableitung $d/dt x(t)$. Die Größe $x(t) \in \mathbb{R}^n$ heißt der *Zustand* und $u(t) \in \mathbb{R}^m$ heißt die *Kontrolle* oder der *Kontrollwert*, jeweils zur Zeit t .

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Vektorfeld*. Sowohl f als auch die Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ müssen gewisse Regularitätseigenschaften erfüllen, damit die Lösungen von (1.1) existieren und eindeutig sind. Wir wollen uns mit diesem allgemeinen Problem hier aber nicht weiter beschäftigen, sondern gleich zu einem Spezialfall von Kontrollsystemen übergehen, mit dem wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen wollen.

Definition 1.1 Ein *lineares zeitinvariantes* Kontrollsystem ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.2)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. \square

Diese Klasse von Kontrollsystemen ist besonders einfach, da das Vektorfeld linear in x und u ist und zudem nicht explizit von der Zeit t abhängt. Trotzdem ist sie bereits so reichhaltig, dass man mit ihr eine große Anzahl realer Prozesse z.B. für technische Anwendungen brauchbar beschreiben kann. Tatsächlich werden in der technischen Praxis auch heute noch viele lineare Modelle eingesetzt, wenn auch nicht immer in der einfachen Form (1.2) (wir werden später in der Vorlesung noch eine wichtige Erweiterung kennen lernen).

Um zu veranschaulichen, warum die Klasse (1.2) oft eine brauchbare Modellierung ermöglicht, betrachten wir ein Modell aus der Mechanik, und zwar ein auf einem Wagen befestigtes umgedrehtes starres Pendel, vgl. Abb. 1.1.

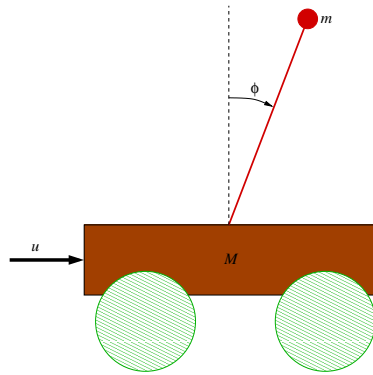


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Pendels auf einem Wagen

Die Kontrolle u ist hierbei die Beschleunigung des Wagens. Mittels physikalischer Gesetze kann ein “exaktes”¹ Differentialgleichungsmodell hergeleitet werden.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + g \sin x_1(t) + u(t) \cos x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= u \end{aligned} \right\} =: f(x(t), u(t)) \quad (1.3)$$

Hierbei besteht der Zustandsvektor $x \in \mathbb{R}^4$ aus 4 Komponenten: x_1 entspricht dem Winkel ϕ des Pendels (vg. Abb. 1.1), der entgegen dem Uhrzeigersinn zunimmt, wobei $x_1 = 0$ dem aufgerichteten Pendel entspricht. x_2 ist die Winkelgeschwindigkeit, x_3 die Position des Wagens und x_4 dessen Geschwindigkeit. Die Konstante k beschreibt die Reibung des Pendels

¹Das Modell (1.3) ist nicht ganz exakt, da es bereits etwas vereinfacht ist: es wurde angenommen, dass das Pendel so leicht ist, dass es keinen Einfluss auf die Bewegung des Wagens hat. Zudem wurde eine Reihe von Konstanten so gewählt, dass sie sich gegeneinander aufheben.

(je größer k desto mehr Reibung) und die Konstante $g \approx 9.81m/s^2$ ist die Erdbeschleunigung.

Sicherlich ist (1.3) von der Form (1.1). Es ist aber nicht von der Form (1.2), da sich die nichtlinearen Funktionen \sin und \cos nicht mittels der Matrizen A und B darstellen lassen (beachte, dass in A und B nur konstante Koeffizienten stehen dürfen, die Matrizen dürfen also nicht von x abhängen).

Trotzdem kann ein lineares Modell der Form (1.2) verwendet werden, um (1.3) in der Nähe gewisser Punkte zu approximieren. Diese Prozedur, die man *Linearisierung* nennt, ist möglich in der Nähe von Punkten $(x^*, u^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, in denen $f(x^*, u^*) = 0$ gilt. O.B.d.A. können wir dabei annehmen, dass $(x^*, u^*) = (0, 0)$ gilt, da man dies ansonsten mittels der Koordinatentransformation $x \rightsquigarrow x - x^*$, $u \rightsquigarrow u - u^*$ und $f(x, u) \rightsquigarrow f(x + x^*, u + u^*)$ erzielen kann. In unserem Beispiel (1.3) ist eine solche Transformation nicht nötig, denn es gilt bereits $f(0, 0) = 0$. Beachte, dass dieser Punkt im Modell dem aufrecht stehenden Pendel mit still stehendem und unbeschleunigtem Wagen entspricht.

Gilt nun $f(0, 0) = 0$ so erhalten wir ein System der Form (1.2), indem wir A und B definieren als

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{und} \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0).$$

Wenn f stetig differenzierbar ist gilt

$$f(x, u) = Ax + Bu + o(\|x\| + \|u\|),$$

d.h., für $x \approx 0$ und $u \approx 0$ stimmen $f(x, u)$ und $Ax + Bu$ gut überein. Man kann nun beweisen, dass sich diese Näherung auf die Lösungen der Differentialgleichungen (1.1) und (1.2) überträgt.²

Für unser Beispiel ergibt sich aus der obigen Rechnung ein System der Form (1.2) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Abbildung 1.1 zeigt einen Vergleich der Lösungen von (1.3) (durchgezogen) mit den Lösungen von (1.2, 1.4) (gestrichelt), jeweils für $u \equiv 0$ und mit $k = 0.1$, $g = 9.81$, in zwei verschiedenen Umgebungen um die 0. Dargestellt sind hier für jede der zwei Gleichungen jeweils 4 Lösungskurven der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \middle| t \in [-10, 10] \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Während im linken Bildausschnitt mit bloßem Auge kein Unterschied zu erkennen ist, weichen die Lösungen im rechten Ausschnitt deutlich voneinander ab.

²Eine mathematisch exakte Formulierung dieser Eigenschaft für unkontrollierte Differentialgleichungen findet sich z.B. als Satz 7.2 in [7].

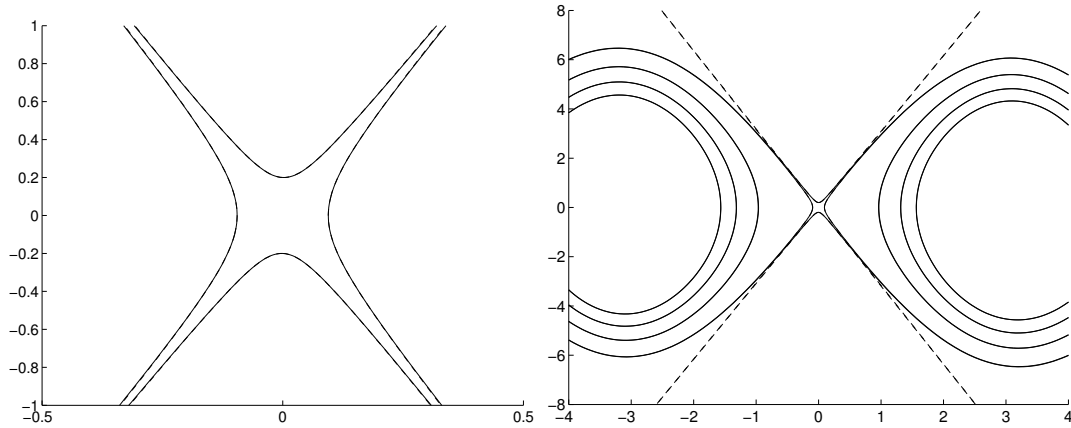


Abbildung 1.2: Vergleich der Lösungen von (1.3) (durchgezogen) mit (1.2, 1.4) (gestrichelt)

1.2 Existenz und Eindeutigkeit

Wann immer man sich mit Differentialgleichungen beschäftigt, muss man zunächst die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösungen klären. Wir wollen dies zunächst für das lineare Kontrollsystem (1.2) mit $u \equiv 0$ machen.

Hierzu benötigen wir zunächst etwas Notation.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnen wir im Folgenden mit $[A]_{ij} \in \mathbb{R}$ den Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit At die komponentenweise Multiplikation, also $[At]_{ij} = [A]_{ij}t$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Matrix-Potenz A^k induktiv mittels $A^0 = \text{Id}$ und $A^{k+1} = AA^k$ definiert.

Zudem benötigen wir die folgende Definition.

Definition 1.2 Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix-Exponentialfunktion gegeben durch

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}.$$

□

Die Konvergenz der unendlichen Reihe in dieser Definition ist dabei als komponentenweise Konvergenz, also als

$$[e^{At}]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} [A^k \frac{t^k}{k!}]_{ij}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

zu verstehen. Dass die Komponenten dieser Reihe tatsächlich konvergieren folgt aus dem Majorantenkriterium, denn mit der Zeilensummennorm

$$\alpha = \|A\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |[A]_{ij}|$$

gilt $|[A^k]_{ij}| \leq \|A^k\|_\infty \leq \|A\|_\infty^k = \alpha^k$, also

$$\left| [A^k \frac{t^k}{k!}]_{ij} \right| = |[A^k]_{ij}| \left| \frac{t^k}{k!} \right| \leq \alpha^k \left| \frac{t^k}{k!} \right| = \frac{(\alpha|t|)^k}{k!}$$

und damit

$$[e^{At}]_{ij} \leq e^{\alpha|t|},$$

wobei hier auf die rechten Seite die (übliche) skalare Exponentialfunktion steht.

Beachte, dass im Allgemeinen

$$[e^{At}]_{ij} \neq e^{[At]_{ij}}$$

gilt, wobei $e^{[At]_{ij}}$ die (komponentenweise angewandte) skalare Exponentialfunktion ist.

Aus der Definition der Matrix-Exponentialfunktion folgen sofort die Eigenschaften

$$(i) e^{A0} = \text{Id} \quad \text{und} \quad (ii) Ae^{At} = e^{At}A \quad (1.5)$$

Das folgende Lemma liefert eine weitere wichtige Eigenschaft der Matrix-Exponentialfunktion.

Lemma 1.3 Für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Funktion $t \mapsto e^{At}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 1.4 Betrachte die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.6)$$

mit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dann gilt: Für jede *Anfangsbedingung* der Form

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.7)$$

mit $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (1.6), die (1.7) erfüllt und die wir mit $x(t; t_0, x_0)$ bezeichnen. Für diese Lösung gilt

$$x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (1.8)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die in (1.8) angegebene Funktion $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ sowohl die Differentialgleichung (1.6) als auch die Anfangsbedingung (1.7) erfüllt. Aus Lemma 1.3 folgt

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}x_0 = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t),$$

also (1.6). Wegen (1.5)(i) gilt zudem

$$x(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}x_0 = e^{A0}x_0 = \text{Id}x_0 = x_0,$$

also (1.7).

Da wir damit (1.8) als Lösung verifiziert haben, folgt insbesondere die Existenz.

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Hierzu zeigen wir zunächst, dass die Matrix e^{At} invertierbar ist mit

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}. \quad (1.9)$$

Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ löst $y(t) = e^{-At}y_0$ die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = -Ay(t)$. Nach Produktregel gilt dann

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}e^{At}x_0) = \frac{d}{dt}e^{-At}(e^{At}x_0) + e^{-At}\frac{d}{dt}e^{At}x_0 = -Ae^{-At}e^{At}x_0 + e^{-At}Ae^{At}x_0 = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt (1.5)(ii) ausgenutzt haben. Also ist $e^{-At}e^{At}x_0$ konstant in t . Damit gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$e^{-At}e^{At}x_0 = e^{-A0}e^{A0}x_0 = \text{Id}x_0 = x_0,$$

und folglich

$$e^{-At}e^{At} = \text{Id} \Rightarrow e^{-At} = (e^{At})^{-1}.$$

Mit (1.9) können wir nun die Eindeutigkeit zeigen. Es sei $x(t)$ eine beliebige Lösung von (1.6), (1.7). Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-A(t-t_0)}x(t)) &= \frac{d}{dt}e^{-A(t-t_0)}(x(t)) + e^{-A(t-t_0)}\dot{x}(t) \\ &= -Ae^{-A(t-t_0)}x(t) + e^{-A(t-t_0)}Ax(t) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir wiederum (1.5)(ii) ausgenutzt haben. Also ist $e^{-A(t-t_0)}x(t)$ konstant in t , woraus für alle $t \in \mathbb{R}$

$$e^{-A(t-t_0)}x(t) = e^{-A(t_0-t_0)}x(t_0) = \text{Id}x(t_0) = x_0$$

folgt. Multiplizieren wir nun beide Seiten dieser Gleichung mit $e^{A(t-t_0)}$ und verwenden (1.9), so ergibt sich

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Da $x(t)$ eine beliebige Lösung war, folgt daraus die Eindeutigkeit. \square

Eine nützliche Folgerung aus diesem Satz ist das folgende Korollar.

Korollar 1.5 Die Matrix-Exponentialfunktion e^{At} ist die eindeutige Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad (1.10)$$

mit $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und Anfangsbedingung

$$X(0) = \text{Id}. \quad (1.11)$$

Beweis: Es bezeichne e_j den j -ten Einheitsvektor im \mathbb{R}^n . Eine einfache Rechnung zeigt, dass eine matrixwertige Funktion $X(t)$ genau dann eine Lösung von (1.10), (1.11) ist, wenn $X(t)e_j$ eine Lösung von (1.6), (1.7) mit $t_0 = 0$ und $x_0 = e_j$ ist. Mit dieser Beobachtung folgt die Behauptung sofort aus Satz 1.4. \square

Das folgende Lemma fasst weitere Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion zusammen.

Lemma 1.6 Für $A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $s, t \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
- (ii) $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$
- (iii) $e^{A_1t}e^{A_2t} = e^{(A_1+A_2)t}$ falls $A_1A_2 = A_2A_1$
- (iv) Für eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$e^{T^{-1}ATt} = T^{-1}e^{At}T.$$

Beweis: (i) Wurde im Beweis von Satz 1.4 gezeigt.

(ii) Mit Hilfe von (i) ergibt sich, dass sowohl $e^{At}e^{As}e^{-As}$ als auch $e^{A(t+s)}e^{-As}$ das Matrix-Anfangswertproblem (1.10), (1.11) erfüllen. Da dessen Lösung nach Korollar 1.5 eindeutig ist und e^{-As} invertierbar ist, folgt die behauptete Gleichheit.

(iii) Unter der angegebenen Bedingung $A_1A_2 = A_2A_1$ rechnet man nach, dass beide Ausdrücke das Matrix-Anfangswertproblem (1.10), (1.11) mit $A = A_1 + A_2$ erfüllen. Also müssen die Ausdrücke wegen der Eindeutigkeit nach Korollar 1.5 übereinstimmen.

(iv) Man rechnet nach, dass beide Ausdrücke das Matrix-Anfangswertproblem (1.10), (1.11) mit $T^{-1}AT$ an Stelle von A erfüllen. Wiederum folgt daraus die Gleichheit wegen der Eindeutigkeit der Lösungen nach Korollar 1.5. \square

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir nun zum linearen Kontrollsystem (1.2) zurück. Zur Formulierung eines Existenz- und Eindeutigkeitsatzes müssen wir einen geeigneten Funktionenraum \mathcal{U} für die Kontrollfunktion $u(\cdot)$ definieren. Sicherlich wären stetige Funktionen geeignet, diese Wahl ist aber zu einschränkend, da wir im Verlauf dieser Vorlesung öfter einmal Kokatationen von Kontrollfunktionen gemäß der folgenden Definition benötigen werden.

Definition 1.7 Für zwei Funktionen $u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $s \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Kokatation zur Zeit s* als

$$u_1 \&_s u_2(t) := \begin{cases} u_1(t), & t < s \\ u_2(t), & t \geq s \end{cases}$$

\square

Selbst wenn u_1 und u_2 stetig sind, wird $u_1 \&_s u_2$ im Allgemeinen nicht stetig sein. Wir benötigen also einen Funktionenraum, der abgeschlossen bezüglich der Kokatation ist. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die einfachste ist die folgende.

Definition 1.8 Eine Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *stückweise stetig*, falls für jedes kompakte Intervall $[t_1, t_2]$ eine endliche Folge von Zeiten $t_1 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = t_2$ existiert, so dass $u|_{(\tau_i, \tau_{i+1})}$ beschränkt und stetig ist für alle $i = 1, \dots, k-1$. Wir definieren \mathcal{U} als den Raum der stückweise stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^m . \square

Sicherlich ist \mathcal{U} abgeschlossen unter Konkatenation, aber auch unter Addition und Multiplikation (wobei wir $(u_1 + u_2)(t) := u_1(t) + u_2(t)$ und $(u_1 \cdot u_2)(t) := u_1(t) \cdot u_2(t)$ definieren). Zudem — und dies ist für unsere Zwecke wichtig — existiert das Riemann-Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) dt$$

über Funktionen $u \in \mathcal{U}$, da es in jedem kompakten Integrationsintervall nur endlich viele Unstetigkeitsstellen gibt.³

Mit diesem Funktionenraum können wir nun das entsprechende Resultat formulieren.

Satz 1.9 Betrachte das lineare Kontrollsystem (1.2)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und gegebenen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Dann gilt: Für jede *Anfangsbedingung* der Form (1.7)

$$x(t_0) = x_0$$

mit $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede stückweise stetige Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ existiert genau eine stetige Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die (1.7) erfüllt und deren Ableitung für jedes t , in dem u stetig ist, existiert und (1.2) erfüllt. Diese eindeutige Funktion nennen wir die Lösung von (1.2), (1.7) und bezeichnen sie mit $x(t; t_0, x_0, u)$. Für diese Lösung gilt

$$x(t; t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \quad (1.12)$$

Beweis: Wir rechnen zunächst nach, dass (1.12) tatsächlich eine Lösung im angegebenen Sinne ist. In den Stetigkeitsetellen von u gilt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \\ &= \frac{d}{dt} e^{A(t-t_0)}x_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \\ &= Ae^{A(t-t_0)}x_0 + \underbrace{e^{A(t-s)}Bu(s)|_{s=t}}_{=Bu(t)} + \int_{t_0}^t Ae^{A(t-s)}Bu(s)ds \\ &= A \left(e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \right) + Bu(t), \end{aligned}$$

³Eine Alternative zu den stückweise stetigen Funktionen bietet der Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen, wobei das Integral dann als das Lebesgue-Integral gewählt wird. Hauptvorteil unseres einfacheren Ansatzes ist die Vermeidung der Lebesgue-Maßtheorie.

also (1.2). Zudem gilt

$$\underbrace{e^{A(t_0-t_0)}}_{=\text{Id}} x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} e^{A(t_0-s)} Bu(s) ds}_{=0} = x_0,$$

also (1.7).

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Dazu betrachten wir zwei beliebige Lösungen $x(t)$, $y(t)$ von (1.2), (1.7) im Sinne des Satzes. Dann gilt zunächst

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = Ax(t) + Bu(t) - Ay(t) - Bu(t) = A(x(t) - y(t)) = Az(t)$$

für alle Punkte in denen u stetig ist. Da z selbst stetig ist, kann \dot{z} in den Unstetigkeitsstellen τ_i von u durch $\dot{z}(\tau_i) = \lim_{t \rightarrow \tau_i} Az(t)$ wohldefiniert stetig fortgesetzt werden. Wir erhalten damit eine Funktion, die die Differentialgleichung $\dot{z}(t) = Az(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ löst. Da zudem

$$z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) = x_0 - x_0 = 0$$

gilt, erfüllt z ein Anfangswertproblem der Form (1.6), (1.7), dessen nach Satz 1.4 eindeutige Lösung durch $z(t) = e^{At}0 = 0$ gegeben ist. Also ist $x(t) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, womit die Eindeutigkeit folgt. \square

Eine Folgerung aus diesem Satz ist das folgende Korollar.

Korollar 1.10 Für die Lösungen von (1.2), (1.7) gelten für alle $t, s \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$x(t; t_0, x_0, u) = x(t; s, x(s; t_0, x_0, u), u)$$

und

$$x(t; t_0, x_0, u) = x(t - s; t_0 - s, x_0, u(s + \cdot)),$$

wobei die Funktion $u(s + \cdot) \in \mathcal{U}$ mittels $u(s + \cdot)(t) = u(s + t)$ definiert ist.

Beweis: Folgt sofort aus der Darstellung (1.12). \square

Bemerkung 1.11 Da wir uns in den folgenden Kapiteln in vielen Fällen auf die Betrachtung von Lösungen mit der speziellen Anfangszeit $t_0 = 0$ beschränken, schreiben wir für $t_0 = 0$ oft kurz $x(t; x_0, u) = x(t; 0, x_0, u)$. \square

Kapitel 2

Kontrollierbarkeit

2.1 Definitionen

Ein wichtiger Aspekt in der Analyse linearer Kontrollsysteme der Form (1.2) ist die Frage der Kontrollierbarkeit. In der allgemeinsten Formulierung ist dies die Frage, für welche Punkte $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ und Zeiten t_1 eine Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ gefunden werden kann, so dass $x(t_1; x_0, u) = x_1$ gilt, d.h., so dass die zwei Punkte durch eine Lösungstrajektorie verbunden werden. Formal definieren wir dies wie folgt.

Definition 2.1 Betrachte ein lineares Kontrollsystem (1.2).

Ein Zustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *kontrollierbar* (oder auch *steuerbar*) zu einem Zustand $x_1 \in \mathbb{R}^n$ zur Zeit $t_1 > 0$, falls ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit

$$x_1 = x(t_1; x_0, u).$$

Der Punkt x_1 heißt dann *erreichbar* von x_0 zur Zeit t_1 . □

Das folgende Lemma zeigt, dass man den Fall beliebiger $x_0 \in \mathbb{R}^n$ auf $x_0 = 0$ zurückführen kann.

Lemma 2.2 Ein Zustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann kontrollierbar zu einem Zustand $x_1 \in \mathbb{R}^n$ zur Zeit $t_1 > 0$, falls der Zustand $\tilde{x}_0 = 0$ kontrollierbar zu dem Zustand $\tilde{x}_1 = x_1 - x(t_1; x_0, 0)$ zur Zeit t_1 ist.

Beweis: Übungsaufgabe.

Diese Tatsache motiviert, im Weiteren die Kontrollierbarkeit bzw. Erreichbarkeit der 0 speziell zu betrachten.

Definition 2.3 Betrachte ein lineares Kontrollsystem (1.2).

(i) Die *Erreichbarkeitsmenge* (*reachable set*) von $x_0 = 0$ zur Zeit $t \geq 0$ ist gegeben durch

$$\mathcal{R}(t) = \{x(t; 0, u) \mid u \in \mathcal{U}\}.$$

(ii) Die *Kontrollierbarkeitsmenge* (*controllable set*) nach $x_1 = 0$ zur Zeit $t \geq 0$ ist gegeben durch

$$\mathcal{C}(t) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \text{es existiert } u \in \mathcal{U} \text{ mit } x(t; x_0, u) = 0\}.$$

□

Die Beziehung zwischen diesen beiden Mengen klärt das folgende Lemma.

Lemma 2.4 Die Erreichbarkeitsmenge $\mathcal{R}(t)$ für (1.2) ist gerade gleich der Kontrollierbarkeitsmenge $\mathcal{C}(t)$ für das zeitumgekehrte System

$$\dot{z}(t) = -Az(t) - Bu(t). \quad (2.1)$$

Beweis: Durch Überprüfen des Anfangswertproblems sieht man, dass zwischen den Lösungen von (1.2) und (2.1) für alle $t, s \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$x(s, 0, u) = z(t - s, x(t, 0, u), u(t - \cdot)).$$

Wenn also $x_1 \in \mathcal{R}(t)$ für (1.2) ist und $x(s, 0, u)$ die zugehörige Lösung, so folgt

$$z(0, x(t, 0, u), u(t - \cdot)) = x(t, 0, u) = x_1 \text{ und } z(t, x(t, 0, u), u(t - \cdot)) = x(0, 0, u) = 0,$$

womit $x_1 \in \mathcal{C}(t)$ folgt. Umgekehrt argumentiert man genauso. □

2.2 Analyse von Kontrollierbarkeitseigenschaften

Wir wollen nun die Struktur dieser Mengen klären. Wir leiten die technischen Zwischenresultate dabei für $\mathcal{R}(t)$ her und formulieren nur die Hauptresultate auch für $\mathcal{C}(t)$.

Lemma 2.5 (i) $\mathcal{R}(t)$ ist für alle $t \geq 0$ ein Untervektorraum des \mathbb{R}^n .

(ii) $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(s)$ für alle $s, t > 0$.

Beweis: (i) Zu zeigen ist, dass für $x_1, x_2 \in \mathcal{R}(t)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\alpha(x_1 + x_2) \in \mathcal{R}(t)$ ist. Für x_1, x_2 in $\mathcal{R}(t)$ existieren Kontrollfunktionen $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ mit

$$x_i = x(t; 0, u_i) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu_i(s) ds.$$

Also gilt für $u = \alpha(u_1 + u_2)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} x(t; 0, u) &= \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds = \int_0^t e^{A(t-s)} B\alpha(u_1(s) + u_2(s)) ds \\ &= \alpha \left(\int_0^t e^{A(t-s)} Bu_1(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu_2(s) ds \right) = \alpha(x_1 + x_2), \end{aligned}$$

woraus $\alpha(x_1 + x_2) \in \mathcal{R}(t)$ folgt. Dies beweist (i).

(ii) Wir geben hier einen direkten Beweis, die Aussage folgt aber unabhängig davon auch aus Satz 2.12.

Wir zeigen zuerst die Hilfsaussage

$$\mathcal{R}(t_1) \subseteq \mathcal{R}(t_2) \quad (2.2)$$

für $0 < t_1 < t_2$: Falls $y \in \mathcal{R}(t_1)$ existiert ein $u \in \mathcal{U}$ mit

$$x(t_1; 0, u) = y.$$

Mit der neuen Kontrolle $\tilde{u} = 0 \&_{t_2-t_1} u(t_1 - t_2 + \cdot)$ und Korollar 1.10 ergibt sich so

$$x(t_2; 0, \tilde{u}) = x(t_2; t_2 - t_1, \underbrace{x(t_2 - t_1; 0, 0)}_{=0}, \tilde{u}) = x(t_2; t_2 - t_1, 0, \tilde{u}) = x(t_1; 0, u) = y,$$

weswegen $y \in \mathcal{R}(t_2)$ gilt.

Als nächstes zeigen wir, dass für beliebige $0 < t_1 < t_2$ aus der Gleichheit $\mathcal{R}(t_1) = \mathcal{R}(t_2)$ bereits die Gleichheit $\mathcal{R}(t_1) = \mathcal{R}(t)$ für alle $t \geq t_1$ folgt. Um dies zu zeigen sei $x \in \mathcal{R}(2t_2 - t_1)$, es existiere also ein $u \in \mathcal{U}$ mit $x = x(2t_2 - t_1, 0, u)$.

Da $x(t_2, 0, u) \in \mathcal{R}(t_2)$ und $\mathcal{R}(t_2) = \mathcal{R}(t_1)$, existiert ein $v \in \mathcal{U}$ mit $x(t_1, 0, v) = x(t_2, 0, u)$. Definieren wir nun eine Kontrollfunktion $w = v \&_{t_1} u(t_2 - t_1 + \cdot)$, so gilt mit Korollar 1.10

$$\begin{aligned} x(t_2, 0, w) &= x(t_2, t_1, \underbrace{x(t_1, 0, v)}_{=x(t_2, 0, u)}, w) \\ &= x(t_2 + t_2 - t_1, t_1 + t_2 - t_1, x(t_2, 0, u), \underbrace{w(t_1 - t_2 + \cdot)}_{=u(\cdot)}) \\ &= x(2t_2 - t_1, 0, u) = x. \end{aligned}$$

Damit gilt also $x \in \mathcal{R}(t_2)$ und folglich $\mathcal{R}(t_1) = \mathcal{R}(t_2) = \mathcal{R}(2t_2 - t_1) = \mathcal{R}(2(t_2 - t_1) + t_1)$. Induktive Wiederholung dieser Konstruktion liefert $\mathcal{R}(t_1) = \mathcal{R}(2^k(t_2 - t_1) + t_1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit wegen (2.2) die Behauptung $\mathcal{R}(t_1) = \mathcal{R}(t)$ für alle $t \geq t_1$.

Nun zeigen wir die Behauptung (ii): Sei dazu $s > 0$ beliebig und sei $0 < s_0 < \dots < s_{n+1} = s$ eine aufsteigende Folge von Zeiten. Dann ist $\mathcal{R}(s_0), \dots, \mathcal{R}(s_{n+1})$ nach (2.2) eine aufsteigende Folge von $n + 2$ Unterräumen des \mathbb{R}^n . Aus $\mathcal{R}(s_{k+1}) \neq \mathcal{R}(s_k)$ folgt daher $\dim \mathcal{R}(s_{k+1}) \geq \dim \mathcal{R}(s_k) + 1$. Wären also die $\mathcal{R}(s_k)$ paarweise verschieden, so müsste $\dim \mathcal{R}(s_{n+1}) \geq n + 1$ gelten, was ein Widerspruch zu $\mathcal{R}(s_{n+1}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, weswegen mindestens zwei der $\mathcal{R}(s_k)$ übereinstimmen müssen. Nach der vorhergehenden Überlegung folgt daraus $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(s)$ für alle $t \geq s$ und da $s > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.6 Da die Menge $\mathcal{R}(t)$ also nicht von t abhängt, schreiben wir im Folgenden oft einfach \mathcal{R} . \square

Bemerkung 2.7 Die Verbindung von Lemma 2.2 und Lemma 2.5 zeigt also, dass die Menge der von einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^n$ in einer Zeit $t > 0$ erreichbaren Zustände der affine Unterraum

$$x(t; x_0, 0) + \mathcal{R}$$

ist, dessen Dimension gerade gleich der von \mathcal{R} ist. Beachte, dass diese Menge i.A. nicht unabhängig von t ist, es sei denn dass $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ gilt, da dann auch $x(t; x_0, 0) + \mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ gilt. In diesem Fall ist jeder Zustand x_0 zu jedem anderen Zustand x_1 kontrollierbar, weswegen wir das System für $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ *vollständig kontrollierbar* nennen. \square

Wie auf dem zweiten Übungsblatt zu sehen war, kann es bereits für recht einfache Kontrollsysteme ziemlich schwierig sein, die Mengen \mathcal{R} und \mathcal{C} direkt auszurechnen. Wir wollen daher jetzt eine einfache Charakterisierung dieser Mengen herleiten. Hierzu benötigen wir etwas lineare Algebra.

Definition 2.8 (i) Ein Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt A -invariant für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, falls $Av \in U$ für alle $v \in U$ (oder kurz $AU \subseteq U$) gilt.

(ii) Für einen Unterraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichne

$$\langle A | V \rangle$$

den kleinsten A -invarianten Unterraum von \mathbb{R}^n , der V enthält. \square

Beachte, dass $\langle A | V \rangle$ existiert: Einerseits existiert mit dem \mathbb{R}^n selbst ein A -invarianter Unterraum, der V enthält. Andererseits ist der Schnitt zweier A -invarianter Unterräume, die V enthalten, wieder ein A -invarianter Unterraum, der V enthält.

Lemma 2.9 Für einen Unterraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\langle A | V \rangle = V + AV + \dots + A^{n-1}V.$$

Beweis: “ \supseteq ”: Wegen der A -Invarianz von $\langle A | V \rangle$ und $V \subseteq \langle A | V \rangle$ gilt

$$A^k V \subseteq \langle A | V \rangle$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und damit $\langle A | V \rangle \supseteq V + AV + \dots + A^{n-1}V$.

“ \subseteq ”: Es genügt zu zeigen, dass $V + AV + \dots + A^{n-1}V$ A -invariant ist, da dann wegen $V \subseteq V + AV + \dots + A^{n-1}V$ sofort $\langle A | V \rangle \subseteq V + AV + \dots + A^{n-1}V$ folgt.

Zum Beweis der A -Invarianz betrachte das charakteristische Polynom von A

$$\chi_A(z) = \det(z\text{Id} - A) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0.$$

Für dieses gilt nach dem Satz von Cayley-Hamilton

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0\text{Id} = 0,$$

woraus

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0\text{Id}$$

folgt. Sei also $v \in V + AV + \dots + A^{n-1}V$. Dann lässt sich v darstellen als $v = v_0 + Av_1 + \dots + A^{n-1}v_{n-1}$ für $v_0, \dots, v_{n-1} \in V$. Damit folgt

$$\begin{aligned} Av &= Av_0 + A^2v_1 + \dots + A^n v_{n-1} \\ &= Av_0 + A^2v_1 - a_{n-1}A^{n-1}v_{n-1} - \dots - a_1Av_{n-1} - a_0v_{n-1} \\ &= \tilde{v}_0 + A\tilde{v}_1 + \dots + A^{n-1}\tilde{v}_{n-1} \end{aligned}$$

für geeignete $\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_{n-1} \in V$. Damit folgt $Av \in V + AV + \dots + A^{n-1}V$, also die A -Invarianz. \square

Wir werden nun den Spezialfall betrachten, dass $V = \text{im } B$ das Bild der Matrix B ist. In diesem Fall sagt Lemma 2.9, dass

$$\langle A \mid \text{im } B \rangle = \{Bx_0 + ABx_1 + \dots + A^{n-1}x_{n-1} \mid x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^m\} = \text{im}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B),$$

wobei $(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) \in \mathbb{R}^{n \times (m \cdot n)}$ ist.

Definition 2.10 Die Matrix $(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) \in \mathbb{R}^{n \times (m \cdot n)}$ heißt *Erreichbarkeitsmatrix* des Systems (1.2). \square

Im Folgenden verwenden wir für $t \in \mathbb{R}$ die Notation

$$W_t := \int_0^t e^{A\tau} B B^T (e^{A\tau})^T d\tau.$$

Beachte, dass $W_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt und W_t damit ein linearer Operator auf dem \mathbb{R}^n ist. W_t ist symmetrisch und positiv semidefinit, denn es gilt

$$x^T W_t x = \int_0^t \underbrace{x^T e^{A\tau} B B^T (e^{A\tau})^T x}_{=\|B^T (e^{A\tau})^T x\|^2} d\tau \geq 0.$$

Für das Bild im W_t dieses Operators gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.11 Für alle $t > 0$ gilt $\langle A \mid \text{im } B \rangle = \text{im } W_t$.

Beweis: Wir zeigen $\langle A \mid \text{im } B \rangle^\perp = (\text{im } W_t)^\perp$.

“ \subseteq ”: Sei $x \in \langle A \mid \text{im } B \rangle^\perp$, also $x^T A^k B = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$x^T e^{At} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k x^T A^k B}{k!} = 0$$

und damit $x^T W_t = 0$, also $x \in (\text{im } W_t)^\perp$.

“ \supseteq ”: Sei $x \in (\text{im } W_t)^\perp$ für ein $t > 0$. Dann gilt

$$0 = x^T W_t x = \int_0^t \|B^T(e^{A\tau})^T x\|^2 d\tau,$$

woraus wegen der Stetigkeit des Integranden $x^T e^{A\tau} B = (B^T(e^{A\tau})^T x)^T = 0$ folgt.

Sukzessives Differenzieren von $x^T B e^{A\tau}$ nach τ liefert

$$x^T A^k e^{A\tau} B = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für $\tau = 0$ folgt $x^T A^k B = 0$, also $x \in (\text{im } A^k B)^\perp$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und damit auch $x \in [\text{im } (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)]^\perp = \langle A \mid \text{im } B \rangle^\perp$. \square

Der folgende Satz ist das Hauptresultat über die Struktur der Erreichbarkeits- und Kontrollierbarkeitsmengen.

Satz 2.12 Für das System (1.2) gilt für alle $t > 0$

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{C}(t) = \langle A \mid \text{im } B \rangle = \text{im } (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B).$$

Beweis: Die Gleichheit $\langle A \mid \text{im } B \rangle = \text{im } (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ wurde bereits in der Rechnung vor Definition 2.10 gezeigt. Wir zeigen $\mathcal{R}(t) = \langle A \mid \text{im } B \rangle$ (woraus insbesondere wiederum die Unabhängigkeit von $\mathcal{R}(t)$ von t folgt). Die Aussage für $\mathcal{C}(t)$ folgt dann mit Lemma 2.4, denn es gilt $\langle A \mid \text{im } B \rangle = \langle -A \mid \text{im } -B \rangle$.

“ \subseteq ”: Sei $x = x(t; 0, u) \in \mathcal{R}(t)$. Nach der allgemeinen Lösungsformel ist

$$x = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Nun gilt für all $\tau \in [0, t]$ nach Definition von $\langle A \mid \text{im } B \rangle$

$$e^{A(t-\tau)} B u(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^k}{k!} A^k B u(\tau) \in \langle A \mid \text{im } B \rangle$$

und damit auch $x \in \langle A \mid \text{im } B \rangle$, da die Integration über Elemente eines Unterraums wieder ein Element dieses Unterraums ergibt.

“ \supseteq ”: Sei $x \in \langle A \mid \text{im } B \rangle$ und $t > 0$ beliebig. Dann existiert nach Lemma 2.11 ein ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $x = W_t z$. Definieren wir nun $u \in \mathcal{U}$ durch $u(\tau) := B^T(e^{A(t-\tau)})^T z$ für $\tau \in [0, t]$, so gilt

$$x(t; 0, u) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T(e^{A(t-\tau)})^T z d\tau = W_t z = x,$$

und damit $x \in \mathcal{R}(t)$. \square

Korollar 2.13 (Kalman-Kriterium)

Das System (1.2) ist genau dann vollständig kontrollierbar, wenn

$$\text{rg}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n$$

ist. In diesem Fall nennen wir das Matrizenpaar (A, B) *kontrollierbar*.

Wenn (A, B) nicht kontrollierbar ist, kann man den Zustandsraum \mathbb{R}^n wie folgt aufteilen, um das Paar (A, B) in seinen kontrollierbaren und unkontrollierbaren Anteil zu zerlegen.

Lemma 2.14 Sei (A, B) nicht kontrollierbar, d.h., $r := \dim\langle A \mid \text{im } B \rangle < n$. Dann existiert ein invertierbares $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $\tilde{A} = T^{-1}AT$ und $\tilde{B} = T^{-1}B$ die Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ besitzen, wobei das Paar (A_1, B_1) kontrollierbar ist. Insbesondere hat das System nach Koordinatentransformation mit T also die Form

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A_1 z_1(t) + A_2 z_2(t) + B_1 u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= A_3 z_2(t) \end{aligned}$$

mit $z_1(t) \in \mathbb{R}^r$ und $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$.

Beweis: Übungsaufgabe.

Beachte, dass sich das charakteristische Polynom einer Matrix bei Koordinatentransformationen nicht verändert. Es gilt also

$$\chi_A(z) = \det(z\text{Id} - A) = \det(z\text{Id} - \tilde{A}) = \det(z\text{Id} - A_1) \cdot \det(z\text{Id} - A_3) = \chi_{A_1}(z) \cdot \chi_{A_3}(z).$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 2.15 Wir nennen χ_{A_1} den *kontrollierbaren* und χ_{A_3} den *unkontrollierbaren Anteil* des charakteristischen Polynoms χ_A . \square

Der folgende Satz liefert alternative Definitionen der Kontrollierbarkeit, die ohne die Berechnung der Kontrollierbarkeitsmatrix auskommen. Hierbei bezeichnet $(\lambda\text{Id} - A \mid B) \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ die Matrix, die durch Nebeneinanderschreiben der Matrizen $\lambda\text{Id} - A$ und B entsteht.

Satz 2.16 (Hautus-Kriterium)

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (i) (A, B) ist kontrollierbar
- (ii) $\text{rg}(\lambda\text{Id} - A \mid B) = n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$
- (iii) $\text{rg}(\lambda\text{Id} - A \mid B) = n$ für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A

Beweis: Wir beweisen zuerst “(ii) \Leftrightarrow (iii)” und dann “(i) \Leftrightarrow (ii)”.

“(ii) \Rightarrow (iii)”: klar

“(ii) \Leftarrow (iii)”: Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von A . Dann gilt $\det(\lambda\text{Id} - A) \neq 0$, woraus $\text{rg}(\lambda\text{Id} - A) = n$ folgt. Hieraus folgt (ii) wegen $\text{rg}(\lambda\text{Id} - A \mid B) \geq \text{rg}(\lambda\text{Id} - A)$.

“(i) \Leftrightarrow (ii)”: Wir beweisen dies mit Kontraposition, zeigen also “nicht (i) \Leftrightarrow nicht (ii)”.

“nicht (i) \Leftarrow nicht (ii)”: Wenn (ii) nicht gilt, existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{rg}(\lambda \text{Id} - A | B) < n$. Also existiert ein $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ mit $p^T(\lambda \text{Id} - A | B) = 0$, also

$$p^T A = \lambda p^T \text{ und } p^T B = 0.$$

Aus der ersten Gleichheit folgt $p^T A^k = \lambda^k p^T$ und damit insgesamt

$$p^T A^k B = \lambda^k p^T B = 0$$

für $k = 0, \dots, n-1$. Also gilt $p^T(B A B \dots A^{n-1} B) = 0$, womit $\text{rg}(B A B \dots A^{n-1} B) < n$ ist. Also ist (A, B) nicht kontrollierbar.

“nicht (i) \Rightarrow nicht (ii)”: Wenn (A, B) nicht kontrollierbar ist, existiert die Zerlegung

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1} B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gemäß Lemma 2.14 mit Koordinatentransformationsmatrix T .

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A_3^T zum Eigenvektor v . Dann gilt $v^T(\lambda \text{Id} - A_3) = 0$. Damit gilt für $w^T = (0, v^T)$

$$w^T(\lambda \text{Id} - \tilde{A}) = \begin{pmatrix} 0^T(\lambda \text{Id} - A_1) & 0^T(-A_2) \\ v^T 0 & v^T(\lambda \text{Id} - A_3) \end{pmatrix} = 0 \text{ und } w^T \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0^T(B_1) \\ v^T 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Mit $p^T = w^T T^{-1} \neq 0$ folgt dann

$$p^T(\lambda \text{Id} - A | B) = w^T T^{-1}(\lambda \text{Id} - A | B) = (w^T(\lambda \text{Id} - \tilde{A}) T^{-1} | w^T \tilde{B}) = 0,$$

weswegen (ii) nicht gilt. □

Kapitel 3

Stabilität und Stabilisierung

In diesem Kapitel werden wir uns mit dem Problem der Stabilisierung linearer Kontrollsysteme beschäftigen. Bevor wir dieses Problem angehen, müssen wir zunächst klären, was wir unter Stabilität verstehen.

3.1 Definitionen

In diesem und den folgenden zwei Abschnitten werden wir wichtige Resultate der Stabilitätstheorie linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen (1.6)

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

introduzieren. Die Darstellung wird dabei relativ knapp gehalten; für eine ausführlichere Behandlung dieses Themas siehe z.B. das Skript “Stabilität und Stabilisierung linearer Systeme” [7]. Wir beschränken uns hier auf die Stabilität von Gleichgewichten.

Definition 3.1 Ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt *Gleichgewicht* (auch *Ruhelage* oder *Equilibrium*) einer gewöhnlichen Differentialgleichung, falls für die zugehörige Lösung

$$x(t; x^*) = x^* \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. □

Gleichgewichte haben wir bereits ohne formale Definition im einführenden Kapitel betrachtet. Man rechnet leicht nach, dass ein Punkt x^* genau dann ein Gleichgewicht einer allgemeinen zeitinvarianten Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ist, wenn $f(x^*) = 0$ ist. Für die lineare Differentialgleichung (1.6) ist daher der Punkt $x^* = 0$ immer ein Gleichgewicht. Dieses Gleichgewicht $x^* = 0$ wollen wir in der folgenden Analyse näher betrachten.

Definition 3.2 Sei $x^* = 0$ das Gleichgewicht der linearen Differentialgleichung (1.6).

(i) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ heißt *stabil*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Ungleichung

$$\|x(t; x_0)\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0$$

für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\| \leq \delta$ erfüllt ist.

(ii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ heißt *lokal asymptotisch stabil*, falls es stabil ist und darüberhinaus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = 0$$

gilt für alle Anfangswerte x_0 aus einer offenen Umgebung U von $x^* = 0$.

(iii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ heißt *global asymptotisch stabil*, falls (ii) mit $U = \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

(iv) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ heißt *lokal* bzw. *global exponentiell stabil*, falls Konstanten $c, \sigma > 0$ existieren, so dass die Ungleichung

$$\|x(t; x_0)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0\| \text{ für alle } t \geq 0$$

für alle x_0 aus einer Umgebung U von $x^* = 0$ (mit $U = \mathbb{R}^n$ im globalen Fall) erfüllt ist. \square

Bemerkung 3.3 Die Stabilität aus (i) wird auch „Stabilität im Sinne von Ljapunov“ genannt, da dieses Konzept Ende des 19. Jahrhunderts vom russischen Mathematiker Alexander M. Ljapunov eingeführt wurde. Beachte, dass aus den Definitionen die Implikationen

$$(\text{lokal/global}) \text{ exponentiell stabil} \Rightarrow (\text{lokal/global}) \text{ asymptotisch stabil} \Rightarrow \text{stabil}$$

folgen. Die zweite Implikation ergibt sich direkt aus der Definition. Dass aus exponentieller Stabilität die asymptotische Stabilität folgt, sieht man folgendermaßen:

Für ein gegebenes ε folgt (i) mit $\delta = \varepsilon/c$, denn damit gilt für $\|x_0\| \leq \delta$ die Ungleichung $\|x(t; x_0)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0\| \leq c \|x_0\| \leq \varepsilon$. Die in (ii) geforderte Konvergenz ist offensichtlich. \square

3.2 Eigenwertkriterien

Der folgende Satz gibt ein Kriterium an die Matrix A , mit dem man Stabilität leicht überprüfen kann.

Satz 3.4 Betrachte die lineare zeitinvariante Differentialgleichung (1.6) für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$, $\lambda_l = a_l + ib_l$, die Eigenwerte der Matrix A , die hier so angeordnet seien, dass jedem Eigenwert λ_l ein Jordan-Block J_l in der Jordan'schen Normalform entspricht. Dann gilt:

(i) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte λ_l nichtpositiven Realteil $a_l \leq 0$ besitzen und für alle Eigenwerte mit Realteil $a_l = 0$ der entsprechende Jordan-Block J_l eindimensional ist.

(ii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist lokal asymptotisch stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte λ_l negativen Realteil $a_l < 0$ besitzen.

Beweisskizze: Zunächst überlegt man sich, dass alle Stabilitätseigenschaften unter linearen Koordinatentransformationen mit invertierbarer Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erhalten bleiben, da die Lösungen $y(t; y_0)$ des transformierten Systems mittels

$$y(t; y_0) = T^{-1}x(t; Ty_0)$$

ineinander umgerechnet werden können.

Es reicht also, die Stabilitätseigenschaften für die Jordan'sche Normalform

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_d \end{pmatrix}$$

mit den Jordan-Blöcken der Form

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_l & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$j = 1, \dots, d$, der Matrix A zu beweisen. Wir bezeichnen die zu $\dot{x}(t) = Jx(t)$ gehörigen Lösungen wiederum mit $x(t; x_0)$.

Aus den Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion folgt nun, dass die allgemeine Lösung

$$x(t; x_0) = e^{Jt}x_0$$

für J die Form

$$x(t; x_0) = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{J_d t} \end{pmatrix} x_0$$

besitzt. Weiter rechnet man nach, dass

$$e^{J_l t} = e^{\lambda_l t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, wobei $e^{\lambda_l t}$ die (übliche) skalare Exponentialfunktion ist, für die

$$|e^{\lambda_l t}| = e^{a_l t} \begin{cases} \rightarrow 0, & a_l < 0 \\ \equiv 1, & a_l = 0 \\ \rightarrow \infty, & a_l > 0 \end{cases}$$

für $t \rightarrow \infty$ gilt.

Die Einträge von e^{Jt} sind also genau dann beschränkt, wenn die Bedingung aus (i) erfüllt ist. Weil zudem für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $c > 0$ existiert mit

$$e^{a_l t} t^k \leq c e^{(a_l + \varepsilon)t}, \quad (3.2)$$

konvergieren die Einträge von e^{Jt} genau dann gegen 0, wenn (ii) erfüllt ist.

Dieses Verhalten der Matrix-Einträge überträgt sich bei der Matrix-Vektor-Multiplikation $e^{Jt}x_0$ auf die Lösungen, weswegen es äquivalent zur Stabilität bzw. asymptotischen Stabilität ist. \square

Der Beweis von (iii) zeigt tatsächlich globale exponentielle Stabilität, da die Einträge in (3.2) exponentiell gegen 0 konvergieren. Die Konsequenz dieser Tatsache formulieren wir explizit in dem folgenden Satz.

Satz 3.5 Betrachte die lineare zeitinvariante Differentialgleichung (1.6) für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$, $\lambda_l = a_l + ib_l$, die Eigenwerte der Matrix A . Dann sind die folgenden drei Eigenschaften äquivalent.

(i) Alle Eigenwerte λ_l besitzen negativen Realteil $a_l < 0$.

(ii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist lokal asymptotisch stabil.

(iii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist global exponentiell stabil, wobei die Konstante $\sigma > 0$ aus Definition 3.2(iv) beliebig aus dem Intervall $(0, -\max_{l=1, \dots, d} a_l)$ gewählt werden kann.

(iv) Die Norm der Matrix-Exponentialfunktion erfüllt $\|e^{At}\| \leq c e^{-\sigma t}$ für σ aus (iii) und eine von σ abhängige Konstante $c > 0$.

Beweis: (iii) \Rightarrow (ii) folgt mit Bemerkung 3.3, (ii) \Rightarrow (i) folgt aus Satz 3.4(iii) und (i) \Rightarrow (iii) wurde im Beweis von Satz 3.4(iii) gezeigt. Schließlich folgt (iii) \Leftrightarrow (iv) sofort aus der Definition der induzierten Matrix-Norm (und gilt dann für alle Normen auf $\mathbb{R}^{n \times n}$, weil diese äquivalent sind). \square

Beispiel 3.6 Wir betrachten das Pendelmodell aus Kapitel 1 für $u \equiv 0$ und ohne Berücksichtigung der Bewegung des Wagens. Die Linearisierung im unteren (= herunterhängenden) Gleichgewicht liefert

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -k \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2}k \pm \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4g}.$$

Hierbei ist $\sqrt{k^2 - 4g}$ entweder komplex oder $< k$, weswegen man in jedem Fall $\operatorname{Re}\lambda_{1/2} < 0$ und damit exponentielle Stabilität erhält.

Die Linearisierung im oberen (= aufgerichteten) Gleichgewicht lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & -k \end{pmatrix}$$

liefert. Hier erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2}k \pm \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + 4g},$$

deren größerer wegen $\sqrt{k^2 + 4g} > k$ immer positiv ist. Man erhält also keine Stabilität. \square

3.3 Ljapunov Funktionen

In diesem Kapitel werden wir ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung asymptotisch stabiler Differentialgleichungen behandeln, nämlich die sogenannten Ljapunov Funktionen. Asymptotische (und auch exponentielle Stabilität) verlangen nur, dass die Norm $\|x(t)\|$ einer Lösung für $t \rightarrow \infty$ abnimmt. Für viele Anwendungen wäre es aber viel einfacher, wenn die Norm streng monoton in t fallen würde. Dies ist natürlich im Allgemeinen nicht zu erwarten. Wir können die strenge Monotonie aber erhalten, wenn wir die euklidische Norm $\|x(t)\|$ durch eine allgemeinere Funktion, nämlich gerade die Ljapunov Funktion, ersetzen.

Für lineare Systeme können wir uns auf sogenannte quadratische Ljapunov Funktionen beschränken, wie sie durch die folgende Definition gegeben sind.

Definition 3.7 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt (*quadratische*) *Ljapunov Funktion* für A , falls positive reelle Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$ existieren, so dass die Ungleichungen

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2$$

und

$$DV(x) \cdot Ax \leq -c_3\|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelten. \square

Der folgende Satz zeigt, dass die Existenz einer Ljapunov Funktion exponentielle Stabilität der zugehörigen Differentialgleichung impliziert.

Satz 3.8 Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und $x(t; x_0)$ die Lösungen des zugehörigen linearen Anfangswertproblems (1.6), (1.7). Dann gilt: Falls eine quadratische Ljapunov Funktion mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$ existiert, so erfüllen alle Lösungen die Abschätzung

$$\|x(t; x_0)\| \leq ce^{-\sigma t}\|x_0\|$$

für $\sigma = c_3/2c_2$ und $c = \sqrt{c_2/c_1}$, d.h. die Matrix A ist exponentiell stabil.

Beweis: Aus der Ableitungsbedingung für $x = x(\tau, x_0)$ folgt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} V(x(t; x_0)) = DV(x(\tau; x_0)) \cdot \dot{x}(\tau; x_0) = DV(x(\tau; x_0)) \cdot Ax(\tau; x_0) \leq -c_3\|x(\tau; x_0)\|^2$$

Wegen $-\|x\|^2 \leq -V(x)/c_2$ folgt damit für $\lambda = c_3/c_2$ die Ungleichung

$$\frac{d}{dt}V(x(t; x_0)) \leq -\lambda V(x(t; x_0)).$$

Aus dieser Differentialungleichung folgt die Ungleichung

$$V(x(t; x_0)) \leq e^{-\lambda t}V(x_0),$$

(einen Beweis dafür betrachten wir später im Beweis von Satz 9.10). Mit den Abschätzungen für $V(x)$ erhalten wir daraus

$$\|x(t; x_0)\|^2 \leq \frac{1}{c_1}e^{-\lambda t}V(x_0) \leq \frac{c_2}{c_1}e^{-\lambda t}\|x_0\|^2$$

und damit durch Ziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten die Ungleichung

$$\|x(t; x_0)\| \leq ce^{-\sigma t}\|x_0\|$$

für $c = \sqrt{c_2/c_1}$ und $\sigma = \lambda/2$. □

Wir wollen uns nun mit einer speziellen Klasse von Ljapunov Funktionen beschäftigen, bei denen V durch eine Bilinearform der Form $x^T Px$ dargestellt wird, wobei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Wir erinnern daran, dass eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *positiv definit* heißt, falls $x^T Px > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Das folgende Lemma fasst zwei Eigenschaften bilinearer Abbildungen zusammen.

Lemma 3.9 Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt: (i) Es existiert eine Konstante $c_2 > 0$, so dass

$$-c_2\|x\|^2 \leq x^T Px \leq c_2\|x\|^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) P ist positiv definit genau dann, wenn eine Konstante $c_1 > 0$ existiert mit

$$c_1\|x\|^2 \leq x^T Px \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Aus der Bilinearität folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ und $y = x/\|x\|$ die Gleichung

$$x^T Px = \|x\|^2 y^T Py. \tag{3.3}$$

Da $y^T Py$ eine stetige Abbildung in $y \in \mathbb{R}^n$ ist, nimmt sie auf der kompakten Menge $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$ ein Maximum c_{\max} und ein Minimum c_{\min} an.

(i) Die Ungleichung (i) folgt nun aus (3.3) mit $c_2 = \max\{c_{\max}, -c_{\min}\}$.

(ii) Falls P positiv definit ist, ist $c_{\min} > 0$, und (ii) folgt mit $c_1 = c_{\min}$. Andererseits folgt die positive Definitheit von P sofort aus (ii), also erhalten wir die behauptete Äquivalenz. □

Hiermit erhalten wir die folgende Aussage.

Lemma 3.10 Seien $A, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $c_3 > 0$ so, dass die Funktion $V(x) = x^T P x$ die Ungleichung

$$DV(x) \cdot Ax \leq -c_3 \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Dann gilt: P ist genau dann positiv definit ist, wenn A exponentiell stabil ist. In diesem Fall ist V eine quadratische Ljapunov Funktion.

Beweis: Falls P positiv definit ist, folgt aus Lemma 3.9(ii) sofort, dass V eine quadratische Ljapunov Funktion ist, womit A exponentiell stabil ist.

Falls P nicht positiv definit ist, gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \neq 0$ und $V(x_0) \leq 0$. Weil sich verschiedene Lösungen der Differentialgleichung nicht schneiden können, kann die Lösung $x(t; x_0)$ mit $x_0 \neq 0$ niemals 0 werden kann. Daher folgt aus der Ableitungsbedingung, dass $V(x(t; x_0))$ für alle $t \geq 0$ streng monoton fällt. Insbesondere gibt es also ein $c > 0$, so dass $V(x(t; x_0)) \leq -c$ für alle $t \geq 1$. Mit der ersten Abschätzung aus Lemma 3.9(i) folgt dann

$$\|x(t; x_0)\|^2 \geq c/c_2 > 0 \text{ für alle } t \geq 1.$$

Also konvergiert $x(t; x_0)$ nicht gegen den Nullpunkt, weswegen A nicht exponentiell stabil ist. \square

Wir können das Ableitungskriterium vereinfachen, indem wir die bilineare Form der Ljapunov Funktion ausnutzen.

Lemma 3.11 Für eine bilineare Ljapunov Funktion $V(x) = x^T P x$ sind äquivalent:

- (i) $DV(x) \cdot Ax \leq -c_3 \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $c_3 > 0$
- (ii) Die Matrix $C = -A^T P - P A$ ist positiv definit.

Beweis: Wegen $x^T P x = (P^T x)^T x$ gilt nach Produktregel

$$DV(x) \cdot Ax = (P^T Ax)^T x + (P^T x)^T Ax = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + P A) x = -x^T C x.$$

Bedingung (i) ist also äquivalent zu

$$x^T C x \geq c_3 \|x\|^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen Lemma 3.9 (ii) ist diese Bedingung genau dann für ein $c_3 > 0$ erfüllt, wenn C positiv definit ist. \square

Die Gleichung in Lemma 3.11 (iii) wird auch *Ljapunov Gleichung* genannt. Es liegt nun nahe, diese Gleichung zur Konstruktion von Ljapunov Funktionen zu verwenden. Die Frage ist, wann kann man zu einer gegebenen Matrix A und einer gegebenen positiv definiten Matrix C eine Matrix P finden, so dass $A^T P + P A = -C$ gilt? Das folgende Lemma beantwortet diese Frage.

Lemma 3.12 Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine positiv definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die Ljapunov Gleichung

$$A^T P + P A = -C \tag{3.4}$$

genau dann eine (sogar eindeutige) positiv definite Lösung $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wenn A exponentiell stabil ist, d.h., falls die Realteile aller Eigenwerte λ_i von A negativ sind.

Beweis: Falls eine positiv definite Lösung P von (3.4) existiert, ist die Funktion $V(x) = x^T P x$ wegen den Lemmas 3.11 und 3.10 eine quadratische Lyapunov Funktion, womit A exponentiell stabil ist.

Sei umgekehrt A exponentiell stabil und C positiv definit. Wir zeigen zunächst, dass (3.4) lösbar ist. O.B.d.A. können wir annehmen, dass A in Jordan'scher Normalform vorliegt, denn für $\tilde{A} = T A T^{-1}$ sieht man leicht, dass P (3.4) genau dann löst, wenn $\tilde{P} = (T^{-1})^T P T^{-1}$ die Gleichung

$$\tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} = -(T^{-1})^T C T^{-1}$$

löst. Wir können also annehmen, dass A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ist, wobei die α_i gerade Eigenwerte von A sind und die β_i entweder 0 oder 1 sind. Schreibt man die Spalten von P untereinander in einen Spaltenvektor $p \in \mathbb{R}^{n^2}$, und macht das gleiche für die Matrix C und einen Vektor c , so ist (3.4) äquivalent zu einem Gleichungssystem

$$\bar{A} p = -c,$$

mit einer geeigneten Matrix $\bar{A} \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$. Falls A in der Form (3.5) ist, sieht man durch Nachrechnen der Koeffizienten, dass \bar{A} eine untere Dreiecksmatrix ist, d.h.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \bar{\alpha}_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bar{\alpha}_{n^2-1} & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & \bar{\alpha}_{n^2} \end{pmatrix},$$

wobei $*$ beliebige Werte bezeichnet, und die $\bar{\alpha}_i$ von der Form $\bar{\alpha}_i = \lambda_j + \lambda_k$ für Eigenwerte der Matrix A sind. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass

- (i) bei einer Dreiecksmatrix die Elemente auf der Diagonalen gerade die Eigenwerte sind
- (ii) eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn alle Eigenwerte ungleich Null sind.

Da alle λ_i negativen Realteil haben, sind die $\bar{\alpha}_i$ alle ungleich Null, also ist die Matrix \bar{A} wegen (i) und (ii) invertierbar. Demnach gibt es genau eine Lösung des Gleichungssystems $\bar{A} p = c$ und damit genau eine Lösung B der Ljapunov Gleichung (3.4).

Es bleibt zu zeigen, dass diese Lösung P positiv definit ist. Wegen Lemma 3.11 erfüllt P alle Voraussetzungen von Lemma 3.10. Da A exponentiell stabil ist, muss P also nach Lemma 3.10 positiv definit sein. \square

Der folgende Satz fasst das Hauptresultat dieses Kapitels zusammen.

Satz 3.13 Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: Eine quadratische Ljapunov Funktion für die lineare Differentialgleichung (1.6) existiert genau dann, wenn die Matrix A exponentiell stabil ist.

Beweis: Sei eine quadratische Ljapunov Funktion V gegeben. Dann ist A nach Satz 3.8 exponentiell stabil.

Sei A umgekehrt exponentiell stabil. Dann existiert nach Lemma 3.12 eine positiv definite Matrix P , die die Ljapunov Gleichung (3.4) für eine positiv definite Matrix C löst. Wegen Lemma 3.11 und Lemma 3.10 ist $V(x) = x^T P x$ dann eine quadratische Ljapunov Funktion. \square

Die Existenz einer quadratischen Ljapunov Funktion ist also eine notwendige und hinreichende Bedingung für die exponentielle Stabilität von A und liefert damit eine Charakterisierung, die äquivalent zu der Eigenwertbedingung aus Satz 3.5 ist.

Beispiel 3.14 Für das im unteren Gleichgewicht linearisierte Pendelmodell mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -k \end{pmatrix}$$

ist die bilineare Ljapunov Funktion zu $C = \text{Id}$ gegeben durch die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{k^2 + g^2 + g}{2gk} & \frac{1}{2g} \\ \frac{1}{2g} & \frac{g+1}{2gk} \end{pmatrix}.$$

\square

3.4 Das Stabilisierungsproblem für lineare Kontrollsysteme

Wir haben nun das technische Werkzeug, um uns wieder den linearen Kontrollsystemen zu widmen. In Aufgabe 2 des 4. Übungsblatt haben wir gesehen, dass die Vorausberechnung einer Kontrollfunktion $u(t)$ auf großen Zeithorizonten i.A. nicht funktioniert, um ein System in einen gegebenen Punkt (o.B.d.A. 0) zu steuern und dort zu halten – selbst die geringen Fehler einer genauen numerischen Simulation reichten dort aus, um die Lösung weit von dem gewünschten Punkt zu entfernen.

Wir machen daher nun einen anderen Ansatz. Statt die Kontrolle als Steuerung – abhängig von t – anzusetzen, wählen wir nun eine Regelung, in der wir die Kontrollfunktion in jedem Zeitpunkt zustandsabhängig als $u(t) = F(x(t))$ für eine zu bestimmende Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ansetzen. Eine solche Funktion, die jedem Zustand einen Kontrollwert zuordnet, nennt man *Feedback* (auch Zustandsfeedback oder (Zustands-)Rückführung). Da unser System linear ist, liegt es nahe, die Feedback-Funktion F linear zu wählen, also $u = Fx$ für ein $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dies hat den Vorteil, dass das entstehende System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t) = (A + BF)x(t)$$

eine lineare zeitinvariante Differentialgleichung wird, auf die wir die Theorie der vorhergehenden Abschnitte anwenden können.

Um nun einen Zustand nach 0 zu steuern und ihn dort zu halten, können wir das folgende Stabilisierungsproblem lösen.

Definition 3.15 Gegeben sei ein lineares Kontrollsystem (1.2)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Das (*Feedback-*) *Stabilisierungsproblem* für (1.2) besteht darin, eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (bzw. die dazugehörige Matrix $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$) zu finden, so dass die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

asymptotisch stabil ist. Diese Gleichung wird als *geschlossener Regelkreis* oder *closed loop System* bezeichnet. \square

Aus unseren Kriterien für asymptotische Stabilität kann man leicht das folgende Lemma ableiten.

Lemma 3.16 Gegeben seien zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann löst die Matrix $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ das Stabilisierungsproblem, falls alle Eigenwerte der Matrix $A + BF \in \mathbb{R}^{n \times n}$ negativen Realteil haben.

Wir werden uns im weiteren Verlauf mit der Frage beschäftigen, wann – zu gegebenen Matrizen A und B – eine solche Matrix F existiert und wie man sie berechnen kann.

Beispiel 3.17 Als einfaches und intuitiv lösbares Beispiel für ein Stabilisierungsproblem betrachten wir ein (sehr einfaches) Modell für eine Heizungsregelung. Nehmen wir an, dass wir die Temperatur x_1 in einem Raum an einem festgelegten Messpunkt regeln wollen. Der Einfachheit halber sei die gewünschte Temperatur auf $x_1^* = 0$ normiert. In dem Raum befindet sich ein Heizkörper mit Temperatur x_2 , auf die wir mit der Kontrolle u Einfluss nehmen können. Die Veränderung von x_2 sei durch die Differentialgleichung $\dot{x}_2(t) = u(t)$ beschrieben, d.h. die Kontrolle u regelt die Zunahme (falls $u > 0$) bzw. Abnahme (falls $u < 0$) der Temperatur. Für die Temperatur x_1 im Messpunkt nehmen wir an, dass sie der Differentialgleichung $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)$ genügt, d.h. für konstante Heiztemperatur x_2 ergibt sich

$$x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + (1 - e^{-t})x_2(0).$$

Mit anderen Worten nehmen wir an, dass die Raumtemperatur x_1 im Messpunkt exponentiell gegen die Temperatur des Heizkörpers konvergiert.

Aus diesem Modell erhalten wir das Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Eine naheliegende Regelstrategie ergibt sich nun wie folgt: Falls $x_1 > x_1^* = 0$ ist, so vermindern wir die Temperatur in x_2 , d.h., wir wählen $u < 0$. Im umgekehrten Fall, d.h.

falls $x_1 < x_1^* = 0$ ist, erhöhen wir die Temperatur und setzen $u > 0$. Da unser Feedback linear sein soll, lässt sich dies durch die Wahl $F(x) = -\lambda x_1$ für ein $\lambda > 0$ erreichen, oder, in Matrix-Schreibweise $F = (-\lambda, 0)$ (beachte, dass hier $n = 2$ und $m = 1$ ist, F also eine 1×2 -Matrix bzw. ein 2-dimensionaler Zeilenvektor ist). Damit erhalten wir das rückgekoppelte System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Berechnet man die Eigenwerte für $\lambda > 0$, so sieht man, dass alle Realteile negativ sind. Wir haben also (ohne es zu wollen) das Stabilisierungsproblem gelöst und folglich konvergieren $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für alle beliebige Anfangswerte exponentiell schnell gegen 0, insbesondere konvergiert x_1 exponentiell schnell gegen die gewünschte Temperatur $x_1^* = 0$. Damit haben wir bewiesen, dass unser von Hand konstruierter Regler tatsächlich das gewünschte Ergebnis erzielt.

Falls wir die Temperatur x_2 am Heizkörper messen können, so können wir auch $F(x) = -\lambda x_2$, bzw. in Matrix-Schreibweise $F = (0, -\lambda)$ setzen. Wiederum sieht man durch Betrachtung der Eigenwerte, dass das rückgekoppelte System für alle $\lambda > 0$ exponentiell stabil ist und damit das gewünschte Verhalten erzielt wird. Das Verhalten dieses Systems mit den zwei verschiedenen Feedbacks ist allerdings recht unterschiedlich. Wir werden dies in den Übungen genauer untersuchen. \square

Bemerkung 3.18 In der Praxis ist der Zustand $x(t)$ eines Systems oft nicht vollständig messbar, stattdessen hat man nur Zugriff auf einen *Ausgangsvektor* $y = Cx$ für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{d \times n}$. In diesem Fall kann ein Feedback F nur vom Ausgangsvektor y abhängen, man spricht von einem *Ausgangsfeedback*.

Tatsächlich haben wir im obigen Beispiel so etwas Ähnliches gemacht, indem wir zur Konstruktion von F nur die „Information“ aus der Variablen x_1 bzw. x_2 verwendet haben. Wir werden im Folgenden zunächst annehmen, dass alle Zustände messbar sind und den allgemeinen Fall in Kapitel 4 behandeln. \square

3.5 Lösung des Stabilisierungsproblems mit eindimensionaler Kontrolle

In diesem Abschnitt werden wir Bedingungen untersuchen, unter denen wir eine Lösung für das Stabilisierungsproblems aus Definition 3.15 mit eindimensionaler Kontrolle finden können. Insbesondere werden wir eine hinreichende und notwendige Bedingung an die Matrizen A und B in (1.2) angeben, unter der das Problem lösbar ist. Die einzelnen Schritte der Herleitung liefern dabei ein konstruktives Verfahren zur Berechnung eines stabilisierenden Feedbacks.

Bei der Herleitung werden wieder einmal Koordinatentransformationen eine wichtige Rolle spielen. Für eine Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist das zu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.6}$$

gehörige transformierte System

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \quad (3.7)$$

durch $\tilde{A} = T^{-1}AT$ und $\tilde{B} = T^{-1}B$ gegeben. Ein Feedback F für (3.6) wird mittels $\tilde{F} = FT$ in eines für (3.7) transformiert; dies folgt sofort aus der Bedingung $T^{-1}(A + BF)T = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$.

Wir haben in Lemma 2.14 bereits gesehen, dass man Paare (A, B) mittels einer geeigneten Koordinatentransformation in die Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. in ein kontrollierbares Paar (A_1, B_1) und einen unkontrollierbaren Rest zerlegen kann.

Wir benötigen hier noch eine zweite Koordinatentransformation, die für kontrollierbare Systeme gilt, bei denen u eindimensional ist. In diesem Fall haben wir $m = 1$, also $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, d.h. die Matrix B ist ein n -dimensionaler Spaltenvektor.

Lemma 3.19 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Dann gilt: Das Paar (A, B) ist kontrollierbar genau dann, wenn es eine Koordinatentransformation S gibt, so dass

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{B} = S^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist, wobei die Werte $\alpha_i \in \mathbb{R}$ gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von A sind, d.h. $\chi_A(z) = z^n - \alpha_n z^{n-1} - \cdots - \alpha_2 z - \alpha_1$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass für Matrizen \tilde{A} der angegebenen Form die α_i gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind. Dies folgt durch Induktion über n : Für $n = 1$ ist die Behauptung sofort klar. Für den Induktionsschritt sei $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von der Form des Satzes und $A_{n+1} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ gegeben durch

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_n & \\ \alpha_0 & & & \end{pmatrix}.$$

Entwickeln wir nun $\det(z\text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}} - A_{n+1})$ nach der ersten Spalte, so ergibt sich

$$\chi_{A_{n+1}} = z\chi_{A_n}(z) - \alpha_0 = z^n - \alpha_{n-1}z^{n-1} - \cdots - \alpha_1 z - \alpha_0,$$

also nach Umnummerierung der α_i gerade der gewünschte Ausdruck.

Nehmen wir nun an, dass S existiert. Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass

$$\tilde{R} = (\tilde{B} \tilde{A} \tilde{B} \cdots \tilde{A}^{n-1} \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \ddots & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

gilt, wobei * beliebige Werte bezeichnet. Diese Matrix hat vollen Rang, denn durch Umordnung der Zeilen (dies ändert den Rang nicht) erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen, welche offenbar invertierbar ist, also vollen Rang besitzt. Daher ist (\tilde{A}, \tilde{B}) kontrollierbar und da Kontrollierbarkeit unter Koordinatentransformationen erhalten bleibt, ist auch das Paar (A, B) kontrollierbar.

Sei umgekehrt (A, B) kontrollierbar. Dann ist die Matrix $R = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ invertierbar, folglich existiert R^{-1} . Wir zeigen nun zunächst, dass $R^{-1}AR = \tilde{A}^T$ ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass $AR = R\tilde{A}^T$ ist. Dies folgt (unter Verwendung des Satzes von Cayley-Hamilton) aus der Rechnung

$$\begin{aligned} AR &= A(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = (AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B \ A^n B) \\ &= (AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B \ \alpha_n A^{n-1}B + \dots + \alpha_1 B) \\ &= (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix} = R\tilde{A}^T \end{aligned}$$

Mit \tilde{R} aus (3.8) folgt mit analoger Rechnung die Gleichung $\tilde{R}^{-1}\tilde{A}\tilde{R} = \tilde{A}^T$ und damit

$$\tilde{A} = \tilde{R}\tilde{A}^T\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}R^{-1}AR\tilde{R}^{-1}.$$

Aus den Definitionen von R und \tilde{R} folgt $R(1, 0, \dots, 0)^T = B$ und $\tilde{R}(1, 0, \dots, 0)^T = \tilde{B}$, also $\tilde{R}R^{-1}\tilde{B} = B$. Damit ergibt sich $S = \tilde{R}R^{-1}$ als die gesuchte Transformation. \square

Die durch Lemma 3.19 gegebene Form der Matrizen A und B wird auch *Regelungsnormalform* genannt. Beachte, dass sich die Koordinatentransformation S allein durch Kenntnis von A , B und den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von A berechnen lässt.

Mit Hilfe der Regelungsnormalform können wir nun die Lösung des Stabilisierungsproblems für $u \in \mathbb{R}$ angehen.

Zunächst drücken wir das Stabilisierungsproblem mit Hilfe des charakteristischen Polynoms aus. Dies können wir für beliebige Kontrolldimensionen machen.

Definition 3.20 Betrachte ein Kontrollsystem (1.2) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ein Polynom χ heißt *vorgebbar* für das Kontrollsystem, falls ein lineares Feedback $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert, so dass $\chi = \chi_{A+BF}$ ist für das charakteristische Polynom χ_{A+BF} der Matrix $A + BF$. \square

Da wir wissen, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gerade die Eigenwerte der zugehörigen Matrix sind, erhalten wir aus Lemma 3.16 sofort die folgende Charakterisierung.

Lemma 3.21 Betrachte ein Kontrollsystem (1.2) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann gilt: Das Stabilisierungsproblem ist genau dann lösbar, falls ein vorgegbares Polynom existiert, dessen Nullstellen über \mathbb{C} alle negativen Realteil haben.

Der folgende Satz zeigt die Beziehung zwischen der Kontrollierbarkeit von (A, B) und der Vorgebbarkeit von Polynomen.

Satz 3.22 Betrachte ein Kontrollsystem (1.2) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, d.h. mit eindimensionaler Kontrolle. Dann sind die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent.

(i) Das Paar (A, B) ist kontrollierbar.

(ii) Jedes Polynom der Form $\chi(z) = z^n - \beta_n z^{n-1} - \dots - \beta_2 z - \beta_1$ mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ ist vorgebbar.

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): Sei (A, B) kontrollierbar und sei S die Koordinatentransformation aus Lemma 3.19. Wir setzen

$$\tilde{F} = (\beta_1 - \alpha_1 \quad \beta_2 - \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_n - \alpha_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (\beta_1 - \alpha_1 \quad \beta_2 - \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_n - \alpha_n) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \dots & \beta_n - \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Aussage von Lemma 3.19 folgt, dass $\chi_{\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}} = \chi$ ist. Also ist, nach Rücktransformation, $F = \tilde{F}S^{-1}$ die gesuchte Feedback Matrix, da das charakteristische Polynom einer Matrix invariant unter Koordinatentransformationen ist.

(ii) \Rightarrow (i): Wir zeigen die Implikation „nicht (i) \Rightarrow nicht (ii)“:

Sei (A, B) nicht kontrollierbar. Sei T die Koordinatentransformation aus Lemma 2.14. Dann ergibt sich für jedes beliebige Feedback $\tilde{F} = (F_1 \quad F_2)$

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 F_1 & A_2 + B_1 F_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} =: \tilde{D}.$$

Für das charakteristische Polynom dieser Matrix gilt

$$\chi_{\tilde{D}} = \chi_{A_1 + B_1 F_1} \chi_{A_3},$$

daher sind (beachte, dass (A_1, B_1) kontrollierbar ist) die vorgebbaren Polynome gerade von der Form $\chi = \chi_k \chi_u$, wobei χ_k ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad d ist und

$\chi_u = \chi_{A_3}$ ist. Dies sind sicherlich weniger als die in (ii) angegebenen Polynome, weshalb (ii) nicht gelten kann. \square

Natürlich ist es zur Stabilisierung nicht notwendig, dass jedes Polynom vorgebar ist, wir brauchen lediglich eines zu finden, dessen Nullstellen nur negative Realteile haben. Der Beweis von Satz 3.22 lässt bereits erahnen, wann dies möglich ist.

Satz 3.23 Betrachte ein Kontrollsystem (1.2) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, d.h. mit eindimensionaler Kontrolle. Seien $A_1 \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ die Matrizen aus Lemma 2.14 mit der Konvention, dass $A_1 = A$ und $B_1 = B$ ist, falls (A, B) kontrollierbar ist.

Dann sind die vorgebbaren Polynome von (1.2) gerade die Polynome der Form $\chi = \chi_k \chi_{A_3}$, wobei χ_k ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad d und χ_{A_3} das charakteristische Polynom der Matrix A_3 , also gerade der unkontrollierbare Anteil des charakteristischen Polynoms χ_A ist, vgl. Definition 2.15. Hierbei machen wir die Konvention $\chi_{A_3} = 1$ falls $d = n$.

Insbesondere gilt: Das Stabilisierungsproblem ist genau dann lösbar, wenn alle Eigenwerte von A_3 negativen Realteil haben. In diesem Fall nennen wir das Paar (A, B) *stabilisierbar*.

Beweis: Die erste Behauptung folgt sofort aus dem zweiten Teil des Beweises von Satz 3.22. Die Aussage über das Stabilisierungsproblem folgt dann sofort aus Lemma 3.21. \square

3.6 Lösung des Stabilisierungsproblems mit mehrdimensionaler Kontrolle

Die Resultate für mehrdimensionale Kontrolle $m > 1$ sind völlig analog zu denen für eindimensionale Kontrolle. Bei einer direkten Herangehensweise sind allerdings die Beweise etwas aufwändiger, da wir nicht direkt auf Lemma 3.19 zurückgreifen können. Wir werden den mehrdimensionalen Fall deswegen auf den Fall $m = 1$ zurückführen, indem wir das folgende Lemma verwenden, das als *Heymanns Lemma* bezeichnet wird.

Lemma 3.24 Betrachte ein Kontrollsystem (1.2) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Das Paar (A, B) sei kontrollierbar. Sei $v \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor mit $\bar{B} = Bv \neq 0$. Dann gibt es eine Matrix $\bar{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass das Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = (A + B\bar{F})x(t) + \bar{B}\bar{u}(t)$$

mit eindimensionaler Kontrolle $\bar{u}(t)$ kontrollierbar ist.

Beweis: Mittels der rekursiven Vorschrift $x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$ mit geeigneten u_i konstruieren wir uns zunächst linear unabhängige Vektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $l \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$Ax_i \in V_l \text{ für } i = 1, \dots, l-1 \text{ mit } V_l = \langle x_1, \dots, x_l \rangle. \quad (3.9)$$

Setze dazu $x_1 = \bar{B}$ (wir können die $n \times 1$ Matrix \bar{B} als Spaltenvektor auffassen) und beachte, dass die Eigenschaft (3.9) für $l = 1$ und jedes $x_1 \neq 0$ trivialerweise erfüllt ist.

Für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und gegebene linear unabhängige Vektoren x_1, \dots, x_k , die (3.9) für $l \in \{1, \dots, k\}$ erfüllen, konstruieren wir nun wie folgt einen Vektor x_{k+1} , so dass x_1, \dots, x_k, x_{k+1} linear unabhängig sind und (3.9) für $l \in \{1, \dots, k+1\}$ erfüllen:

1. *Fall:* $Ax_k \notin V_k$: Setze $u_k := 0 \in \mathbb{R}^m$ und $x_{k+1} = Ax_k$.

2. *Fall:* $Ax_k \in V_k$: Wegen (3.9) folgt dann, dass V_k A -invariant ist. Aus Kapitel 2 wissen wir, dass $\langle A | \text{im } B \rangle = \text{im } R$ für die Erreichbarkeitsmatrix $R = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ der kleinste A -invariante Unterraum ist, der das Bild von B enthält. Da (A, B) kontrollierbar ist, ist $\langle A | \text{im } B \rangle = \mathbb{R}^n$. Weil V_k nun ein A -invarianter Unterraum mit $\dim V_k = k < n$ ist, kann dieser das Bild von B also nicht enthalten. Folglich gibt es ein $u_k \in \mathbb{R}^m$ mit $Ax_k + Bu_k \notin V_k$ und wir setzen $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$.

Wir konstruieren nun die gesuchte Abbildung \bar{F} aus den Vektoren x_1, \dots, x_n . Da die x_i linear unabhängig sind, ist die Matrix $X = (x_1 \ \dots \ x_n)$ invertierbar, und wir können $\bar{F} := UX^{-1}$ für $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definieren, wobei die u_i für $i = 1, \dots, n-1$ die in der obigen Rekursion verwendeten Kontrollvektoren sind und wir $u_n := 0 \in \mathbb{R}^m$ setzen. Damit gilt $\bar{F}x_i = u_i$ und deswegen $(A + B\bar{F})x_i = x_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$. Wegen $\bar{B} = x_1$ folgt somit

$$(\bar{B} \ (A + B\bar{F})\bar{B} \ \dots \ (A + B\bar{F})^{n-1}\bar{B}) = X,$$

also hat $(\bar{B} \ (A + B\bar{F})\bar{B} \ \dots \ (A + B\bar{F})^{n-1}\bar{B})$ den Rang n , weswegen das Paar $(A + B\bar{F}, \bar{B})$ kontrollierbar ist. \square

Mit diesem Resultat lassen sich nun die Sätze 3.22 und 3.23 leicht auf beliebige Kontrolldimensionen verallgemeinern.

Satz 3.25 Betrachte ein Kontrollsystem (1.2) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann sind die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent.

(i) Das Paar (A, B) ist kontrollierbar.

(ii) Jedes Polynom der Form $\chi(z) = z^n - \beta_n z^{n-1} - \dots - \beta_2 z - \beta_1$ mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ ist vorgebar.

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): Sei (A, B) kontrollierbar und χ gegeben. Seien $\bar{F} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die Matrizen aus Lemma 3.24 für ein $v \in \mathbb{R}^m$ mit $Bv \neq 0$ (beachte, dass solch ein $v \in \mathbb{R}^m$ existiert, da (A, B) kontrollierbar ist, also $B \neq 0$ ist). Dann ist das Paar $(A + B\bar{F}, \bar{B})$ kontrollierbar und aus Satz 3.22 folgt die Existenz eines Feedbacks $F_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, so dass

$$\chi_{A+B\bar{F}+\bar{B}F_1} = \chi$$

ist. Wegen

$$A + B\bar{F} + \bar{B}F_1 = A + B\bar{F} + BvF_1 = A + B(\bar{F} + vF_1)$$

ist also $F = \bar{F} + vF_1$ das gesuchte Feedback.

(ii) \Rightarrow (i): Völlig analog zum Beweis von Satz 3.22. \square

Satz 3.26 Betrachte ein Kontrollsystem (1.2) mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Seien $A_1 \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{d \times m}$ die Matrizen aus Lemma 2.14 mit der Konvention, dass $A_1 = A$ und $B_1 = B$ ist, falls (A, B) kontrollierbar ist.

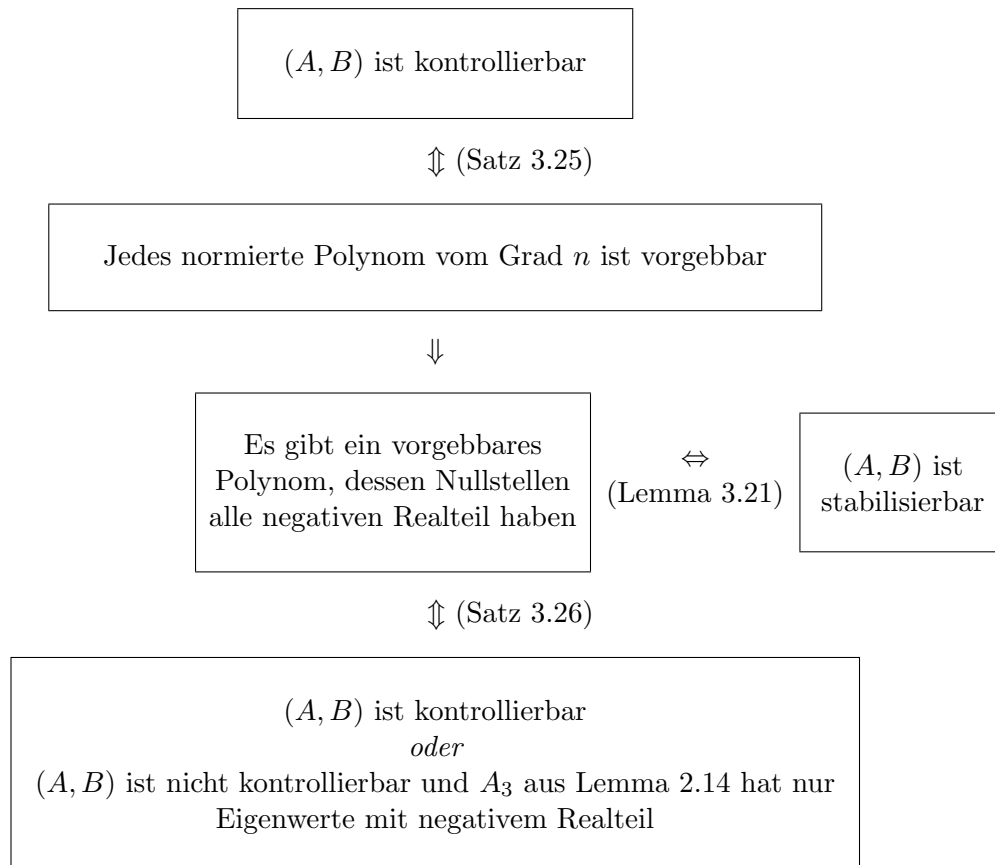
Dann sind die vorgebbaren Polynome von (1.2) gerade die Polynome der Form $\chi = \chi_k \chi_u$, wobei χ_k ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad d und χ_u das charakteristische Polynom der Matrix A_3 ist, mit der Konvention $\chi_u = 1$ falls $d = n$.

Insbesondere gilt: Das Stabilisierungsproblem ist genau dann lösbar, wenn alle Eigenwerte von A_3 negativen Realteil haben. In diesem Fall nennen wir das Paar (A, B) *stabilisierbar*.

Beweis: Völlig analog zum Beweis von Satz 3.23. □

Bemerkung 3.27 Satz 3.26 wird oft als *Polverschiebungssatz* bezeichnet, da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms in der Regelungstechnik als "Pole" bezeichnet werden (den Grund erklärt Bemerkung 5.15) und dieser Satz gerade angibt wie man diese Nullstellen durch geeignete Wahl des Feedbacks „verschieben“ kann. □

Wir können die wesentlichen Ergebnisse über das Stabilisierungsproblem wie folgt schematisch darstellen:



Kapitel 4

Beobachtbarkeit und Beobachter

Die im letzten Kapitel vorgestellte Lösung des Stabilisierungsproblems geht davon aus, dass der gesamte Vektor $x(t)$ zur Verfügung steht, um den Kontrollwert $u(t) = Fx(t)$ zu berechnen. Dies ist in der Praxis im Allgemeinen nicht der Fall. Dort kann man nur davon ausgehen, gewisse von $x(t)$ abhängige Werte $y(t) = C(x(t)) \in \mathbb{R}^k$ zu kennen, aus denen $u(t)$ dann berechnet werden muss. Da wir uns in dieser Vorlesung mit linearen Systemen beschäftigen, nehmen wir wieder an, dass die Funktion $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear ist, also durch eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ gegeben ist.

Definition 4.1 Ein *lineares Kontrollsystem mit Ausgang* ist gegeben durch¹ die Gleichungen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \quad (4.1)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$. □

In diesem Kapitel werden wir Bedingungen herleiten, unter denen das Stabilisierungsproblem für (4.1) lösbar ist und zeigen, wie man den Feedback-Regler in diesem Fall konstruieren muss.

4.1 Beobachtbarkeit und Dualität

Die wichtigste Frage bei der Analyse von (4.1) ist, wie viel “Information” in dem Ausgang $y(t) = Cx(t)$ enthalten ist. Dies wird durch die folgenden Definitionen formalisiert.

Definition 4.2 (i) Zwei Zustände $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ heißen *unterscheidbar*, falls ein $u \in \mathcal{U}$ und ein $t \geq 0$ existiert mit

$$Cx(t, x_1, u) \neq Cx(t, x_2, u).$$

(ii) Das System (4.1) heißt *beobachtbar*, falls alle Zustände $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_1 \neq x_2$ unterscheidbar sind. □

¹Manchmal wird auch die Variante $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ mit $D \in \mathbb{R}^{k \times m}$ betrachtet. Die hier betrachtete Form erhält man dann durch die Wahl $D = 0$.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Unterscheidbarkeit wegen der Linearität des Systems einfacher ausgedrückt werden kann.

Lemma 4.3 Zwei Zustände $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann unterscheidbar, wenn ein $t \geq 0$ existiert mit

$$Cx(t, x_1 - x_2, 0) \neq 0.$$

Beweis: Aus der allgemeinen Form der Lösung folgt die Gleichung

$$x(t, x_1, u) - x(t, x_2, u) = x(t, x_1 - x_2, 0),$$

woraus wegen der Linearität von C sofort die Behauptung folgt. \square

Aus diesem Lemma folgt, dass die Beobachtbarkeit von (4.1) nicht von u und damit nicht von B abhängt. Falls das System (4.1) beobachtbar ist, nennen wir daher das Paar (A, C) *beobachtbar*.

Zudem motiviert das Lemma die folgende Definition.

Definition 4.4 (i) Wir nennen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *beobachtbar*, falls ein $t \geq 0$ existiert mit

$$Cx(t, x_0, 0) \neq 0$$

und *unbeobachtbar auf* $[0, t]$, falls

$$Cx(s, x_0, 0) = 0$$

für alle $s \in [0, t]$.

(ii) Wir definieren die Mengen der *unbeobachtbaren Zustände auf* $[0, t]$ für $t > 0$ durch

$$\mathcal{N}(t) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid Cx(s, x_0, 0) = 0 \text{ für alle } s \in [0, t]\}$$

und die Menge der *unbeobachtbaren Zustände* durch

$$\mathcal{N} := \bigcap_{t>0} \mathcal{N}(t).$$

\square

Das folgende Lemma zeigt die Struktur dieser Mengen auf.

Lemma 4.5 Für alle $t > 0$ gilt

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(t) = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i).$$

Insbesondere ist \mathcal{N} also ein linearer Unterraum, der zudem A -invariant ist, also $A\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$ erfüllt.

Beweis: Ein Zustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ liegt genau dann in $\mathcal{N}(t)$, wenn gilt

$$0 = Cx(s, x_0, 0) = Ce^{As}x_0 \text{ für alle } s \in [0, t]. \quad (4.2)$$

Sei nun $x_0 \in \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i)$. Dann gilt mit dem Satz von Cayley-Hamilton $CA^i x_0 = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Aus der Reihendarstellung von e^{As} folgt damit $Ce^{As}x_0 = 0$ für alle $s \geq 0$ und daher (4.2), also $x_0 \in \mathcal{N}(t)$.

Sei umgekehrt $x_0 \in \mathcal{N}(t)$. Dann gilt nach (4.2) $Ce^{As}x_0 = 0$. Durch i -maliges Ableiten dieses Ausdrucks in $s = 0$ folgt

$$CA^i x_0 = 0, \quad i \in \mathbb{N}_0$$

und damit insbesondere $x_0 \in \ker CA^i$, $i = 0, \dots, n-1$. Also folgt $x_0 \in \mathcal{N}(t)$.

Die A -Invarianz folgt mit dem Satz von Cayley-Hamilton aus der Darstellung von \mathcal{N} . \square

Offenbar gibt es hier eine gewisse Ähnlichkeit mit der Kontrollierbarkeit, speziell mit den Mengen $\mathcal{R}(t)$ und \mathcal{R} . Wir zeigen nun, dass dies mehr als eine oberflächliche Ähnlichkeit ist, wenn wir ein geeignetes definiertes duales System einführen.

Definition 4.6 Zu einem durch (A, B, C) gegebenen Kontrollsystem (4.1) definieren wir das *duale System* durch die Matrizen (A^T, C^T, B^T) . Ausgeschrieben lautet das duale System zu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^k$$

also

$$\dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T u(t), \quad y(t) = B^T x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^k, y(t) \in \mathbb{R}^m.$$

\square

In Worten ausgedrückt erhält man das duale System also durch Transponieren und Vertauschen von B und C , also von Eingangs- und Ausgangsmatrix.

Satz 4.7 Für ein durch (A, B, C) gegebenes Kontrollsystem (4.1) und das zugehörige durch (A^T, C^T, B^T) gegebene duale System definiere

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \langle A \mid \text{im } B \rangle & \mathcal{N} &= \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i) \\ \mathcal{R}^T &= \langle A^T \mid \text{im } C^T \rangle & \mathcal{N}^T &= \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(B^T(A^T)^i). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathcal{R}^T = \mathcal{N}^\perp \quad \text{und} \quad \mathcal{N}^T = \mathcal{R}^\perp.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} (A, B, C) \text{ kontrollierbar} &\iff (A^T, C^T, B^T) \text{ beobachtbar} \\ (A, B, C) \text{ beobachtbar} &\iff (A^T, C^T, B^T) \text{ kontrollierbar.} \end{aligned}$$

Beweis: Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \cdot k) \times n}.$$

Für diese Matrix gilt mit Lemma 4.5 offenbar

$$\mathcal{N} = \ker M.$$

Andererseits ist

$$M^T = (C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T) \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot k)}$$

gerade die Erreichbarkeitsmatrix des dualen Systems, vgl. Definition 2.10, weswegen $\mathcal{R}^T = \text{im } M^T$ gilt. Aus der linearen Algebra ist bekannt:

$$\text{im } M^T = (\ker M)^\perp.$$

Hieraus folgt die erste Behauptung wegen

$$\mathcal{R}^T = \text{im } M^T = (\ker M)^\perp = \mathcal{N}^\perp.$$

Durch Vertauschen der beiden Systeme folgt analog $\mathcal{R} = (\mathcal{N}^T)^\perp$, woraus die zweite Aussage wegen

$$\mathcal{R}^\perp = \left((\mathcal{N}^T)^\perp \right)^\perp = \mathcal{N}^T$$

folgt □

Wir können damit alle Aussagen zur Kontrollierbarkeit auf die Beobachtbarkeit übertragen und formulieren dies explizit für Korollar 2.13 und Lemma 2.14.

Definition 4.8 Die Matrix $(C^T, A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T) \in \mathbb{R}^{n \times (k \cdot n)}$ heißt *Beobachtbarkeitsmatrix* des Systems (1.2). □

Korollar 4.9 Das System (4.1) ist genau dann beobachtbar, wenn

$$\text{rg}(C^T, A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T) = n$$

ist.

Beweis: Folgt aus Korollar 2.13 angewendet auf das duale System. □

Wir formulieren nun noch das Analogon zu der Zerlegung

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus Lemma 2.14.

Lemma 4.10 Sei (A, C) nicht beobachtbar, d.h., $\dim \mathcal{N} = l > 0$. Dann existiert ein invertierbares $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$ und $\tilde{C} = CT$ die Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \ C_2)$$

mit $A_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l \times (n-l)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-l) \times (n-l)}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{(n-l) \times m}$ und $C_2 \in \mathbb{R}^{k \times (n-l)}$ besitzen, wobei das Paar (A_3, C_2) beobachtbar ist.

Beweis: Lemma 2.14 angewendet auf das duale System (A^T, C^T) liefert \hat{T} mit

$$\hat{T}^{-1}A^T\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ 0 & \hat{A}_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}^{-1}C^T = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also folgt mit $S = (T^T)^{-1}$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \hat{A}_1^T & 0 \\ \hat{A}_2^T & \hat{A}_3^T \end{pmatrix}, \quad CS = (\hat{C}_1^T \ 0).$$

Durch eine weitere Koordinatentransformation

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-l}} \\ \text{Id}_{\mathbb{R}^l} & 0 \end{pmatrix}$$

folgt die behauptete Zerlegung mit $T = SQ$ und

$$A_1 = \hat{A}_3^T, \quad A_2 = \hat{A}_2^T, \quad A_3 = \hat{A}_1^T, \quad C_2 = \hat{C}_1^T.$$

Als Alternative hier noch ein **direkter Beweis**, der ohne Lemma 2.14 auskommt:

Es sei v_1, \dots, v_l eine Basis von \mathcal{N} , also $\mathcal{N} = \langle v_1, \dots, v_l \rangle$, die wir durch w_1, \dots, w_{n-l} zu einer Basis des \mathbb{R}^n ergänzen. Definiere nun $T := (v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_{n-l})$. Bezeichnen wir mit e_i wie üblich den i -ten Einheitsvektor im \mathbb{R}^n , so gilt $Te_i = v_i$, $i = 1, \dots, l$, $Te_i = w_{i-l}$, $i = l+1, \dots, n$, $T^{-1}v_i = e_i$, $i = 1, \dots, l$ und $T^{-1}w_i = e_{i+l}$, $i = 1, \dots, n-l$.

Wir zeigen zunächst die Struktur von \tilde{A} . Angenommen, ein Eintrag im 0-Block von \tilde{A} ist ungleich Null. Dann gilt

$$\tilde{A}e_i \notin \langle e_1, \dots, e_l \rangle = T^{-1}\mathcal{N}$$

für ein $i \in \{1, \dots, l\}$. Andererseits folgt aus der A -Invarianz von \mathcal{N}

$$\tilde{A}e_i = T^{-1}ATe_i = T^{-1}Av_i \in T^{-1}\mathcal{N},$$

was ein Widerspruch ist.

Die Struktur von \tilde{C} folgt aus

$$\mathcal{N} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i) \subseteq \ker C.$$

Es muss also $v_i \in \ker C$ gelten und damit $\tilde{C}e_i = CTe_i = Cv_i = 0$. Also müssen die ersten l Spalten von \tilde{C} gleich 0 sein.

Es bleibt, die Beobachtbarkeit von (A_3, C_2) zu zeigen. Für jedes $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-l}$, $\tilde{x} \neq 0$ gilt

$$C_2 A_3^i \tilde{x} = \tilde{C} \tilde{A}^i \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = C A^i T \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix},$$

wobei wir in der ersten Gleichung die Struktur von \tilde{A} und \tilde{C} ausgenutzt haben. Wegen

$$w := T \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \notin \mathcal{N}$$

existiert nun ein $i \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $C A^i w \neq 0$ und damit $C_2 A_3^i \tilde{x} \neq 0$. Da $\tilde{x} \neq 0$ beliebig war, folgt

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(C_2 A_3^i) = \{0\},$$

also die Beobachtbarkeit von (A_3, C_2) . □

4.2 Asymptotische Beobachtbarkeit

Wir haben gesehen, dass vollständige Kontrollierbarkeit zwar hinreichend, nicht jedoch notwendig zur Lösung des Stabilisierungsproblems ist. Notwendig ist nur, dass das Paar (A, B) stabilisierbar ist, was nach Satz 3.26 genau dann der Fall ist, wenn alle Eigenwerte des unkontrollierbaren Anteils A_3 der Matrix A negative Realteile besitzen.

Ähnlich verhält es sich mit der Beobachtbarkeit. Um das Stabilisierungsproblem für das System (4.1) zu lösen, braucht man die Beobachtbarkeit nicht. Es reicht eine schwächere Bedingung, die durch die folgende Definition gegeben ist.

Definition 4.11 Das System (4.1) heißt *asymptotisch beobachtbar* (oder auch *entdeckbar*), falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, 0) = 0 \quad \text{für alle } x_0 \in \mathcal{N}.$$

□

Dies bedeutet, dass die Lösungen für unbeobachtbare Anfangswerte und $u \equiv 0$ bereits gegen 0 konvergieren. Anschaulich gesprochen wird die Information über diese Anfangswerte für das Stabilisierungsproblem nicht benötigt, da die zugehörigen Lösungen ja bereits gegen 0 konvergieren, also asymptotisch (und damit auch exponentiell) stabil sind.

Das folgende Lemma charakterisiert die asymptotische Beobachtbarkeit für die Zerlegung aus Lemma 4.10.

Lemma 4.12 System (4.1) ist genau dann asymptotisch beobachtbar, wenn die Matrix A_1 aus Lemma 4.10 exponentiell stabil ist, also nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt.

Beweis: Beachte zunächst, dass die asymptotische Beobachtbarkeit unter Koordinatenwechseln erhalten bleibt, wir können also alle Rechnungen in der Basis von Lemma 4.10 durchführen.

In der Basis von Lemma 4.10 ist \mathcal{N} gerade durch

$$\mathcal{N} = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_0^1 \in \mathbb{R}^l \right\}$$

gegeben. Aus der Form der Matrix \tilde{A} folgt damit, dass alle Lösungen zu Anfangswerten $x_0 \in \mathcal{N}$ als

$$x(t, x_0, 0) = e^{\tilde{A}t} x_0 = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} x_0^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden können.

Aus der asymptotischen Beobachtbarkeit folgt nun $x(t, x_0, 0) \rightarrow 0$ für alle $x \in \mathcal{N}$, also $e^{A_1 t} x_0^1 \rightarrow 0$ für alle $x_0^1 \in \mathbb{R}^l$. Dies ist nur möglich, wenn A_1 exponentiell stabil ist.

Umgekehrt folgt aus der exponentiellen Stabilität von A_1 die Konvergenz $e^{A_1 t} x_0^1 \rightarrow 0$ für alle $x_0^1 \in \mathbb{R}^l$, also $x(t, x_0, 0) \rightarrow 0$ für alle $x \in \mathcal{N}$ und damit die asymptotische Beobachtbarkeit. \square

Der folgende Satz zeigt, dass die asymptotische Beobachtbarkeit gerade die duale Eigenschaft zur Stabilisierbarkeit ist.

Satz 4.13 (A, C) ist asymptotisch beobachtbar genau dann, wenn (A^T, C^T) stabilisierbar ist.

Beweis: Wir bezeichnen die Komponenten der Zerlegung aus Lemma 4.10 angewendet auf (A, C) mit A_1, A_2, A_3, C_2 und die Komponenten der Zerlegung aus Lemma 2.14 angewendet auf (A^T, C^T) mit $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{C}_1$. Aus dem Beweis von Lemma 4.10 folgt mit dieser Notation gerade $A_1 = \hat{A}_3^T$.

Nach Lemma 4.12 folgt, dass asymptotische Beobachtbarkeit von (A, C) gerade äquivalent zur exponentiellen Stabilität von A_1 ist. Andererseits folgt aus Satz 3.26, dass (A^T, C^T) genau dann stabilisierbar ist, wenn \hat{A}_3 exponentiell stabil ist. Da die Eigenwerte von \hat{A}_3 und $\hat{A}_3^T = A_1$ übereinstimmen, folgt die behauptete Äquivalenz. \square

4.3 Dynamische Beobachter

Ein naheliegender Ansatz zur Lösung des Stabilisierungsproblems für (4.1) ist die Wahl $u(t) = Fy(t)$. Dies kann funktionieren (vgl. Beispiel 3.17, wo wir $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ betrachtet haben), muss aber nicht, wie das kontrollierbare und beobachtbare System (4.1) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt, vgl. Aufgabe 1, 8. Übungsblatt. Tatsächlich ist dieses System nicht einmal dann stabilisierbar, wenn $F(y(t))$ eine beliebige stetige Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sein darf.

Wir wollen daher nun eine Methode zur Stabilisierung entwickeln, die immer funktioniert, wenn (4.1) stabilisierbar und asymptotisch beobachtbar ist. Die Methode funktioniert für ein durch die Matrizen (A, B, C) gegebenes System (4.1) wie folgt:

- (1) Entwerfe ein stabilisierendes lineares Feedback F für (A, B)
- (2) Entwerfe einen Algorithmus, der aus den gemessenen Ausgängen $y(s)$, $s \in [0, t]$, einen Schätzwert $z(t) \approx x(t)$ ermittelt
- (3) Regle das System (4.1) mittels $u(t) = Fz(t)$.

Schritt (1) können wir mit den Methoden aus Kapitel 3 bereits lösen. In diesem Abschnitt werden wir Schritt (2) betrachten und im folgenden Abschnitt dann beweisen, dass die Methode mit den Schritten (1)–(3) tatsächlich funktioniert.

Der “Algorithmus” in Schritt (2) besteht dabei aus einem geeignet formulierten Kontrollsystem für $z(t)$, in dem neben der Kontrollfunktion $u(t)$ der Ausgang $y(t)$ von (4.1) eine weitere Eingangsfunktion bildet. Die folgende Definition formalisiert diese Idee.

Definition 4.14 Ein *dynamischer Beobachter* für (4.1) ist ein lineares Kontrollsystem der Form

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + Ly(t) + Ku(t) \quad (4.3)$$

mit $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass für alle Anfangswerte $x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle Kontrollfunktionen $u \in \mathcal{U}$ für die Lösungen $x(t, x_0, u)$ und $z(t, z_0, u, y)$ von (4.1), (4.3) mit $y(t) = Cx(t, x_0, u)$ die Abschätzung

$$\|x(t, x_0, u) - z(t, z_0, u, y)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - z_0\|$$

für geeignete Konstanten $c, \sigma > 0$ gilt. □

In der Praxis kann System (4.3) z.B. numerisch gelöst werden, um die Werte $z(t)$ zu bestimmen.

Der folgende Satz zeigt, wann ein dynamischer Beobachter existiert; im Beweis wird dieser explizit konstruiert.

Satz 4.15 Ein dynamischer Beobachter für (4.1) existiert genau dann, wenn das System asymptotisch beobachtbar ist.

Beweis: “ \Leftarrow ” Da (4.1) asymptotisch beobachtbar ist, ist (A^T, C^T) stabilisierbar. Wir können also ein lineares Feedback $\hat{F} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ finden, so dass $A^T + C^T \hat{F}$ exponentiell stabil ist. Mit $G = \hat{F}^T$ ist dann auch $A + GC = (A^T + C^T \hat{F})^T$ exponentiell stabil.

Wir wählen nun in (4.3) $J = A + GC$, $L = -G$ und $K = B$, also

$$\dot{z}(t) = (A + GC)z(t) - Gy(t) + Bu(t).$$

Schreiben wir kurz $x(t) = x(t, x_0, u)$, $z(t) = z(t, z_0, u, y)$ und $e(t) = z(t) - x(t)$, so gilt für $e(t)$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - \dot{x}(t) \\ &= (A + GC)z(t) - Ly(t) + Bu(t) - Ax(t) - Bu(t) \\ &= (A + GC)z(t) - LCx(t) - Ax(t) \\ &= (A + GC)(z(t) - x(t)) = (A + GC)e(t) \end{aligned}$$

Aus der exponentiellen Stabilität von $A + GC$ folgt damit

$$\|e(t)\| \leq ce^{-\sigma t} \|e(0)\|$$

für geeignetes $c, \sigma > 0$, was wegen $e(t) = z(t) - x(t)$ und $e(0) = z_0 - x_0$ gerade die gewünschte Abschätzung liefert.

“ \Rightarrow ” Sei $x_0 \in \mathcal{N}$, also $y(t) = Cx(t, x_0, 0) = 0$ für alle $t \geq 0$. Für $z_0 = 0$ gilt damit $z(t, z_0, 0, y) = z(t, 0, 0, 0) = 0$. Damit folgt aus der Eigenschaft des dynamischen Beobachters

$$\|x(t, x_0, 0)\| = \|x(t, x_0, 0) - z(t, z_0, 0, y)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - z_0\| = ce^{-\sigma t} \|x_0\| \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow \infty$. Also gilt $x(t, x_0, 0)$ und damit die asymptotische Beobachtbarkeit. \square

4.4 Lösung des Stabilisierungsproblems mit Ausgang

Wir wollen nun den Schritt (3) des im vorherigen Abschnitt angegebenen Vorgehens zur Stabilisierung analysieren und zeigen, dass dieses Vorgehen zum Erfolg führt, wenn man in Schritt (2) den dynamischen Beobachter (4.3) verwendet.

Aus den Schritten (1)–(3) unter Verwendung von (4.3) in Schritt (2) ergibt sich die Feedback-Gleichung

$$u(t) = Fz(t), \quad \dot{z}(t) = Jz(t) + Ly(t) + KFz(t). \quad (4.4)$$

Diese Form von Feedback nennt man *dynamisches Ausgangsfeedback*, da $u(t)$ aus dem Ausgang $y(t) = Cx(t)$ berechnet wird und das Feedback eine “interne” *Dynamik* besitzt, die gerade durch die Differentialgleichung für z gegeben ist².

Definition 4.16 Ein dynamisches Ausgangsfeedback (4.4) löst das *Stabilisierungsproblem mit Ausgang*, wenn das durch Einsetzen von (4.4) entstehende System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BFz(t) \\ \dot{z}(t) &= Jz(t) + LCx(t) + KFz(t) \end{aligned}$$

mit Lösungen $\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ exponentiell stabil ist. \square

Satz 4.17 Gegeben sei ein Kontrollsystem (4.1) mit Matrizen (A, B, C) . Dann ist das Stabilisierungsproblem mit Ausgang genau dann im Sinne von Definition 4.16 lösbar, wenn (A, B) stabilisierbar und (A, C) asymptotisch beobachtbar ist.

In diesem Fall ist (4.4) mit dem im Beweis von Satz 4.15 konstruierten dynamischen Beobachter (4.3) und einem stabilisierendes Feedback $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ für (A, B) ein stabilisierendes dynamisches Feedback.

²Im Gegensatz dazu nennt man das in Kapitel 3 behandelte Feedback $u(t) = Fx(t)$ *statisches Zustandsfeedback*.

Beweis: “ \Leftarrow ”: Es sei (A, B) stabilisierbar und (A, C) asymptotisch beobachtbar. Es sei $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ein stabilisierendes Feedback für (A, B) und (4.3) der im Beweis von Satz 4.15 konstruierte dynamischen Beobachter. Dann ergibt sich das mittels (4.4) geregelte System zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & BF \\ LC & J + KF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & BF \\ -GC & A + GC + BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &= T^{-1} \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + GC \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ -\text{Id}_{\mathbb{R}^n} & \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \text{Id}_{\mathbb{R}^n} & \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}$$

Da die exponentielle Stabilität unter Koordinatentransformationen erhalten bleibt, reicht es nun nachzuweisen, dass die Matrix in der letzten Zeile der Rechnung exponentiell stabil ist. Für Blockdreiecksmatrizen sind die Eigenwerte nun aber gerade gleich den Eigenwerten der Diagonalblöcke $A + BF$ und $A + GC$. Da $A + BF$ nach Wahl von F exponentiell stabil ist und $A + GC$ nach Wahl von G im Beweis von Satz 4.15 ebenfalls exponentiell stabil ist, hat obige Matrix also nur Eigenwerte mit negativem Realteil und ist damit exponentiell stabil.

“ \Rightarrow ”: Mit der Koordinatentransformation T aus Lemma 2.14 erhält man für das transformierte System die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= A_1 x^1(t) + A_2 x^2(t) + B_1 F z(t) \\ \dot{x}^2(t) &= A_3 x^2(t) \\ \dot{z}(t) &= J z(t) + LC x(t) + KF z(t) \end{aligned}$$

mit $x(t) = T \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}$. Nehmen wir nun an, dass (A, B) nicht stabilisierbar ist. Dann besitzt A_3 Eigenwerte mit positivem Realteil, die Gleichung $\dot{x}^2(t) = A_3 x^2(t)$ ist also nicht asymptotisch stabil und es gibt daher einen Anfangswert x_0^2 mit $x^2(t, x_0^2) \not\rightarrow 0$. Wählen wir also

$$x_0 = T \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

mit x_0^1, z_0 beliebig, so gilt $x(t, x_0, Fz) \not\rightarrow 0$ für jede Wahl des dynamischen Feedbacks. Dies widerspricht der Tatsache, dass das Stabilisierungsproblem lösbar ist, das Paar (A, B) ist also stabilisierbar.

Die asymptotische Beobachtbarkeit von (A, C) folgt analog zum Beweis von “ \Rightarrow ” in Satz 4.15. \square

Kapitel 5

Analyse im Frequenzbereich

Ein nicht unerheblicher Teil der modernen Kontroll- und Systemtheorie ist aus der Elektrotechnik heraus entstanden, in der das Verhalten von Schaltungen mit Eingangs- und Ausgangssignalen betrachtet wird. Als Beispiel kann hierbei z.B. ein Verstärker dienen, der ein Eingangssignal (von einem Mikrophon, einem MP3-Spieler etc.) in ein Ausgangssignal umwandelt, das dann an die Lautsprecher geschickt wird. Ein anderes Beispiel ist ein (analoges) Radio, in dem das Eingangssignal (die elektromagnetischen Wellen) in ein hörbares Ausgangssignal umgewandelt wird. Stellen wir uns den Verstärker bzw. das Radio als Kontrollsystem vor, so können wir das Eingangssignal gemäß mit u und das Ausgangssignal mit y bezeichnen. Dies ändert die Interpretation dieser Funktionen: $u(t)$ ist nun ein von außen kommendes Signal (statt einer von uns wählbaren Kontrollfunktion) und $y(t)$ ist ein Ausgangssignal, das bestimmten Kriterien genügen soll (statt einer Messgröße). Es ändert aber zunächst nichts an der mathematischen Darstellung des Zusammenhangs zwischen u und y über das System (4.1). Der Anfangswert wird bei dieser Betrachtung üblicherweise als $x_0 = 0$ gewählt. Man geht also davon aus, dass sich das System bis zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage 0 befindet und ab dann durch das Eingangssignal $u(t)$, $t \geq 0$, beeinflusst wird.

Die beiden genannten Anwendungsbeispiele zeigen, dass Frequenzen eine wichtige Rolle bei dieser Betrachtungsweise spielen. Aus diesem Grunde werden u und y bei dieser Art der Betrachtung nicht als Funktionen der Zeit sondern der Frequenz dargestellt. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die sogenannte Laplace-Transformation.

5.1 Laplace-Transformation

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$. Wir bezeichnen mit $L_{loc}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{K}^m)$ die Menge aller Funktionen $u : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{K}^m$, die auf jedem kompakten Intervall in \mathbb{R}_0^+ Lebesgue-integrierbar sind und mit $L^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{K}^m)$ die Menge der Funktionen $u : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{K}^m$, die auf ganz \mathbb{R}_0^+ Lebesgue-integrierbar sind. Für ein $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{K}^m)$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere $u_\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{K}^m$ mittels $u_\alpha(t) := u(t)e^{-\alpha t}$. Dann definieren wir den Raum der α -exponentiell integrierbaren Funktionen als

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{K}^m) := \{u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{K}^m) \mid u_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{K}^m)\}.$$

Beispiel 5.1 Die Funktion $u(t) = e^t$ liegt als stetige Funktion offenbar in $L^1_{loc}(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$, wegen

$$\int_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1 \rightarrow \infty$$

für $t \rightarrow \infty$ liegt sie aber nicht in $L^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$. Für $\alpha > 1$ gilt

$$\int_0^t u_\alpha(\tau) d\tau = \int_0^t e^\tau e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{1-\alpha} (e^{(1-\alpha)t} - 1) \rightarrow \frac{1}{\alpha-1}$$

für $t \rightarrow \infty$. Damit existiert zunächst das unendliche Riemann-Integral und wegen $u_\alpha(t) \geq 0$ auch das unendliche Lebesgue-Integral. Folglich liegt $u(t) = e^t$ in $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R})$ für alle $\alpha > 1$. \square

Definition 5.2 Die Funktionen in $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{K}^m)$ heißen *Laplace-transformierbar*. Die (einseitige) *Laplace-Transformation* für ein $u \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{K}^m)$ ist für alle $s \in \mathbb{C}_\alpha := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \alpha\}$ definiert als

$$\hat{u}(s) := (\mathcal{L}u)(s) := \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt.$$

Die Laplace-Transformierte $\hat{u} = \mathcal{L}u$ ist damit eine Funktion von \mathbb{C}_α nach \mathbb{K}^m . \square

Beispiel 5.3 Laplace-Transformationen einiger Funktionen von \mathbb{R}_0^+ nach \mathbb{R} mit $a \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{lll} (a) & u(t) = 1 & \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \\ (b) & u(t) = \sin(\omega t) & \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \\ (c) & u(t) = \cos(\omega t) & \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0 \\ (d) & u(t) = e^{at} & \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) \\ (e) & u(t) = e^{at} \sin(\omega t) & \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + (s+a)^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) \\ (f) & u(t) = e^{at} \cos(\omega t) & \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{s-a}{\omega^2 + (s+a)^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) \\ (g) & u(t) = \frac{t^m}{m!} e^{at} & \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{1}{(s-a)^{m+1}} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) \end{array}$$

\square

Bemerkung 5.4 Wenngleich das Integral in der Laplace-Transformation nur für die hier angegebenen Werte von $\operatorname{Re}(s)$ definiert ist, ist der berechnete Ausdruck für einen größeren Bereich von Werten von s definiert. In (d) beispielsweise ist $\hat{u}(s)$ für alle $s \neq a$ definiert. Im Folgenden werden wir für \hat{u} stets alle Argumente $s \in \mathbb{C}$ zulassen, für die der berechnete Ausdruck definiert ist. \square

Die Umkehrung der Laplace-Transformation ist gegeben durch

$$(\mathcal{L}^{-1}\hat{u})(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{st}\hat{u}(s)ds = \frac{e^{\beta t}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\hat{u}(\beta+i\omega)d\omega.$$

Genauer gilt für alle $u \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{K}^m)$ und beliebiges $\beta > \alpha$ die Gleichung $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}u(t) = u(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}_0^+$; falls u stetig ist gilt dies sogar für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$, vgl. [10, Theorem A.3.19].

Im Folgenden sind einige wichtige Rechenregeln für die Laplace-Transformation aufgeführt. Dabei sind $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $u, u_1, u_2 \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{K}^m)$. Weitere Annahmen sind unten zusammengefasst.

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathcal{L}(a_1u_1 + a_2u_2)(s) &= a_1\hat{u}_1(s) + a_2\hat{u}_2(s) \\ (ii) \quad \mathcal{L}(u(a\cdot))(s) &= \frac{1}{a}\hat{u}\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{für } a > 0 \\ (iii) \quad \mathcal{L}(u(\cdot - a))(s) &= e^{-sa}\hat{u}(s), \quad \text{für } a > 0 \\ (iv) \quad \mathcal{L}(e^{a\cdot}u)(s) &= \hat{u}(s - a) \\ (v) \quad \mathcal{L}(\dot{u})(s) &= s\hat{u}(s) - u(0) \\ (vi) \quad \mathcal{L}\left(\int_0^\cdot u(\tau)d\tau\right)(s) &= \frac{1}{s}\hat{u}(s) \\ (vii) \quad \mathcal{L}(\cdot^k u)(s) &= (-1)^k \frac{d^k \hat{u}}{ds^k}(s) \\ (viii) \quad \mathcal{L}(u_1 \star u_2)(s) &= \hat{u}_1(s)\hat{u}_2(s) \\ (ix) \quad \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} u(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s\hat{u}(s) \end{aligned}$$

In (iii) setzen wir dabei voraus, dass u auf $[-a, \infty)$ definiert ist mit $u(t) = 0$ für alle $t \in [-a, 0]$. In (v) nehmen wir an, dass u auf $(-\varepsilon, \infty)$ für ein $\varepsilon > 0$ definiert und differenzierbar ist. Falls u in 0 unstetig ist, muss $u(0)$ in (v) durch $\lim_{t \rightarrow 0, t < 0} u(t)$ ersetzt werden. In (viii) ist $u_1 \star u_2(t) = \int_0^t u_1(t - \tau)u_2(\tau)d\tau$ die *Faltung*.

5.2 Die Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion dient dazu, das Eingangs-Ausgangsverhalten eines Systems mit Hilfe der Laplace-Transformation auszudrücken. Mit dem Eingangs-Ausgangsverhalten bezeichnet man die Abbildung $u \mapsto y$ mit $y(t) = Cx(t, 0, u)$, also die Abbildung, die der Eingangsfunktion u die Ausgangsfunktion der zugehörigen Lösung mit Anfangswert $x_0 = 0$ zuordnet.

Wir betrachten nun, wie diese Abbildung für die Laplace-transformierten Signale aussieht. Dazu betrachten wir wieder das System (4.1), also

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

Satz 5.5 Betrachte das Kontrollsystem (4.1). Sei $u \in \mathcal{U}$, $u \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^m)$ und $y(t) = Cx(t, 0, u)$. Dann ist y Laplace-transformierbar und es gilt

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$$

mit $G(s) = C(s\text{Id} - A)^{-1}B$.

Beweis: Gemäß (1.12) gilt

$$y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Da $u \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^m)$ gilt, ist u exponentiall beschränkt, ebenso ist $\|e^{At}\|$ durch $e^{\|a\|t}$ exponentiall beschränkt. Folglich ist der Integrand exponentiall beschränkt, damit auch das Integral und weil x und y als Ergebnisse einer Integration zudem stetig sind, gilt $x \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^k)$ für geeignetes (hinreichend großes) $\alpha > 0$.

Wenden wir nun die Laplace-Transformation auf (4.1) an, so erhalten wir mit Rechenregeln (i), (v) und $x_0 = 0$

$$s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s), \quad \hat{y}(s) = C\hat{x}(s)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > \alpha$. Die erste Gleichung ist äquivalent zu

$$s\hat{x}(s) - A\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) \quad \Leftrightarrow \quad (s\text{Id} - A)\hat{x}(s) = B\hat{u}(s).$$

Für alle $s \in \mathbb{C}$, die keine Eigenwerte von A sind (also insbesondere für s mit hinreichend großem Realteil) ist die Matrix auf der linken Seite invertierbar und es folgt

$$\hat{x}(s) = (s\text{Id} - A)^{-1}B\hat{u}(s) \quad \Rightarrow \quad \hat{y}(s) = C\hat{x}(s) = C(s\text{Id} - A)^{-1}B\hat{u}(s) = G(s)\hat{u}(s).$$

□

Definition 5.6 Die Funktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{k \times m}$ aus Satz 5.5 heißt *Übertragungsfunktion* (auf englisch *transfer function*). □

Bemerkung 5.7 (i) Aus der Darstellung

$$(s\text{Id} - A)^{-1} = \frac{1}{\det(s\text{Id} - A)} \text{adj}(s\text{Id} - A)$$

mit der adjunkten Matrix $\text{adj}(s\text{Id} - A)$ folgt, dass $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{k \times m}$ eine matrixwertige Funktion mit rationalen Einträgen ist, d.h. mit Einträgen der Form

$$g_{ij}(s) = \frac{p_{ij}(s)}{q_{ij}(s)} \tag{5.1}$$

mit Polynomen p_{ij}, q_{ij} , für deren Grad gilt¹ $\deg p_{ij} < \deg q_{ij} \leq n$.

(ii) Die sogenannte *Realisierungstheorie* befasst sich mit der Frage, ob es zu einer gegebenen Funktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{k \times m}$ ein Kontrollsystem (4.1) gibt, so dass G die Übertragungsfunktion

¹Für Ausgänge der Form $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ gilt $G(s) = D + C(s\text{Id} - A)^{-1}B$ und $\deg p_{ij} \leq \deg q_{ij} \leq n$.

dieses Kontrollsystems ist. Man kann zeigen, dass das für jede propere² rationale Matrixfunktion tatsächlich der Fall ist, allerdings sind A , B , C und ggf. D dabei in der Regel nicht eindeutig.

(iii) Definieren wir $g(t) := Ce^{At}B$, so folgt aus der Lösungsdarstellung

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = g \star u(t).$$

Mit der Rechenregel (viii) der Laplace-Transformation ergibt sich

$$\hat{y}(s) = \mathcal{L}(g \star u)(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s).$$

Also gilt für die Übertragungsfunktion $G = \hat{g}$ (wenn wir die Definition der Laplace-Transformation in der natürlichen Weise auf matrixwertige Funktionen verallgemeinern). \square

Beispiel 5.8 Wir betrachten das herunterhängende und das invertierte linearisierte Pendel, jeweils ohne Berücksichtigung der Wagenkoordinaten, also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen sei $C = (1 \ 0)$, d.h. der Ausgang misst die Position des Pendels.

Für das herunterhängende Pendel ergibt sich dann

$$(s\text{Id} - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ g & s+k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s+k}{ks+s^2+g} & \frac{1}{ks+s^2+g} \\ \frac{-g}{ks+s^2+g} & \frac{s}{ks+s^2+g} \end{pmatrix}$$

und damit

$$G(s) = C(s\text{Id} - A)^{-1}B = \frac{1}{ks + s^2 + g}.$$

Analog ergibt sich für das invertierte Pendel

$$G(s) = C(s\text{Id} - A)^{-1}B = \frac{1}{ks + s^2 - g}.$$

\square

5.3 Eingangs-Ausgangs Stabilität

Wir führen nun einen Stabilitätsbegriff ein, der zu der Eingangs-Ausgangs-Sichtweise der Übertragungsfunktion G passt.

²Proper heißt, dass $\deg p_{ij} \leq \deg q_{ij}$ für alle i, j .

Definition 5.9 Ein Kontrollsystem heißt *Eingangs-Ausgangs-stabil* (kurz E/A-stabil), falls eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass für jede auf \mathbb{R}_0^+ beschränkte Funktion $u \in \mathcal{U}$ und den zugehörigen Ausgang

$$y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

zum Anfangswert $x_0 = 0$ die Ungleichung $\|y\|_\infty \leq K \|u\|_\infty$ gilt. \square

Bemerkung 5.10 (i) Man kann zeigen, dass E/A-Stabilität äquivalent zu der Implikation “ $\|u\|_\infty < \infty \Rightarrow \|y\|_\infty < \infty$ ” ist. In dieser Form findet sich die Definition der E/A-Stabilität in vielen Büchern. Der Beweis dieser Äquivalenz verlangt aber einige technische Abschätzungen, die wir hier aus Zeitgründen vermeiden. Für unsere Zwecke ist die obige Definition im Folgenden günstiger.

(ii) Um den bisherigen Stabilitätsbegriff (A bzw. das geregelte System mit Feedback ist exponentiell stabil, d.h. alle Eigenwerte von A bzw. des geregelten Systems haben negativen Realteil) von dem Begriff der E/A-Stabilität zu unterscheiden, nennen wir die Stabilität von A auch *Zustandsstabilität*. \square

Eine erste hinreichende und notwendige Bedingung gibt das folgende Lemma.

Lemma 5.11 Ein System (4.1) ist genau dann E/A-stabil, falls für $g(t) = Ce^{At}B$ gilt

$$g_{\max} := \int_0^\infty \|g(t)\| dt < \infty. \quad (5.2)$$

Beweis: “ \Rightarrow ”: Das System sei E/A-stabil. Wir zeigen

$$\int_0^\infty |\gamma_{ij}(t)| dt \leq K \quad (5.3)$$

für alle Komponentenfunktionen γ_{ij} , $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$ von $g = (\gamma_{ij})_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, m}$, woraus (5.2) folgt.

Zu gegebenem $t > 0$ sei dazu u gegeben durch $u(\tau) := \text{sgn}(\gamma_{ij}(t-\tau))e_j$ für $\tau \in [0, t]$. Damit gilt $[g(t-\tau)u(\tau)]_i = |\gamma_{ij}(t-\tau)|$. Setzen wir $u(\tau) = 0$ für $\tau > t$, so gilt $\|u\|_\infty = 1$ und damit für den zugehörigen Ausgang $\|y\|_\infty \leq K$, folglich auch $|y_i(t)| \leq K$ für alle $t \geq 0$. Damit folgt

$$K \geq |y_i(t)| = \left| \int_0^t [g(t-\tau)u(\tau)]_i d\tau \right| = \left| \int_0^t |\gamma_{ij}(t-\tau)| d\tau \right| = \int_0^t |\gamma_{ij}(t-\tau)| d\tau = \int_0^t |\gamma_{ij}(\tau)| d\tau.$$

Weil dies für alle $t \geq 0$ gilt, folgt (5.3).

“ \Leftarrow ”: Es sei $g_{\max} < \infty$ und es sei u ein Eingangssignal mit $\|u\|_\infty < \infty$. Dann gilt für alle $t \geq 0$

$$\|y(t)\| = \left\| \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau \right\| \leq \int_0^t \|g(t-\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau \leq \int_0^t \|g(t-\tau)\| d\tau \|u\|_\infty = g_{\max} \|u\|_\infty.$$

Folglich ist das System E/A-stabil mit $K = g_{\max}$. \square

Korollar 5.12 Falls (4.1) zustandsstabil ist, ist (4.1) auch E/A-stabil.

Beweis: Falls (4.1) zustandsstabil ist, ist A exponentiell stabil. Also gilt nach Satz 3.5 die Ungleichung $\|e^{At}\| \leq ce^{-\sigma t}$ für Konstanten $c, \sigma > 0$ und alle $t \geq 0$. Damit folgt $\|g(t)\| \leq \|C\|ce^{-\sigma t}\|B\|$ und damit

$$\int_0^\infty \|g(t)\| dt \leq \int_0^\infty \|C\|ce^{-\sigma t}\|B\| dt = \frac{c\|C\|\|B\|}{\sigma} < \infty.$$

□

Die Umkehrung dieses Korollars gilt offensichtlich nicht; ein einfaches Gegenbeispiel erhalten wir, wenn wir $C = 0$ setzen, da das System dann wegen $y(t) \equiv 0$ für alle $u \in \mathcal{U}$ trivialerweise E/A-stabil mit $K = 0$ ist, egal ob die Matrix A stabil ist oder nicht.

Die Überprüfung des Kriteriums (5.2) ist im Allgemeinen mühsam, weil hier ein uneigentliches Integral abgeschätzt werden muss. Falls aber die Übertragungsfunktion G bekannt ist, so lässt sich dies Kriterium leicht anhand dieser Funktion überprüfen. Wir erinnern dazu daran, dass ein $s^* \in \mathbb{C}$ Polstelle einer rationalen (Matrix-)Funktion G heißt, wenn $\|G(s_n)\| \rightarrow \infty$ gilt für $s_n \rightarrow s^*$.

Satz 5.13 Gegeben sei ein Kontrollsystem (4.1) mit Übertragungsfunktion G . Dann ist das System genau dann E/A-stabil, wenn alle Polstellen s^* von G in der offenen linken komplexen Halbebene $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$ liegen, also $\operatorname{Re}(s^*) < 0$ erfüllen.

Beweis: “ \Rightarrow ”: Wenn das System E/A-stabil ist, gilt nach Lemma 5.11 die Ungleichung $g_{\max} = \int_0^\infty \|g(t)\| dt < \infty$. Damit folgt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ die Ungleichung

$$\|G(s)\| = \left\| \int_0^\infty g(t)e^{-st} dt \right\| \leq \int_0^\infty \|g(t)\| \underbrace{|e^{-st}|}_{\leq 1} dt \leq \int_0^\infty \|g(t)\| dt = g_{\max},$$

weswegen G keine Polstellen außerhalb von \mathbb{C}^- haben kann.

“ \Leftarrow ”: Es seien $\gamma_{ij}(t)$ die Komponenten der Funktion $g(t) = Ce^{At}B$. Aus Bemerkung 5.7 folgt, dass die Einträge von G durch $g_{ij} = \hat{\gamma}_{ij}$ gegeben sind. Aus der Form der Matrix-Exponentialfunktion folgt, dass die $\gamma_{ij}(t)$ von der Form

$$\gamma_{ij}(t) = \sum_{p=1}^q \mu_p e^{\lambda_p t} \frac{t^{k_p}}{k_p!}$$

sind, wobei die λ_j Eigenwerte von A sind. Aus Beispiel 5.3(g) folgt daher

$$g_{ij}(s) = \hat{\gamma}_{ij}(s) = \sum_{p=1}^q \mu_j \frac{1}{(s - \lambda_p)^{k_p+1}}.$$

Hieraus folgt, dass die Polstellen von G gerade durch die λ_p gegeben sind. Aus der Annahme an die Polstellen von G folgt daher, dass alle λ_p in \mathbb{C}^- liegen. Daraus folgt wiederum, dass das Integral $\int_0^\infty \gamma_{ij}(t) dt$ für alle i, j endlich ist, womit auch $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$ ist. Gemäß Lemma 5.11 ist das System damit E/A-stabil. □

Beispiel 5.14 Für das Pendel sieht man mit diesem Kriterium leicht, dass das herunterhängende Pendel E/A-stabil ist, weil die Polstellen (also die Nullstellen des Nenners) gegeben sind durch $-k/2 \pm \sqrt{k^2 - 4g}/2$ und damit stets negativen Realteil besitzen. Analog sieht man beim invertierten Pendel an den Polstellen $-k/2 \pm \sqrt{k^2 + 4g}/2$, von denen einer positiven Realteil besitzt, dass das invertierte Pendel nicht E/A-stabil ist. \square

Bemerkung 5.15 (i) Der Beweis zeigt, dass alle Polstellen von G Eigenwerte von A sind. Dies erklärt den Namen Polverschiebungssatz für Satz 3.26.

(ii) Im Allgemeinen sind nicht alle Eigenwerte von A Polstellen von G . Zum einen fehlen diejenigen Eigenwerte, für die der zugehörige Eigenraum in \mathcal{N} liegt, für die man also die darin liegenden Lösungen nicht beobachten kann. Zum anderen fehlen die Eigenwerte, deren Eigenräume man von $x_0 = 0$ aus nicht erreichen kann, weil sie nicht in der Erreichbarkeitsmenge \mathcal{R} liegen.

Falls das System kontrollierbar und beobachtbar ist, sind alle Eigenwerte von A Pole von G , was man auch beim Vergleich von Beispiel 5.14 mit Beispiel 3.6 sieht. Falls das System stabilisierbar und asymptotisch beobachtbar ist, sind alle instabilen Eigenwerte (also diejenigen mit positivem Realteil) Pole von G . In diesen Fällen ist Zustandsstabilität äquivalent zur E/A-Stabilität. \square

5.4 Feedbacks im Frequenzbereich

Um ein Feedback bzw. eine Rückkopplung im Frequenzbereich formulieren zu können, müssen wir das Konzept zuerst etwas erweitern. Dazu beobachten wir zuerst, dass wir sowohl das statische Feedback-Konzept mit $u(t) = Fx(t)$ als auch das dynamische Konzept mit der $u(t) = Fz(t)$ und der Differentialgleichung $\dot{z}(t) = (J + KF)z(t) + Ly(t)$ leicht Laplace-transformieren können. Es ergeben sich die Übertragungsfunktionen

$$K(s) = F \quad \text{bzw.} \quad K(s) = F(s\text{Id} - M)^{-1}L,$$

wobei wir im ersten Fall $C = \text{Id}$ annehmen und im zweiten Fall kurz $M = J + KF$ geschrieben haben. Ein geschlossener Regelkreis kann also immer als eine Verkopplung zweier Übertragungsfunktionen G und K dargestellt werden. Konsistent mit dem E/A-Konzept wäre es nun, wenn solch eine Verkopplung selbst wieder eine Übertragungsfunktion wäre. Dazu brauchen wir aber einen Eingang für unser geregeltes System, den wir bisher nicht hatten, da der ursprüngliche Eingang ja mit $u = Fx$ bzw. $u = Fz$ "belegt" ist. Zur Abhilfe führen wir einen neuen Eingang $w(t)$ ein, indem wir $Fx(t)$ bzw. $Ly(t)$ durch $F(x(t) + w(t))$ bzw. $L(y(t) + w(t))$ ersetzen.

Satz 5.16 Gegeben seien zwei Übertragungsfunktionen G und K passender Dimension, die mittels $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$ und $\hat{u}(s) = K(\hat{y}(s) + \hat{w}(s))$ verkopplert sind. Dann gilt

$$\hat{y}(s) = (\text{Id} - G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)\hat{w}(s)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ für die $\text{Id} - G(s)K(s)$ invertierbar ist.

Beweis: Aus den beiden angegebenen Gleichungen folgt

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) = G(s)K(\hat{y}(s) + \hat{w}(s)).$$

Umstellen liefert, dass diese Gleichung äquivalent ist zu

$$(\text{Id} - G(s)K(s))\hat{y}(s) = G(s)K(s)\hat{w}(s),$$

woraus die behauptete Gleichung sofort folgt. \square

Das Feedback-Stabilisierungsproblem besteht im Frequenzraum nun darin, eine Übertragungsfunktion K zu finden, so dass $(\text{Id} - G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)$ stabil ist, also nur Polstellen in \mathbb{C}^- besitzt. Dafür gibt es insbesondere im Fall, dass u und y eindimensional sind, eine ganze Reihe von Techniken, die wir hier aus Zeitgründen aber nicht besprechen wollen.

Wir wollen stattdessen noch kurz darauf eingehen, was die Rolle des neuen Eingangsignals im stabilisierten System ist. Dazu betrachten wir der Einfachheit halber den Fall eines statischen stabilisierenden Feedbacks $u = Fx$ und $C = \text{Id}$. Dann ergeben sich die Lösungen des geregelten Systems mit dem neuen Eingang zu

$$x(t) = e^{(A+BF)t}x_0 + \underbrace{\int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)}BFw(\tau)d\tau}_{=:v(t)}.$$

Exponentielle Stabilität ist nun äquivalent dazu, dass $e^{(A+BF)t}$ gegen 0 konvergiert für $t \rightarrow \infty$. Damit gilt

$$\|x(t) - v(t)\| \leq ce^{-\sigma t}\|x_0\|,$$

d.h. die Lösung konvergiert gegen $v(t)$. Stabilität stellt also sicher, dass die Lösung unabhängig vom Anfangswert gegen eine wohldefinierte Grenzfunktion konvergiert, die nur vom Eingang $w(t)$ abhängt. Dies ist eine neue Interpretation der Stabilität, die äquivalent zur E/A-Stabilität ist und daher wie diese aus der Stabilität des Systems im Sinne von Kapitel 3 und 4 folgt. Im Fall $w \equiv 0$ gilt für diese Grenzfunktion $v \equiv 0$ und wir befinden uns gerade wieder in der Situation dieser Kapitel.

5.5 Grafische Analyse

Wir betrachten in diesem Abschnitt zwei in der Regelungstechnik übliche grafische Darstellungsweisen. Diese sind auf Systeme mit eindimensionalem Eingang und Ausgang, also $m = k = 1$ anwendbar. Beachte, dass die Übertragungsfunktion G in diesem Fall eine skalare Funktion ist. Systeme dieser Art werden als SISO-Systeme (Single Input Single Output) bezeichnet.

Das Bodediagramm

Das Bodediagramm³ dient dazu, den Zusammenhang zwischen u und y grafisch zu veranschaulichen. Insbesondere wird durch diese Interpretation klar, warum die Betrachtung der Laplace-Transformierten “Analyse im Frequenzbereich” genannt wird. Zur Vorbereitung benötigen wir zunächst den folgenden Satz.

³Hendrik Wade Bode (1905–1982), US-amerikanischer Elektrotechniker

Satz 5.17 Betrachte die Übertragungsfunktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für ein E/A-stabiles SISO-System der Form (4.1). Dann konvergiert das Ausgangssignal $y(t)$ zum Eingangssignal $u(t) = \sin(\omega t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen die Funktion

$$y_\infty(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)),$$

wobei φ eine Argumentfunktion⁴ von $\omega \mapsto G(\omega i)$ ist.

Beweis: Siehe [10, Proposition 2.3.22].

Die Werte der Übertragungsfunktion G entlang der imaginären Achse $i\mathbb{R}$ — der sogenannte *Frequenzgang* von G — haben also eine ganz konkrete Bedeutung für das Verhalten des Ausgangs $y(t)$ bei sinusförmigen Eingängen $u(t)$: Das Ausgangssignal wird gerade dadurch erzeugt, dass das Eingangssignal um $|G(i\omega)|$ verstärkt wird und die Phase um $\varphi(\omega)$ verschoben wird.

Abbildung 5.5 illustriert dies an Hand des (herunterhängenden) Pendelmodells mit $k = 0.1$ und $g = 9.81$. Hier ist der numerisch simulierte Ausgang für den Eingang $u(t) = \sin(\omega t)$ für $\omega = 4$ zu sehen. Man erkennt, dass das Ausgangssignal eine Amplitude von etwa 0.16 besitzt und die Phase um ca. π gegenüber dem Eingangssignal verschoben ist; das Pendel pendelt also gegenläufig zur periodischen Wagenbewegung und mit kleineren Ausschlägen. Für die zugehörige Übertragungsfunktion gilt $|G(i4)| = 0.1612$ und $\arg(G(i4)) = -3.077$, was diese Beobachtung genau bestätigt.

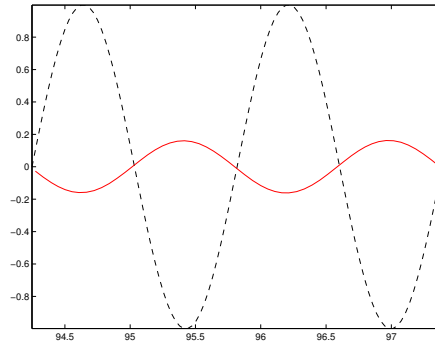


Abbildung 5.1: Eingang (schwarz gestrichelt) mit Frequenz $\omega = 4$ und zugehöriger Ausgang (rot) für das herunterhängende Pendel

Diese direkte Beziehung zwischen Übertragungsfunktion und Ausgangssignal bedeutet umgekehrt, dass durch das Messen der Amplitude und der Phase des Ausgangs bei sinusförmigem Eingang die Werte $G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$ leicht errechnet werden können. Die Übertragungsfunktion kann auf der imaginären Achse also durch experimentelle Messungen bestimmt werden.

Diese Tatsache gewinnt durch einen Satz aus der Funktionentheorie besondere Bedeutung: Man kann nämlich beweisen, dass die Funktion $G(i\omega)$ durch ihre Werte auf $i\mathbb{R}$ eindeutig

⁴Sei I ein Intervall. Eine stetige Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Argumentfunktion* einer Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wenn $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}$ gilt für alle $t \in I$. Wir schreiben dann kurz $\varphi = \arg \gamma$.

bestimmt ist. Genauer folgt aus der Integralformel von Cauchy für E/A-stabile Systeme (4.1) die Darstellung

$$G(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(i\omega)}{i\omega - s} d\omega$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ (beachte, dass hier wichtig ist, dass kein “ $Du(t)$ ” in der Formel für $y(t)$ in (4.1) auftaucht; ansonsten muss die Formel modifiziert werden). Da zudem $G(i\omega) \rightarrow 0$ gilt für $\omega \rightarrow \pm\infty$, kann das obige Integral durch ein Integral mit kompaktem Integrationsintervall approximiert werden. Folglich kann die komplette Übertragungsfunktion eines E/A-stabilen Systems aus Messdaten für sinusförmige Eingangssignale rekonstruiert werden, vgl. [13, Abschnitt 6.5.3].

Grafisch werden diese Messdaten nun in dem sogenannten Bodediagramm dargestellt, wobei für die Frequenz und für den Betrag $|G(i\omega)|$ logarithmische Skalen verwendet wird. In Abbildung 5.2 ist dieses Diagramm für das herunterhängende Pendel, wiederum mit $k = 0.1$ und $g = 9.81$ dargestellt.

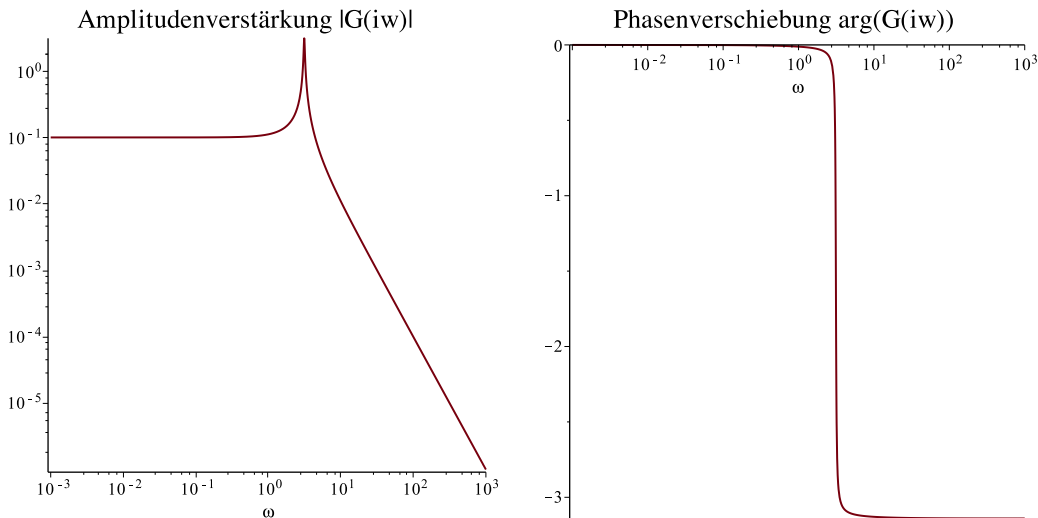


Abbildung 5.2: Bodediagramm für das herunterhängende Pendel

Das linke Diagramm besagt, dass das Eingangssignal zunächst schwach, mit steigender Frequenz bis zu etwa $\omega = 3$ dann aber immer stärker verstärkt wird, während die Verstärkung für größere ω dann wieder abnimmt. Die Phase bleibt dabei für kleine ω fast unverändert, um dann ab etwa $\omega = 3$ abrupt um ca. $-\pi$ verschoben zu werden. Genau dies Verhalten zeigt sich in den numerischen Simulationen in Abbildung 5.3.

Das Nyquistdiagramm

Das Nyquistdiagramm⁵ dient dazu, um zu prüfen, ob ein Feedbacksystem E/A-stabil ist. Wie beim Bodediagramm kann die Grafik dabei allein aus Messwerten erstellt werden und die Stabilität damit experimentell verifiziert werden.

⁵Harry Nyquist (1889–1976), US-Amerikanischer Elektrotechniker

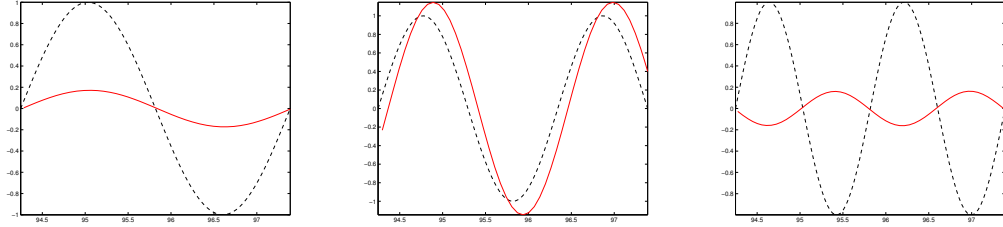


Abbildung 5.3: Eingang (schwarz gestrichelt) und Ausgang (rot) für das herunterhängende Pendel mit $\omega = 2, 3, 4$ von links nach rechts

Die Übertragungsfunktion eines Feedbacksystems ist nach Satz 5.16 im SISO-Fall gegeben durch

$$G_{cl} := \frac{G(s)K(s)}{1 - G(s)K(s)}.$$

Diese ist nach Satz 5.13 genau dann E/A-stabil, wenn keine Polstellen in der abgeschlossenen rechten Halbebene liegen. Hinreichend dafür ist, dass $F(s) := 1 - G(s)K(s)$ keine Nullstellen in der abgeschlossenen rechten Halbebene besitzt, was genau dann der Fall ist, wenn $G_0(s) := -G(s)K(s)$ in der rechten Halbebene nie den Wert 1 annimmt.

Das Nyquistdiagramm⁶ stellt nun die Werte von $G_0(\omega i)$ für $\omega \in (-\infty, \infty)$, grafisch dar. Praktisch wird dies dadurch näherungsweise realisiert, dass Werte von $-R$ bis R für ein großes $R \in \mathbb{R}$ an Stelle von $\pm\infty$ verwendet werden. Da $G(s)K(s)$ die Übertragungsfunktion der Hintereinanderschaltung von Feedback und System ist, können diese Werte dieses Produkts wiederum experimentell ermittelt werden.

In Abbildung 5.4 sind diese Kurven für das invertierte Pendel mit $G(s) = 1/(ks + s^2 - g)$ mit $k = 0.1$ und $g = 9.81$ und das statische Feedback $K = -1$ (links) und $K = -10$ (rechts) dargestellt.

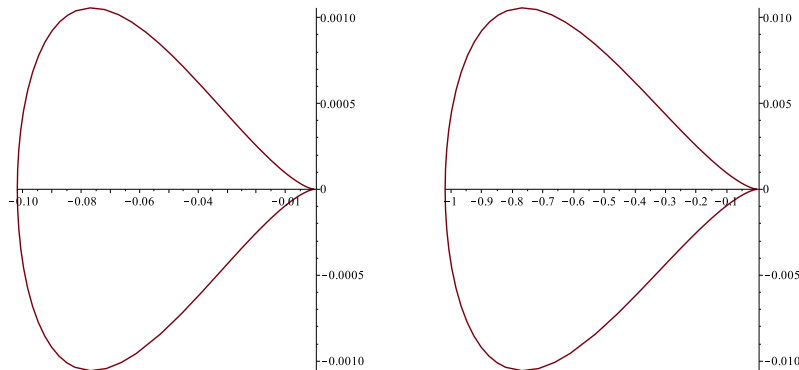


Abbildung 5.4: Nyquistdiagramm für das invertierte Pendel mit $K = -1$ (links) und $K = -10$ (rechts)

⁶Wir stellen hier nur die Version für $D = 0$ vor, siehe z.B. [13, Abschnitt 8.5] für den allgemeinen Fall.

Betrachtung der Zähler- und Nennerpolynome in G_0 liefert nun das folgende Stabilitätskriterium.

Nyquistkriterium: Es sei $n^+ \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Polstellen von G_0 mit positivem Realteil, zudem habe G_0 keine Polstellen mit Realteil gleich 0. Dann ist das Feedbacksystem mit Übertragungsfunktion G_{cl} genau dann E/A-stabil, wenn die Ortskurve $G(\omega i)$ für $\omega = -\infty \dots, \infty$ den Punkt $-1 = -1 + 0i \in \mathbb{C}$ genau n^+ -mal entgegen dem Uhrzeigersinn umläuft.

In unserem Beispiel aus Abbildung 5.4 hat G_0 wegen $K = \text{const}$ gerade die gleichen Polstellen wie G ; also existiert eine Polstelle mit positivem Realteil und keine mit Realteil 0. Folglich muss die Ortskurve einmal entgegen dem Uhrzeigersinn um den Punkt $-1 + 0i$ laufen. Dies ist in der linken Kurve für $K = -1$ offenbar nicht der Fall. Es trifft aber in der rechten Kurve für $K = -10$ zu (die Umlaufrichtung ist in dieser Grafik natürlich nicht zu sehen, verläuft aber tatsächlich entgegen dem Uhrzeigersinn). Eine Analyse im Zeitbereich zeigt, dass die zugehörige closed-loop Matrix für $K = -1$ bzw. $K = -10$ gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g - K & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8.81 & -0.1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.19 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Eine Analyse der Eigenwerte dieser Matrix bestätigt die Instabilität für $K = -1$ und die Stabilität für $K = -10$. Tatsächlich liegt die Grenze zwischen Instabilität und Stabilität gerade bei $K = -9.81$.

Kapitel 6

Optimale Stabilisierung

Die in Kapitel 3 vorgestellte Methode zur Berechnung stabilisierender Feedbacks hat den Nachteil, dass man zwar die Eigenwerte bestimmen kann, ansonsten aber relativ wenig Einflussmöglichkeiten auf die Dynamik des geregelten Systems hat. So ist es z.B. oft so, dass große Werte der Kontrollvariablen u nur mit großem Energieaufwand zu realisieren sind (wie im Pendelmodell, wo u gerade die Beschleunigung des Wagens ist), weswegen man große Werte vermeiden möchte. Im Heizungsmodell andererseits möchte man z.B. Überschwingen (d.h. starke Schwankungen bis zum Erreichen der gewünschten Temperatur) vermeiden.

Wir werden deshalb in diesem Kapitel einen Ansatz verfolgen, der — zumindest implizit — größeren Einfluss auf das Verhalten des geregelten Systems ermöglicht, indem wir Methoden der Optimierung zur Berechnung der Feedback-Matrix F verwenden. Wir nehmen dabei aus Vereinfachungsgründen wieder an, dass wie in Kapitel 3 der gesamte Zustandsvektor x für die Regelung zur Verfügung steht. Zudem betrachten wir hier ausführlich nur solche Optimierungsprobleme, die direkt mit dem Stabilisierungsproblem in Zusammenhang stehen und werden andere Probleme nur kurz streifen.

6.1 Grundlagen der optimalen Steuerung

In diesem Abschnitt werden wir einige Grundlagen der optimalen Steuerung herleiten, die zur Lösung unseres Problems nötig sind. Da es für die abstrakten Resultate keinen Unterschied macht, ob die Dynamik linear oder nichtlinear ist, betrachten wir hier allgemeine Kontrollsysteme der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (6.1)$$

unter der Annahme, dass $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist und für ein $L > 0$ die Lipschitz-Bedingung

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad (6.2)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und alle $u \in \mathbb{R}^m$ erfüllt. Unter dieser Bedingung kann man den aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssatz so modifizieren, dass er für jede stückweise stetige Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ und

jeden Anfangswert x_0 die Existenz einer eindeutigen Lösung $x(t, x_0, u)$ mit $x(0, x_0, u) = x_0$ liefert.

Wir definieren nun das optimale Steuerungsproblem, mit dem wir uns im Folgenden beschäftigen wollen.

Definition 6.1 Für eine stetige nichtnegative *Kostenfunktion* $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definieren wir das *Funktional*

$$J(x_0, u) := \int_0^\infty g(x(t, x_0, u), u(t)) dt.$$

Das optimale Steuerungsproblem ist damit gegeben durch das Optimierungsproblem

$$\text{Minimiere } J(x_0, u) \text{ über } u \in \mathcal{U} \text{ für jedes } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion

$$V(x_0) := \inf_{u \in \mathcal{U}} J(x_0, u)$$

wird als *optimale Wertefunktion* dieses optimalen Steuerungsproblems bezeichnet. Ein Paar $(x^*, u^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ mit $J(x^*, u^*) = V(x^*)$ wird als *optimales Paar* bezeichnet. \square

Als Funktionenraum \mathcal{U} wählen wir hierbei wie bisher den Raum der stückweise stetigen Funktionen, und nehmen dabei zusätzlich an, dass jede Funktion u auf jedem kompakten Intervall beschränkt ist und dass die Funktionen u rechtsseitig stetig sind, d.h., dass für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ die Bedingung $\lim_{t \searrow t_0} u(t) = u(t_0)$ gilt. Beachte dass wir die zweite Annahme o.B.d.A. machen können, da die Lösung nicht vom Wert von u in der Sprungstelle abhängt.

Beachte, dass das Funktional $J(x_0, u)$ nicht endlich sein muss. Ebenso muss das Infimum in der Definition von V kein Minimum sein.

Der erste Satz dieses Kapitels liefert eine Charakterisierung der Funktion V .

Satz 6.2 (Prinzip der dynamischen Programmierung oder Bellman'sches Optimalitätsprinzip)

(i) Für die optimale Wertefunktion gilt für jedes $\tau > 0$

$$V(x_0) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + V(x(\tau, x_0, u)) \right\}.$$

(ii) Für ein optimales Paar (x^*, u^*) gilt für jedes $\tau > 0$

$$V(x^*) = \int_0^\tau g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt + V(x(\tau, x^*, u^*)).$$

Beweis: (i) Wir zeigen zunächst

$$V(x_0) \leq \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + V(x(\tau, x_0, u))$$

für alle $u \in \mathcal{U}$ und alle $\tau > 0$. Sei dazu $x_\tau = x(\tau, x_0, u)$, $\varepsilon > 0$ beliebig und $u_\tau \in \mathcal{U}$ so gewählt, dass

$$J(x_\tau, u_\tau) \leq V(x_\tau) + \varepsilon$$

gilt. Sei $\tilde{u} = u \& \tau u_\tau(\cdot - \tau)$ (vgl. Definition 1.7). Dann gilt

$$\begin{aligned} V(x_0) &\leq \int_0^\infty g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t)) dt \\ &= \int_0^\tau g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t)) dt + \int_\tau^\infty g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t)) dt \\ &= \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + \int_\tau^\infty g(\underbrace{x(t, x_0, \tilde{u})}_{=x(t-\tau, x_\tau, u_\tau)}, u_\tau(t-\tau)) dt \\ &= \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + \int_0^\infty g(x(t, x_\tau, u_\tau), u_\tau(t)) dt \\ &= \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + J(x_\tau, u_\tau) \leq \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + V(x_\tau) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die behauptete Ungleichung.

Als zweiten Schritt zeigen wir

$$V(x_0) \geq \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + V(x(\tau, x_0, u)) \right\}.$$

Sei dazu wiederum $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen u_0 so, dass $V(x_0) \geq J(x_0, u_0) - \varepsilon$ gilt und schreiben $x_\tau = x(\tau, x_0, u_0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} V(x_0) &\geq \int_0^\infty g(x(t, x_0, u_0), u_0(t)) dt - \varepsilon \\ &= \int_0^\tau g(x(t, x_0, u_0), u_0(t)) dt + \int_\tau^\infty g(x(t, x_0, u_0), u_0(t)) dt - \varepsilon \\ &= \int_0^\tau g(x(t, x_0, u_0), u_0(t)) dt + \int_0^\infty g(x(t, x(\tau, x_0, u_0), u_0(\cdot + \tau)), u_0(t + \tau)) dt - \varepsilon \\ &= \int_0^\tau g(x(t, x_0, u_0), u_0(t)) dt + J(x(\tau, x_0, u_0), u_0(\cdot + \tau)) - \varepsilon \\ &\geq \int_0^\tau g(x(t, x_0, u_0), u_0(t)) dt + V(x(\tau, x_0, u_0)) - \varepsilon \\ &\geq \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + V(x(\tau, x_0, u)) \right\} - \varepsilon \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

(ii) Aus (i) folgt sofort die Ungleichung

$$V(x^*) \leq \int_0^\tau g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt + V(x(\tau, x^*, u^*)).$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus

$$\begin{aligned}
 V(x^*) &= \int_0^\infty g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt \\
 &= \int_0^\tau g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt + \int_\tau^\infty g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt \\
 &= \int_0^\tau g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt + \int_0^\infty g(x(t, x(\tau, x^*, u^*), u^*(\cdot + \tau)), u^*(t + \tau)) dt \\
 &= \int_0^\tau g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt + J(x(\tau, x^*, u^*), u^*(\cdot + \tau)) \\
 &\geq \int_0^\tau g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt + V(x(\tau, x^*, u^*))
 \end{aligned}$$

□

Eine Folgerung dieses Prinzips liefert das folgende Korollar.

Korollar 6.3 Sei (x^*, u^*) ein optimales Paar. Dann ist $(x(\tau, x^*, u^*), u^*(\cdot + \tau))$ für jedes $\tau > 0$ ein optimales Paar.

Beweis: Übungsaufgabe.

Anschaulich besagt Korollar 6.3, dass Endstücke optimaler Trajektorien selbst wieder optimale Trajektorien sind.

Durch einen geschickten Grenzübergang für $\tau \rightarrow 0$ können wir die Gleichung aus Satz 6.2 als (partielle) Differentialgleichung ausdrücken.

Satz 6.4 (Hamilton-Jacobi-Bellman Differentialgleichung)

Es sei g stetig in x und u . Zudem sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V|_O$ endlich.

(i) Wenn V in $x_0 \in O$ stetig differenzierbar ist, so folgt

$$DV(x_0) \cdot f(x_0, u_0) + g(x_0, u_0) \geq 0$$

für alle $u_0 \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Wenn (x^*, u^*) ein optimales Paar ist und V stetig differenzierbar in $x^* \in O$ ist, so folgt

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} \{DV(x^*) \cdot f(x^*, u) + g(x^*, u)\} = 0, \quad (6.3)$$

wobei das Minimum in $u^*(0)$ angenommen wird. Gleichung (6.3) wird *Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung* genannt.

Beweis: Wir zeigen zunächst für alle $u \in \mathcal{U}$ die Hilfsbehauptung

$$\lim_{\tau \searrow 0} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt = g(x_0, u(0)).$$

Wegen der (rechtssitigen) Stetigkeit von x und u in t und der Stetigkeit von g in x existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $t_1 > 0$ mit

$$|g(x(t, x_0, u), u(t)) - g(x_0, u(0))| \leq \varepsilon$$

für alle $t \in [0, t_1]$. Damit folgt für $\tau \in (0, t_1]$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt - g(x_0, u(0)) \right| &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |g(x(t, x_0, u), u(t)) - g(x_0, u(0))| dt \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varepsilon dt = \varepsilon \end{aligned}$$

und damit die Aussage für den Limes, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Hiermit folgen nun beide Behauptungen:

(i) Aus Satz 6.2(i) folgt für $u(t) \equiv u_0 \in \mathbb{R}^m$

$$V(x_0) \leq \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + V(x(\tau, x_0, u))$$

und damit

$$\begin{aligned} DV(x_0)f(x_0, u(0)) &= \lim_{\tau \searrow 0} \frac{V(x(\tau, x_0, u)) - V(x_0)}{\tau} \\ &\geq \lim_{\tau \searrow 0} -\frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(x(t, x_0, u), u(t)) dt = -g(x_0, u(0)), \end{aligned}$$

also die Behauptung.

(ii) Aus (i) folgt

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{DV(x^*) \cdot f(x^*, u) + g(x^*, u)\} \geq 0.$$

Aus Satz 6.2(ii) folgt zudem

$$V(x^*) = \int_0^\tau g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt + V(x(\tau, x^*, u^*)).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} DV(x^*)f(x^*, u^*(0)) &= \lim_{\tau \searrow 0} \frac{V(x(\tau, x^*, u^*)) - V(x^*)}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \searrow 0} -\frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(x(t, x^*, u^*), u^*(t)) dt = -g(x^*, u^*(0)), \end{aligned}$$

woraus die Existenz des Minimums in $u = u^*(0)$ und die behauptete Gleichheit folgt. \square

Satz 6.4 gibt *notwendige* Optimalitätsbedingungen, d.h. Bedingungen die die optimale Wertefunktion bzw. ein optimales Paar erfüllen *muss* — vorausgesetzt die optimale Wertefunktion ist stetig differenzierbar. Im Allgemeinen folgt aus der Erfüllung der angegebenen notwendigen Bedingungen aber noch nicht, dass eine Funktion tatsächlich eine optimale Wertefunktion ist oder ein Paar ein optimales Paar. Hierzu braucht man *hinreichende* Optimalitätsbedingungen, die wir im Folgenden untersuchen.

Zur Herleitung der hinreichenden Bedingungen brauchen wir zusätzliche Annahmen, für deren genaue Ausgestaltung es verschiedene Möglichkeiten gibt. Da wir die optimale Steuerung auf das Stabilisierungsproblem anwenden wollen, verwenden wir dazu die folgende Definition.

Definition 6.5 Für das Kontrollsystem gelte $f(0, 0) = 0$, d.h. der Nullpunkt ist ein Gleichgewicht für $u = 0$. Dann nennen wir das optimale Steuerungsproblem *nullkontrollierend*, falls die Implikation

$$J(x_0, u) < \infty \quad \Rightarrow \quad x(t, x_0, u) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

gilt. □

Nun können wir die hinreichende Bedingung formulieren.

Satz 6.6 (Hinreichende Optimalitätsbedingung)

Betrachte ein nullkontrollierendes optimales Steuerungsproblem. Es sei $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine differenzierbare Funktion, die die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} \{DW(x)f(x, u) + g(x, u)\} = 0$$

erfüllt und für die $W(0) = 0$ gilt.

Zu gegebenem $x^* \in \mathbb{R}^n$ sei $u^* \in \mathcal{U}$ eine Kontrollfunktion, so dass für die zugehörige Lösung $x(t, x^*, u^*)$ und alle $t \geq 0$ das Minimum in der obigen Gleichung für $x = x(t, x^*, u^*)$ in $u = u^*(t)$ angenommen wird.

Dann ist (x^*, u^*) ein optimales Paar und es gilt

$$V(x(t, x^*, u^*)) = W(x(t, x^*, u^*))$$

für alle $t \geq 0$.

Beweis: Es sei $u \in \mathcal{U}$ und $x(t) = x(t, x^*, u)$ die zugehörige Lösungsfunktion. Wir zeigen zunächst die Ungleichung

$$J(x^*, u) \geq W(x^*).$$

Im Falle $J(x^*, u) = \infty$ ist nichts zu zeigen, es reicht also den Fall $J(x^*, u) < \infty$ zu betrachten. Aus der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung folgt

$$\frac{d}{dt}W(x(t)) = DW(x(t))f(x(t), u(t)) \geq -g(x(t), u(t)),$$

und damit mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$W(x(T)) - W(x^*) = \int_0^T \frac{d}{dt}W(x(t))dt \geq - \int_0^T g(x(t), u(t))dt.$$

Daraus folgt

$$J(x^*, u) \geq \int_0^T g(x(t), u(t))dt \geq W(x^*) - W(x(T)).$$

für alle $T > 0$. Da das Problem nullkontrollierend ist und $J(x^*, u) < \infty$ gilt, folgt $x(T) \rightarrow 0$ für $T \rightarrow \infty$ und damit wegen der Stetigkeit von W und $W(0) = 0$ auch $W(x(T)) \rightarrow 0$. Dies zeigt $J(x^*, u) \geq W(x^*)$.

Schließlich zeigen wir noch

$$J(x^*, u^*) \leq W(x^*),$$

woraus sowohl die Optimalität von u^* als auch die Gleichung $V(x^*) = W(x^*)$ folgt. Für die Kontrolle u^* und die zugehörige Lösung $x^* = x(t, x^*, u^*)$ folgt aus der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

$$\frac{d}{dt}W(x^*(t)) = DW(x^*(t))f(x^*(t), u^*(t)) = -g(x^*(t), u^*(t)),$$

und analog zu oben

$$J(x^*, u^*) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T g(x^*(t), u^*(t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} (W(x^*) - W(x(T))) \leq W(x^*),$$

wobei wir im letzten Schritt die Nichtnegativität von W verwendet haben. \square

Beachte, dass beide Sätze dieses Abschnitts nur anwendbar sind, wenn V bzw. W differenzierbar sind. Diese Annahme ist im allgemeinen nichtlinearen Fall sehr einschränkend¹. Zudem ist es im Allgemeinen sehr schwierig, die Funktion V mittels dieser Gleichung zu bestimmen, selbst wenn sie differenzierbar ist.

Im linearen Fall hingegen vereinfacht sich das Problem und die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung so weit, dass eine explizite Lösung möglich ist, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

6.2 Das linear-quadratische Problem

Wir kommen nun zurück zu unserem linearen Kontrollsystem (1.2)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) =: f(x(t), u(t)).$$

Um eine schöne Lösungstheorie zu erhalten, müssen wir auch für die Kostenfunktion $g(x, u)$ eine geeignete Struktur annehmen.

Definition 6.7 Eine quadratische Kostenfunktion $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist gegeben durch

$$g(x, u) = \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & R \\ R^T & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

mit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $N \in \mathbb{R}^{m \times m}$, so dass $G := \begin{pmatrix} M & R \\ R^T & N \end{pmatrix}$ symmetrisch und positiv definit ist. \square

¹Die nichtlineare Theorie dieser Gleichungen verwendet den verallgemeinerten Lösungsbegriff der "Viskositätslösungen", der auch für nichtdifferenzierbare Funktionen V sinnvoll ist.

Hieraus ergibt sich der Name “linear-quadratisches” optimales Steuerungsproblem: die Dynamik ist linear und die Kostenfunktion ist quadratisch.

Wir zeigen zunächst, dass dieses Problem nullkontrollierend ist.

Lemma 6.8 Das linear-quadratische Problem ist nullkontrollierend im Sinne von Definition 6.5.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Ungleichungen

$$g(x, u) \geq c_1 \|x\|^2 \quad \text{und} \quad g(x, u) \geq c_2 \|f(x, u)\|^2 \quad (6.4)$$

für geeignete Konstanten $c_1, c_2 > 0$.

Da die Matrix G positiv definit ist, folgt aus Lemma Lemma 3.9 die Ungleichung

$$g(x, u) \geq c_1 \left\| \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right\|^2 \geq c_1 \|x\|^2, \quad (6.5)$$

also die erste Abschätzung in (6.4). Wegen

$$\|f(x, u)\|^2 = (x^T, u^T) \begin{pmatrix} A & A^T B \\ B^T A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

folgt ebenfalls aus Lemma 3.9

$$\|f(x, u)\|^2 \leq c_3 \left\| \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right\|^2,$$

woraus wir mit (6.5) und $c_2 = c_1/c_3$ die zweite Abschätzung in (6.4) erhalten.

Es sei nun $u \in \mathcal{U}$ und $x(t) = x(t, x_0, u)$ die zugehörige Lösungsfunktion. Es gelte

$$J(x_0, u) < \infty.$$

Zu zeigen ist also, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

gilt. Dazu nehmen wir an, dass $x(t) \not\rightarrow 0$. Es existiert also ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $t_k \rightarrow \infty$, so dass $\|x(t_k)\| \geq \varepsilon$ gilt. O.B.d.A. gelte $t_{k+1} - t_k \geq \varepsilon/2$. Nun wählen wir $\delta = \varepsilon/4$ und unterscheiden für jedes $k \in \mathbb{N}$ zwei Fälle:

1. Fall: $\|x(t)\| \geq \varepsilon/2$ für alle $t \in [t_k, t_k + \delta]$. In diesem Fall erhalten wir aus (6.4) für diese t die Ungleichung $g(x(t), u(t)) \geq c_1 \varepsilon^2/4$ und es folgt

$$\int_{t_k}^{t_k + \delta} g(x(t), u(t)) dt \geq c_1 \delta \varepsilon^2/4 = c_1 \varepsilon^3/16.$$

2. Fall: $\|x(t)\| < \varepsilon/2$ für ein $t \in [t_k, t_k + \delta]$. In diesem Fall folgt

$$\left\| \int_{t_k}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right\| = \|x(t_k) - x(t)\| \geq \|x(t_k)\| - \|x(t)\| \geq \varepsilon/2.$$

Aus der zweiten Abschätzung in (6.4) erhalten wir

$$g(x, u) \geq c_2 \|f(x, u)\|^2 \geq \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \|f(x, u)\| \leq 1 \\ c_2 \|f(x, u)\|, \quad \|f(x, u)\| > 1 \end{array} \right\} \geq c_2 (\|f(x, u)\| - 1)$$

und damit

$$\int_{t_k}^{t_k+\delta} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \geq c_2 \int_{t_k}^{t_k+\delta} (\|f(x(\tau), u(\tau))\| - 1) d\tau \geq c_2 (\varepsilon/2 - \delta) \geq c_2 \varepsilon/4.$$

Mit $\gamma = \min\{c_1 \varepsilon^3/16, c_2 \varepsilon/4\} > 0$ ergibt sich

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty g(x(t), u(t)) dt \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{t_k}^{t_k+\delta} g(x(t), u(t)) dt \geq \sum_{k=1}^\infty \gamma = \infty,$$

ein Widerspruch. \square

Wir können also Satz 6.6 verwenden, um die Optimalität einer Lösung des linear-quadratischen Problems nachzuweisen.

Um eine Kandidatin für die optimale Wertefunktion zu finden, machen wir den Ansatz

$$W(x) = x^T Q x \tag{6.6}$$

für eine symmetrische und positiv definite Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

A priori wissen wir nicht, ob dieser Ansatz gerechtfertigt ist – wir nehmen dies zunächst einfach an und untersuchen die Folgerungen dieser Annahme.

Lemma 6.9 Falls das linear-quadratische optimale Steuerungsproblem eine optimale Wertefunktion der Form (6.6) besitzt, so sind die optimalen Paare von der Form (x^*, u^*) mit

$$u^*(t) = F x(t, x^*, F)$$

und $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben durch

$$F = -N^{-1}(B^T Q + R^T),$$

wobei $x(t, x^*, F)$ die Lösung des mittels F geregelten Systems

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

mit Anfangsbedingung $x(0, x^*, F) = x^*$ bezeichnet.

Darüberhinaus ist das mittels F geregelte System exponentiell stabil.

Beweis: Die optimale Wertefunktion der Form (6.6) ist stetig differenzierbar und erfüllt $W(0) = 0$, weswegen sowohl Satz 6.4 als auch Satz 6.6 anwendbar ist.

Wenn W die optimale Wertefunktion ist, so folgt aus Satz 6.4(ii), dass die optimale Kontrolle $u = u^*(t)$ für $x = x(t, x^*, u^*)$ den Ausdruck

$$DW(x) \cdot f(x, u) + g(x, u)$$

minimiert. Umgekehrt folgt aus Satz 6.6, dass jede Kontrollfunktion, die diesen Ausdruck entlang der zugehörigen Trajektorie minimiert, ein optimales Paar erzeugt. Wir müssen also zeigen, dass das angegebene Feedback gerade solche Lösungen und Kontrollfunktionen erzeugt.

Der zu minimierende Ausdruck ist unter den gemachten Annahmen gerade gleich

$$\begin{aligned} & DW(x) \cdot f(x, u) + g(x, u) \\ &= x^T Q(Ax + Bu) + (Ax + Bu)^T Qx + x^T Mx + x^T Ru + u^T R^T x + u^T Nu \\ &= 2x^T Q(Ax + Bu) + x^T Mx + 2x^T Ru + u^T Nu =: h(u), \end{aligned}$$

da Q symmetrisch ist. Da N wegen der positiven Definitheit von G ebenfalls positiv definit sein muss, ist die zweite Ableitung von h nach u positiv definit, die Funktion h ist also konvex in u . Folglich ist jede Nullstelle der Ableitung von h nach u ein globales Minimum. Diese Nullstellen sind gerade gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= Dh(u) = 2x^T QB + 2x^T R + 2u^T N \\ \Leftrightarrow -2u^T N &= 2x^T QB + 2x^T R \\ \Leftrightarrow -Nu &= B^T Qx + R^T x \\ \Leftrightarrow u &= -N^{-1}(B^T Qx + R^T x) =: Fx \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt.

Die exponentielle Stabilität des geregelten Systems folgt aus der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung. Diese impliziert wegen der positiven Definitheit von g nach Lemma 3.9

$$DW(x) \cdot f(x, Fx) = -g(x, Fx) \leq -c\|(x^T, (Fx)^T)^T\|^2 \leq -c\|x\|^2$$

für ein geeignetes $c > 0$. Da Q zudem positiv definit ist, ist das System nach Lemma 3.10 exponentiell stabil mit Lyapunov Funktion $W(x)$. \square

Wenn die optimale Wertefunktion also von der Form (6.6) ist, so erhalten wir eine besonders schöne Lösung: Nicht nur lassen sich die optimalen Kontrollen u^* explizit berechnen, sie liegen darüberhinaus auch in linearer Feedback-Form vor und liefern als (natürlich gewünschtes) Nebenprodukt ein stabilisierendes Feedback.

Wie müssen also untersuchen, wann V die Form (6.6) annehmen kann. Das nächste Lemma gibt eine hinreichende Bedingung dafür an, dass die optimale Wertefunktion diese Form besitzt. Zudem liefert es eine Möglichkeit, Q zu berechnen.

Lemma 6.10 Wenn die Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung²

$$QA + A^T Q + M - (QB + R)N^{-1}(B^T Q + R^T) = 0 \quad (6.7)$$

ist, so ist die optimale Wertefunktion des Problems gegeben durch $V(x) = x^T Qx$.

Insbesondere existiert höchstens eine symmetrische und positiv definite Lösung Q von (6.7).

²benannt nach Jacopo Francesco Riccati, italienischer Mathematiker, 1676–1754

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Funktion $W(x) = x^T Q x$ die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (6.3) löst.

Im Beweis von Lemma 6.9 wurde bereits die Identität

$$\min_{u \in U} \{DW(x) \cdot f(x, u) + g(x, u)\} = DW(x) \cdot f(x, Fx) + g(x, Fx)$$

für die Matrix $F = -N^{-1}(B^T Q + R^T)$ gezeigt. Mit

$$\begin{aligned} & F^T B^T Q + F^T N F + F^T R^T \\ &= -(R + QB)N^{-1}B^T Q + (R + QB)N^{-1}NN^{-1}(B^T Q + R^T) - (R + QB)N^{-1}R^T = 0 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & DW(x) \cdot f(x, Fx) + g(x, Fx) \\ &= x^T (Q(A + BF) + (A + BF)^T Q + M + RF + F^T R^T + F^T N F)x \\ &= x^T (QA + A^T Q + M + (QB + R)F + \underbrace{F^T B^T Q + F^T N F + F^T R^T}_{=0})x \\ &= x^T (QA + A^T Q + M + (QB + R)F)x \\ &= x^T (QA + A^T Q + M - (QB + R)N^{-1}(B^T Q + R^T))x. \end{aligned}$$

Wenn die algebraische Riccati-Gleichung (6.7) erfüllt ist, so ist dieser Ausdruck gleich Null, womit die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung erfüllt ist.

Um $V(x) = W(x)$ zu zeigen weisen wir nun nach, dass die Voraussetzungen von Satz 6.6 erfüllt sind. Aus der positiven Definitheit von Q folgt $W(x) \geq 0$ und $W(0) = 0$. Wie oben gezeigt erfüllt $W(x) = x^T Q x$ die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung, zudem wurde die in Lemma 6.9 mittels des Feedbacks F angegebene optimale Kontrolle u^* im Beweis gerade so konstruiert, dass sie die in Satz 6.6 and u^* geforderten Bedingungen erfüllt. Also folgt die Behauptung $V(x) = W(x)$ aus Satz 6.6.

Die Eindeutigkeit der symmetrischen und positiv definiten Lösung Q folgt aus der Tatsache, dass jede solche Lösung die Gleichung $V(x) = x^T Q x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, wodurch Q eindeutig bestimmt ist. \square

Bemerkung 6.11 Beachte, dass die Eindeutigkeitsaussage dieses Lemmas nur für die symmetrischen und positiv definiten Lösungen gilt. Die algebraische Riccati-Gleichung (6.7) kann durchaus mehrere Lösungen Q haben, von denen dann aber höchstens eine positiv definit sein kann. \square

Die Lemmata 6.9 und 6.10 legen die folgende Strategie zur Lösung des linear-quadratischen Problems nahe:

Finde eine positiv definite Lösung Q der algebraischen Riccati-Gleichung (6.7) und berechne daraus das optimale lineare Feedback F gemäß Lemma 6.9.

Dies liefert ein optimales lineares Feedback, das nach Lemma 6.9 zugleich das Stabilisierungsproblem löst.

Die wichtige Frage ist nun, unter welchen Voraussetzungen man die Existenz einer positiv definiten Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung erwarten kann. Der folgende Satz zeigt, dass dieses Vorgehen unter der schwächsten denkbaren Bedingung an A und B funktioniert.

Satz 6.12 Für das linear-quadratische optimale Steuerungsproblem sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Das Paar (A, B) ist stabilisierbar.
- (ii) Die algebraische Riccati-Gleichung (6.7) besitzt genau eine symmetrische und positiv definite Lösung Q .
- (iii) Die optimale Wertefunktion ist von der Form (6.6).
- (iv) Es existiert ein optimales lineares Feedback, welches das Kontrollsystem stabilisiert.

Beweis: “(i) \Rightarrow (ii)”: Betrachte die Riccati-Differentialgleichung

$$\dot{Q}(t) = Q(t)A + A^T Q(t) + M - (Q(t)B + R)N^{-1}(B^T Q(t) + R^T)$$

mit Matrixwertiger Lösung $Q(t)$, die die Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ erfüllt. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt, dass die Lösung $Q(t)$ zumindest für t aus einem Intervall der Form $[0, t^*)$ existiert, wobei t^* maximal gewählt sei. Durch Nachrechnen sieht man, dass auch $Q(t)^T$ eine Lösung ist, die ebenfalls $Q(0)^T = 0$ erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit muss also $Q(t) = Q(t)^T$ sein, d.h. die Lösung ist symmetrisch.

Wir wollen zunächst zeigen, dass diese Lösung für alle $t \geq 0$ existiert, dass also $t^* = \infty$ gilt. Wir nehmen dazu an, dass $t^* < \infty$ ist.

Mit analogen Rechnungen wie im Beweis von Lemma 6.9 rechnet man nach, dass die Funktion $P(t, t_1, x) := x^T Q(t_1 - t)x$ für alle $t_1 - t \in [0, t^*)$ und alle $u \in U$ die Ungleichung

$$\frac{d}{dt}P(t, t_1, x) + \frac{d}{dx}P(t, t_1, x) \cdot f(x, u) + g(x, u) \geq 0 \quad (6.8)$$

erfüllt. Für jede Lösung $x(t, x_0, u)$ des Kontrollsystems mit beliebigem $u \in U$ folgt daraus

$$\frac{d}{dt}P(t, t_1, x(t, x_0, u)) = \frac{d}{dt}P(t, t_1, x) + \frac{d}{dx}P(t, t_1, x) \cdot f(x, u) \geq -g(x, u).$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Ausnutzung von $P(t_1, t_1, x) = 0$ liefert nun

$$P(0, t_1, x_0) = - \int_0^{t_1} \frac{d}{dt}P(t, t_1, x) dt \leq \int_0^{t_1} g(x(t, x_0, u), u(t)) dt \quad (6.9)$$

für $t_1 \in [0, t^*)$. Ebenfalls analog zu Lemma 6.9 rechnet man nach, dass für $u = u^* = -N^{-1}(B^T Q(t) + R^T)x$ definierte Kontrollfunktion Gleichheit in (6.8) gilt, woraus mit analoger Rechnung für die durch $u^*(t) = -N^{-1}(B^T Q(t) + R^T)x(t, x_0, u^*)$ definierte Kontrollfunktion die Gleichung

$$P(0, t_1, x_0) = \int_0^{t_1} g(x(t, x_0, u^*), u^*(t)) dt \quad (6.10)$$

gilt. Da G positiv definit und die Lösungen $x(t, x_0, u^*)$ stetig sind, ist $P(0, t_1, x_0) > 0$ für $x_0 \neq 0$, weswegen $Q(t_1)$ positiv definit ist. Mit der speziellen Wahl $u \equiv 0$ folgt aus (6.9), dass $P(0, t_1, x_0) = x^T Q(t_1)x$ gleichmäßig beschränkt ist für alle $t_1 \in [0, t^*)$. Wegen der Symmetrie gilt für die Einträge von $Q(t)$ die Gleichung

$$[Q(t)]_{ij} = e_i^T Q(t) e_j = \frac{1}{2} ((e_i + e_j)^T Q(t) (e_i + e_j) - e_i^T Q(t) e_i - e_j^T Q(t) e_j), \quad (6.11)$$

weswegen also auch diese für $t \in [0, t^*)$ gleichmäßig beschränkt sind. Nun weist man nach (für Details siehe z.B. das Buch von Aubach [1], Beweis von Satz 2.5.1), dass wegen der Beschränktheit ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Lösung der Riccati-DGL für jede Anfangsbedingung der Form $(t, Q(t))$, $t \in [0, t^*)$ auf dem Intervall $(t - \delta, t + \delta)$ existiert und eindeutig ist. Für t hinreichend nahe an t^* ist $t + \delta > t^*$, woraus folgt, dass die Lösung auf dem Intervall $[0, t + \delta)$ existiert, welches echt größer als das Intervall $[0, t^*)$ ist. Dies widerspricht der Maximalität von t^* und daher der Annahme $t^* < \infty$.

Die Lösung $Q(t)$ ist also eine für alle $t \geq 0$ definierte symmetrische und positiv definite matrixwertige Funktion. Zudem folgt aus (6.10) für alle $s \geq t$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$x^T Q(s)x \geq x^T Q(t)x.$$

Wir zeigen nun, dass $Q_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ existiert. Dazu wählen wir ein stabilisierendes Feedback F für das Paar (A, B) und setzen $u_F(t) = Fx(t, x_0, F)$. Damit erhalten wir aus (6.9) und der Abschätzung

$$g(x, Fx) \leq K \|x\|^2$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned} P(0, t_1, x_0) &\leq \int_0^{t_1} g(x(\tau, x_0, F), u_F(\tau)) d\tau \\ &\leq \int_0^{t_1} K (C e^{-\sigma t} \|x_0\|)^2 dt \\ &\leq \underbrace{\int_0^\infty K C^2 e^{-2\sigma t} dt}_{= \frac{K C^2}{2\sigma} =: D < \infty} \|x_0\|^2 \leq D \|x_0\|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt $x^T Q(t)x \leq D \|x\|^2$ für alle $t \geq 0$, womit $x^T Q(t)x$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ beschränkt und monoton ist und damit für $t \rightarrow \infty$ konvergiert. Mit e_j bezeichnen wir den j -tem Basisvektor. Definieren wir

$$l_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e_i + e_j)^T Q(t) (e_i + e_j) \quad \text{und} \quad l_j = \lim_{t \rightarrow \infty} e_j^T Q(t) e_j.$$

so folgt aus (6.11)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [Q(t)]_{ij} = \frac{1}{2}(l_{ij} - l_i - l_j).$$

Dies zeigt, dass der Limes $Q_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ existiert. Diese Matrix ist symmetrisch und wegen

$$x^T Q_\infty x \geq x^T Q(t) x > 0 \quad \text{für alle } x \neq 0 \text{ und beliebiges } t > 0$$

positiv definit.

Wir zeigen schließlich, dass Q_∞ die algebraische Riccati-Gleichung löst. Aus der qualitativen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass aus $Q(t) \rightarrow Q_\infty$ folgt, dass Q_∞ ein Gleichgewicht der Riccati-DGL sein muss.³ Daraus folgt sofort, dass Q_∞ die algebraische Riccati-Gleichung erfüllt, was die Existenz einer symmetrischen und positiv definiten Lösung zeigt. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 6.10.

“(ii) \Rightarrow (iii)”: Folgt aus Lemma 6.10

“(iii) \Rightarrow (iv)”: Folgt aus Lemma 6.9.

“(iv) \Rightarrow (i)”: Da ein stabilisierendes Feedback existiert, ist das Paar (A, B) stabilisierbar. \square

Bemerkung 6.13 Die im Beweis von “(i) \Rightarrow (ii)” verwendete Hilfsfunktion $P(t_0, t_1)$ ist tatsächlich die optimale Wertefunktion des optimalen Steuerungsproblems

$$\text{Minimiere } J(t_0, t_1, x_0, u) := \int_{t_0}^{t_1} g(x(t, t_0, x_0, u), u(t)) dt$$

auf endlichem Zeithorizont $[t_0, t_1]$, wobei $x(t, t_0, x_0, u)$ die Lösung des Kontrollsystems mit Anfangszeit t_0 und Anfangswert x_0 , also $x(t_0, t_0, x_0, u) = x_0$, bezeichnet. \square

Diese Beobachtung lässt sich sogar noch verallgemeinern, was wir (ohne Beweise) kurz skizzieren:

Für das linear quadratische Problem auf endlichem Zeithorizont mit Endkosten $l(x) = x^T L x$ für eine positiv definite Matrix $L \in \mathbb{R}^n \times n$, also

$$\text{Minimiere } J(t_0, t_1, x_0, u) := \int_{t_0}^{t_1} g(x(t, t_0, x_0, u), u(t)) dt + l(x(t_1, t_0, x_0, u))$$

ergibt sich die optimale Wertefunktion als

$$P(t_0, t_1) = x^T Q(t_1 - t_0) x,$$

wobei $Q(\cdot)$ wie im obigen Beweis die Lösung der Riccati-Differentialgleichung ist, nun aber mit Anfangsbedingung $Q(0) = L$.

Das optimale Feedback ist dann analog zum unendlichen Horizont gegeben durch

$$F(t) = -N^{-1}(B^T Q(t_1 - t) + R^T),$$

hängt aber nun von der Zeit t ab. Das auf $[t_0, t_1]$ optimal geregelte System lautet also

$$\dot{x}(t) = (A + BF(t))x(t).$$

Beachte, dass $F(t)$ für $t_1 \rightarrow \infty$ gegen F aus Lemma 6.9 konvergiert.

³siehe z.B. Satz 2.2 im Skript “Modellierung mit Differentialgleichungen”, www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/modellierung05/

6.3 Linear-quadratische Ausgangsregelung

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt stets vorausgesetzt, dass die Matrix G in der Definition von $g(x, u)$ positiv definit ist. In den Übungsaufgaben haben wir gesehen, dass das LQ-Problem i.A. nicht nullkontrollierend ist und dass auch das Lösungsverfahren i.A. nicht funktioniert, wenn diese Bedingung verletzt ist.

Es gibt aber trotzdem Gründe, diese Bedingung abzuschwächen. Betrachten wir wie in Kapitel 4 ein Kontrollsystem mit Ausgang (4.1), also

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

so ist es sinnvoll, das Optimierungskriterium nur von y und nicht von x abhängig zu machen, d.h. eine Kostenfunktion der Form $\tilde{g}(y, u)$ zu betrachten. Formal wählt man dazu die Teilmatrizen M und R von G von der Form

$$M = C^T \tilde{M} C, \quad R = C^T \tilde{R}$$

für positiv definite Matrizen \tilde{M} und \tilde{R} passender Dimension. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x, u) &= (x^T \ u^T) \begin{pmatrix} M & R \\ R^T & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = (x^T \ u^T) \begin{pmatrix} C^T \tilde{M} C & C^T \tilde{R} \\ \tilde{R}^T C & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \\ &= (y^T \ u^T) \begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{R} \\ \tilde{R}^T & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} =: \tilde{g}(y, u). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die Matrix G ist nun nicht mehr positiv definit. Trotzdem lassen sich die Resultate aus dem vorhergehenden Abschnitt auf dieses neue G übertragen. Dazu muss man betrachten, wo und wie die positive Definitheit in den Beweisen eingeht:

- (i) In Lemma 6.8 wird die positive Definitheit von G ausgenutzt, um zu zeigen, dass das Problem nullkontrollierend ist.
- (ii) In Lemma 6.9 wird die positive Definitheit der Teilmatrix N implizit ausgenutzt, da die Inverse N^{-1} verwendet wird.
- (iii) Im Beweis von Teil “(i) \Rightarrow (ii)” von Satz 6.12 wird die positive Definitheit von G verwendet um zu zeigen, dass $Q(t)$ positiv definit ist.

Punkt (ii) ist hierbei unproblematisch, denn N ist weiterhin positiv definit. Punkt (i) und (iii) klären wir im Folgenden. Wesentlich dafür ist die Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma 6.14 Das Paar (A, C) sei beobachtbar. Dann existiert für jedes $t_1 > 0$ ein $c > 0$, so dass für g aus (6.12) die Abschätzung

$$J(0, t_1, x_0, u) = \int_0^{t_1} g(x(t; x_0, u), u(t)) dt \geq c \|x_0\|^2$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $u \in \mathcal{U}$ gilt.

Beweis: Aus der allgemeinen Lösungsformel

$$x(t; x_0, u) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds = x(t; x_0, 0) + x(t; 0, u)$$

folgt für alle $\alpha > 0$ die Gleichung

$$x(t; \alpha x_0, \alpha u) = \alpha x(t; x_0, u).$$

Daraus folgt für $x_0 \neq 0$ und $\alpha = \|x_0\|$

$$J(0, t_1, x_0, u) = \alpha^2 J(0, t_1, x_0/\alpha, u/\alpha) = \|x_0\|^2 J(0, t_1, x_0/\|x_0\|, u/\|x_0\|).$$

Um die Behauptung zu zeigen reicht es also aus, die Existenz von $c > 0$ mit

$$J(0, t_1, x_0, u) \geq c \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x_0\| = 1 \text{ und alle } u \in \mathcal{U} \quad (6.13)$$

zu zeigen.

Um (6.13) zu zeigen, betrachten wir zunächst

$$J(0, t_1, x_0, 0) = \int_0^{t_1} x(t; x_0, 0)^T M x(t; x_0, 0) dt = \int_0^{t_1} y(t)^T \widetilde{M} y(t) dt.$$

Da (A, C) beobachtbar ist, gilt für $x_0 \neq 0$ nach Lemma 4.5 $y(\tau) \neq 0$ für ein $\tau \in [0, t_1]$. Da $y(t)$ stetig ist, folgt $y(t) \neq 0$ auf einem Intervall um τ , woraus wegen der positiven Definitheit von \widetilde{M} die Ungleichung $J(0, t_1, x_0, 0) > 0$ folgt. Da $J(0, t_1, x_0, 0)$ stetig in x_0 ist, existiert auf der kompakten Menge $\{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \|x_0\| = 1\}$ das Minimum $c_0 > 0$, weswegen

$$J(0, t_1, x_0, 0) \geq c_0 \quad (6.14)$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\| = 1$ gilt.

Zur Abschätzung von $J(0, t_1, x_0, u)$ wählen wir nun ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\| = 1$ sowie ein $\varepsilon > 0$. Für Kontrollen u mit

$$\int_0^{t_1} u(t)^T N u(t) dt > \varepsilon \quad (6.15)$$

folgt dann sofort

$$J(0, t_1, x_0, u) > \varepsilon > 0. \quad (6.16)$$

Es bleibt also die Ungleichung zu zeigen für die Kontrollen $u \in \mathcal{U}$ mit

$$\int_0^{t_1} u(t)^T N u(t) dt \leq \varepsilon. \quad (6.17)$$

Da N positiv definit ist, folgt

$$\|u(t)\|^2 \leq c_1 u(t)^T N u(t)$$

für ein $c_1 > 0$ und damit

$$\int_0^{t_1} \|u(t)\|^2 dt \leq c_1 \varepsilon.$$

Zudem gilt

$$\|u(t)\| \leq \begin{cases} \sqrt{\varepsilon}, & \|u(t)\|^2 \leq \varepsilon \\ \|u(t)\|^2/\sqrt{\varepsilon}, & \|u(t)\|^2 > \varepsilon. \end{cases}$$

Damit folgt

$$\int_0^{t_1} \|u(t)\| dt \leq \int_0^{t_1} \max\{\sqrt{\varepsilon}, \|u(t)\|^2/\sqrt{\varepsilon}\} dt \leq \int_0^{t_1} \sqrt{\varepsilon} + \|u(t)\|^2/\sqrt{\varepsilon} dt = (c_1 + t_1)\sqrt{\varepsilon}.$$

Aus der allgemeinen Lösungsformel folgt damit die Existenz einer Konstanten $c_2 > 0$, so dass

$$\|x(t; 0, u)\| \leq c_2\sqrt{\varepsilon} \quad (6.18)$$

für alle $t \in [0, t_1]$ gilt. Ebenso folgt aus der Lösungsformel

$$\|x(t; x_0, 0)\| \leq c_3\|x_0\| = c_3 \quad (6.19)$$

für eine geeignete Konstante $c_3 > 0$ und alle $t \in [0, t_1]$. Insbesondere folgt damit

$$\|x(t; x_0, u)\| \leq c_4 \quad (6.20)$$

für $c_4 = c_2\sqrt{\varepsilon} + c_3$.

Für das Funktional gilt nun

$$J(0, t_1, x_0, u) \geq \int_0^{t_1} x(t; x_0, u)^T M x(t; x_0, u) dt + 2 \int_0^{t_1} x(t; x_0, u)^T R u(t) dt.$$

Für den zweiten Summanden gilt dabei wegen (6.20) die Abschätzung

$$2 \int_0^{t_1} x(t; x_0, u)^T R u(t) dt \geq -2c_4\|R\| \int_0^{t_1} \|u(t)\| dt \geq -2c_4\|R\|(c_1 + t_1)\sqrt{\varepsilon} =: -c_5\sqrt{\varepsilon}.$$

Aus der Abschätzung

$$(x_1 + x_2)^T M (x_1 + x_2) = x_1^T M x_1 + x_2^T M x_2 + 2x_1^T M x_2 \geq x_1^T M x_1 + 2x_1^T M x_2$$

folgt für den ersten Summanden mit $x_1(t) = x(t; x_0, 0)$, $x_2(t) = x(t; 0, u)$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} x(t; x_0, u)^T M x(t; x_0, u) dt &\geq \int_0^{t_1} x_1(t)^T M x_1(t) dt + \int_0^{t_1} 2x_1(t)^T M x_2(t) dt \\ &\geq c_0 - 2\|R\| \sqrt{\int_0^{t_1} \|x_1(t)\|^2 dt} \sqrt{\int_0^{t_1} \|x_2(t)\|^2 dt} \\ &\geq c_0 - 2\|R\| c_3 \sqrt{t_1 c_2^2 \varepsilon} =: c_0 - c_6 \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit mit $c_7 := c_5 + c_6$

$$J(0, t_1, x_0, u) \geq c_0 - c_7 \sqrt{\varepsilon}.$$

Wählen wir nun $\varepsilon = c_0^2/(2c_7)^2$ (womit $c_7\sqrt{\varepsilon} = c_0/2$ gilt), so folgt letztendlich im Fall (6.17)

$$J(0, t_1, x_0, u) \geq c_0/2.$$

Zusammen der Abschätzung (6.16) für den Fall (6.15) erhalten wir also

$$J(0, t_1, x_0, u) \geq \max\{c_0/2, c_0^2/(4c_7)^2\} =: c$$

und folglich (6.13). \square

Nun können wir die Punkte (i) und (iii) in der obigen Aufstellung klären. Als erstes betrachten wir Punkt (i), d.h. wir verallgemeinern wir Lemma 6.8 auf die neue Kostenfunktion (6.12).

Lemma 6.15 Das Paar (A, C) sei beobachtbar. Dann ist das linear quadratische Problem mit g aus (6.12) nullkontrollierend.

Beweis: Wir beweisen

$$x(t; x_0, u) \not\rightarrow 0 \Rightarrow J(x_0, u) = \infty.$$

Gelte also $x(t; x_0, u) \not\rightarrow 0$. Dann existiert eine Folge von Zeiten $t_k \rightarrow \infty$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|x(t_k; x_0, u)\| \geq \varepsilon$. O.B.d.A. gelte $t_{k+1} - t_k \geq 1$. Mit Lemma 6.14, $x_k = x(t_k; x_0, u)$ und $u_k(\cdot) = u(t_k + \cdot)$ folgt dann

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(x(t; x_0, u), u(t)) dt = \int_0^1 g(x(t; x_k, u_k), u_k(t)) dt = J(0, 1, x_k, u_k) \geq c\varepsilon^2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} J(x_0, u) &= \int_0^\infty g(x(t; x_0, u), u(t)) dt \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(x(t; x_0, u), u(t)) dt \geq \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^2 = \infty. \end{aligned}$$

\square

Es bleibt Punkt (iii) nachzuweisen, also dass der Beweis “(i) \Rightarrow (ii)” von Satz 6.12 auch für g aus (6.12) gilt. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 6.16 Das Paar (A, C) sei beobachtbar. Dann gilt Satz 6.12 auch für das linear quadratische Problem mit g aus (6.12).

Beweis: Mit Lemma 6.15 an Stelle von Lemma 6.8 folgen alle Beweisteile bis auf “(i) \Rightarrow (ii)” ganz analog zu Satz 6.12.

Im Beweis von “(i) \Rightarrow (ii)” wird die positive Definitheit von G nur an einer Stelle benutzt, nämlich um zu zeigen dass

$$P(0, t_1, x_0) = \int_0^{t_1} g(x(t, x_0, u^*), u^*(t)) dt$$

in Gleichung (6.10) positiv ist für alle $x_0 \neq 0$. Dies folgt aber mit Lemma 6.14 und der Beobachtbarkeitsannahme ebenfalls für g aus (6.12). Damit lässt sich der Beweis unverändert übernehmen und die Aussage folgt. \square

Bemerkung 6.17 Die zugehörige Riccati-Gleichung lautet ausgeschrieben

$$QA + A^T Q + C^T \tilde{M} C - (QB + C^T \tilde{R}) N^{-1} (B^T Q + \tilde{R}^T C)$$

und das optimale Feedback

$$F = -N^{-1} (B^T Q + \tilde{R}^T C).$$

Beachte, dass sowohl $V(x) = x^T Q x$ als auch Fx i.A. *nicht* von der Form $y^T \tilde{Q} y$ oder $\tilde{F} y$ sind. Um F für ein Kontrollsystem der Form (4.1) in Abhängigkeit von y zu implementieren, benötigen wir also nach wie vor einen Beobachter. \square

Kapitel 7

Der Kalman Filter

Wir haben bereits in Kapitel 4 eine Möglichkeit gesehen, wie man aus dem gemessenen Ausgang $y(t) = Cx(t)$ den Zustand $x(t)$ eines Kontrollsystems mittels eines dynamischen Beobachters $z(t)$ rekonstruieren kann. Allerdings stand bei den dortigen Überlegungen in erster Linie die asymptotische Stabilität des geregelten Systems im Vordergrund und nicht so sehr die Güte der Approximation $z(t) \approx x(t)$.

Mit Hilfe der im letzten Kapitel entwickelten linear quadratischen optimalen Steuerung wollen wir nun eine Methode entwickeln, mit der eine – in einem gewissen Sinne – optimale Zustandsschätzung $z(t) \approx x(t)$ erzielt werden kann.

Die Lösung dieses linear quadratischen Zustandsschätzproblems wird durch den sogenannten Kalman Filter (oder auch LQ-Schätzer) geliefert. Dieser Filter findet sich heutzutage – in der ein oder anderen Variante – in unzähligen technischen Anwendungen, vom Radargerät über den CD-Spieler bis zum Handy. Hier betrachten wir eine deterministische, zeitkontinuierliche Variante auf unendlichem Zeithorizont, weil wir für diese Version direkt auf den Ergebnissen des letzten Kapitels aufbauen können.

7.1 Zustandsschätzung auf unendlichem Zeithorizont

Wir betrachten zunächst das folgende, etwas anders formulierte Problem: Gegeben sei ein Kontrollsystem mit Ausgang (4.1) mit der etwas geänderten Notation $B = D$ und $u = v$, also

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dv(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (7.1)$$

wobei (A, C) beobachtbar sei.

Gegeben sei weiterhin eine Funktion $y_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$. Ziel ist es nun, mit Hilfe der Lösungen von (7.1) eine konstruktiv berechenbare Funktion $x^*(t)$ zu finden, so dass $y(t) = Cx^*(t)$ die Funktion $y_m(t)$ gut approximiert. Die Interpretation ist, dass $y_m(t) = Cx_m(t)$ gemessene Ausgangswerte einer Lösung x_m eines Kontrollsystems mit der gleichen Matrix A wie in (7.1) sind, aus denen der Zustand $x_m(t)$ möglichst gut geschätzt werden soll. Diese Anwendung werden wir im nachfolgenden Abschnitt noch genauer betrachten.

Der Kalman-Filter, den wir in den folgenden Schritten herleiten werden, löst dieses Problem optimal im Sinne einer “indirekten” kleinsten Quadrate-Approximation, die in zwei Schritten vorgeht:

Im *ersten Schritt* wählen wir symmetrische und positiv definite Matrizen \widetilde{M} und N passender Dimension und berechnen für jedes $\tau \geq 0$ und jeden Anfangswert x_0 zur Anfangszeit $t_0 = \tau$ eine Kontrollfunktion $v : (-\infty, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass die zugehörige Lösung $x_\tau(t) = x(t; \tau, x_0, v)$ das Funktional

$$J_\tau(x_0, v) := \int_{-\infty}^{\tau} (Cx_\tau(t) - y_m(t))^T \widetilde{M} (Cx_\tau(t) - y_m(t)) + v(t)^T N v(t) dt \quad (7.2)$$

minimiert. Wir nehmen dabei an, dass die optimale Wertefunktion

$$P_\tau(x_0) := \inf_{v \in \mathcal{U}} J_\tau(x_0, v)$$

endlich ist.

Im *zweiten Schritt* wählen wir dann $x^*(\tau)$ so, dass $P_\tau(x^*(\tau))$ minimal wird, d.h. dass

$$P_\tau(x^*(\tau)) = \min_{x_0 \in \mathbb{R}^n} P_\tau(x_0)$$

gilt.

Der Ansatz mag auf den ersten Blick etwas umständlich erscheinen. Er führt aber auf eine sehr einfach zu implementierende Lösung, die wir nun herleiten wollen.

Zunächst einmal transformieren wir die Zeit so, dass das Integral in (7.2) von 0 bis ∞ läuft, wie dies in unserem üblichen linear-quadratischen Problem der Fall ist.

Dazu setzen wir $x^\tau(t; x_0, v) := x(\tau - t; x_0, v)$ und $y_m^\tau(t) = y_m(\tau - t)$. Dann gilt mit der Abkürzung $x^\tau(t) = x^\tau(t; x_0, v)$ für

$$J_\tau^-(x_0, v) := \int_0^\infty (Cx^\tau(t) - y_m^\tau(t))^T \widetilde{M} (Cx^\tau(t) - y_m^\tau(t)) + v(t)^T N v(t) dt \quad (7.3)$$

die Gleichheit $J_\tau^-(x_0, v) = J_\tau(x_0, v(\tau - \cdot))$ und damit insbesondere

$$P_\tau^-(x_0) := \inf_{v \in \mathcal{U}} J_\tau^-(x_0, v) = P_\tau(x_0).$$

Beachte, dass $x^\tau(t; x_0, v)$ Lösung des Kontrollsystems

$$\dot{x}^\tau(t) = -Ax^\tau(t) - Dv(\tau - t)$$

ist. Mit einer weiteren Transformation können wir (7.3) nun (fast) auf die Form unseres linear quadratischen Ausgangsregelungsproblems gemäß Definition 6.1 mit g aus (6.12) bringen:

Dazu erweitern wir den Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ des Systems um eine Komponente $x_{n+1}(t) \equiv \text{const}$, also $\dot{x}_{n+1}(t) \equiv 0$. Dies erreichen wir durch die Wahl

$$\bar{x} := \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} := \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{D} := \begin{pmatrix} -D \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definieren wir nun

$$\bar{M}_\tau(t) := \begin{pmatrix} C^T \widetilde{M} C & -C^T \widetilde{M} y_m^\tau(t) \\ -y_m^\tau(t)^T \widetilde{M} C & y_m^\tau(t)^T \widetilde{M} y_m^\tau(t) \end{pmatrix}$$

und $g(t, \bar{x}, v) := \bar{x}^T \bar{M}_\tau(t) \bar{x} + v^T N v$ so folgt für $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g(t, \bar{x}, v) = (Cx - y_m^\tau(t))^T \widetilde{M} (Cx - y_m^\tau(t)) + v(t)^T N v(t) dt.$$

Folglich gilt für $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\bar{x}^\tau(t, \bar{x}_0, v) = \begin{pmatrix} x^\tau(t, x_0, v) \\ 1 \end{pmatrix}$

$$J_\tau^-(x_0, v) = \int_0^\infty g(t, \bar{x}^\tau(t; \bar{x}_0, v), v(t)) dt =: \bar{J}_\tau(\bar{x}_0, v).$$

Mit \bar{P}_τ bezeichnen wir wie üblich die optimale Wertefunktion. Dieses Problem ist von der üblichen LQ-Form mit Ausnahme der Tatsache, dass g nun explizit von der Zeit abhängt. Tatsächlich sind aber die im Beweis von Satz 6.12 verwendeten Gleichungen weiterhin gültig, wenn wir die Zeit in $\bar{M}(t)$ passend berücksichtigen. Genauer gilt (was wir hier aus Zeitgründen nicht beweisen):

Betrachte für $t \in [0, \sigma]$ die Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$\dot{\bar{Q}}_{\tau, \sigma}(t) = \bar{Q}_{\tau, \sigma}(t) \bar{A} + \bar{A}^T \bar{Q}_{\tau, \sigma}(t) + \bar{M}_\tau(\sigma - t) - \bar{Q}_{\tau, \sigma}(t) \bar{D} N^{-1} \bar{D}^T \bar{Q}_{\tau, \sigma}(t) \quad (7.4)$$

mit Anfangsbedingung $\bar{Q}_{\tau, \sigma}(0) = 0$. Dann gilt die Konvergenz

$$\bar{P}_\tau(\bar{x}) := \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{x}^T \bar{Q}_{\tau, \sigma}(\sigma) \bar{x}.$$

Nun zerlegen wir $\bar{Q}_{\tau, \sigma}(t)$ passend zur Definition von \bar{A} : Schreiben wir

$$\bar{Q}_{\tau, \sigma}(t) = \begin{pmatrix} Q_{\tau, \sigma}(t) & q_{\tau, \sigma}(t) \\ q_{\tau, \sigma}(t)^T & \alpha_{\tau, \sigma}(t) \end{pmatrix},$$

so folgt aus der Form der Matrizen \bar{A} und \bar{D} , dass $Q_{\tau, \sigma}(t)$ die Gleichung

$$\dot{Q}_{\tau, \sigma}(t) = -Q_{\tau, \sigma}(t) A - A^T Q_{\tau, \sigma}(t) + C^T \widetilde{M} C - Q_{\tau, \sigma}(t) D N^{-1} D^T Q_{\tau, \sigma}(t)$$

erfüllt. Dies ist aber genau die Riccati-Differentialgleichung aus dem Beweis von Satz 6.12. Zudem sind alle Daten und damit auch $Q_{\tau, \sigma}(t) = Q(t)$ unabhängig von τ und σ . Es folgt also

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} Q(\sigma) = Q,$$

wobei Q die algebraische Riccati-Gleichung

$$-QA - A^T Q + C^T \widetilde{M} C - QDN^{-1}D^T Q = 0 \quad (7.5)$$

löst.

Damit erhalten wir mit $\bar{x}_0^T = (x_0^T, 1)$ und $q_\tau = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} q_{\tau, \sigma}(\sigma)$, $\alpha_\tau = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \alpha_{\tau, \sigma}(\sigma)$

$$P_\tau(x_0) = \bar{P}_\tau(\bar{x}_0) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{x}_0^T \bar{Q}_{\tau, \sigma}(\sigma) \bar{x}_0 = x_0^T Q x_0 + 2x_0^T q_\tau + \alpha_\tau.$$

Der im zweiten Schritt des Ansatzes gesuchte Wert $x^*(\tau)$ ergibt sich damit (durch Ableiten des Ausdrucks und Umstellen nach x_0) zu

$$x^*(\tau) = -Q^{-1}q_\tau = -S q_\tau.$$

für $S := Q^{-1}$. Durch Multiplikation von (7.5) mit S von links und rechts sowie mit -1 folgt, dass S die sogenannte *duale Riccati-Gleichung*

$$AS + SA^T - SC^T \widetilde{M} CS + DN^{-1}D^T = 0 \quad (7.6)$$

löst.

Es bleibt q_τ zu berechnen. Aus der Riccati-Differentialgleichung (7.4) folgt für $q_{\tau, \sigma}(t)$ die Differentialgleichung

$$\dot{q}_{\tau, \sigma}(t) = -A^T q_{\tau, \sigma}(t) - Q(t)DN^{-1}D^T q_{\tau, \sigma}(t) - C^T \widetilde{M} y_m(\tau - \sigma + t)$$

mit Anfangsbedingung $q_{\tau, \sigma}(0) = 0$. Hieraus folgt

$$\dot{q}_{\tau+s, \sigma+s}(t) = \dot{q}_{\tau, \sigma}(t)$$

und da diese beiden Lösungen für $t = 0$ übereinstimmen, folgt

$$q_{\tau+s, \sigma+s}(t) = q_{\tau, \sigma}(t).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} q_{\tau+s, \sigma+s}(\sigma + s) &= \dot{q}_{\tau, \sigma}(\sigma) \\ &= -A^T q_{\tau, \sigma}(\sigma) - Q(\sigma)DN^{-1}D^T q_{\tau, \sigma}(\sigma) - C^T \widetilde{M} y_m(\tau) \end{aligned}$$

und folglich mit $\sigma \rightarrow \infty$

$$\frac{d}{d\tau} q_\tau = -A^T q_\tau - QDN^{-1}D^T q_\tau - C^T \widetilde{M} y_m(\tau).$$

Damit erhalten wir schließlich mit (7.6)

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(\tau) &= -S \frac{d}{d\tau} q_\tau \\ &= SA^T q_\tau + DN^{-1}D^T q_\tau + SC^T \widetilde{M} y_m(\tau) \\ &= -SA^T S^{-1} x^*(\tau) - DN^{-1}D^T S^{-1} x^*(\tau) + SC^T \widetilde{M} y_m(\tau) \\ &= (-SA^T - DN^{-1}D^T) S^{-1} x^*(\tau) + SC^T \widetilde{M} y_m(\tau) \\ &= (AS - SC^T \widetilde{M} CS) S^{-1} x^*(\tau) + SC^T \widetilde{M} y_m(\tau) \\ &= Ax^*(\tau) - SC^T \widetilde{M} (Cx^*(\tau) - y_m(\tau)) \\ &= Ax^*(\tau) + L(Cx^*(\tau) - y_m(\tau)) \end{aligned}$$

mit $L = -SC^T\widetilde{M}$.

Diese Differentialgleichung ist der sogenannte *Kalman-Filter*. Seine Anwendung ist wie folgt: Ist $x^*(t)$ bekannt, so kann $x^*(s)$, $s > t$, durch Lösen der Differentialgleichung auf dem Intervall $[t, s]$ (analytisch oder numerisch) aus den Daten $y_m|_{[t,s]}$ berechnet werden. Der Kalman-Filter eignet sich also zur rekursiven Online-Implementierung.

Zwei Eigenschaften des Kalman-Filters wollen wir hier noch explizit festhalten:

- (i) Die Matrix L hängt nicht von y_m ab. Um L zu berechnen, muss lediglich eine der beiden Riccati-Gleichungen (7.5) oder (7.6) gelöst werden.
- (ii) Die Matrix $A + LC$ ist asymptotisch stabil. Die Matrix L^T ist nämlich das LQ-optimale Feedback des zur dualen Riccati-Gleichung (7.6) gehörigen dualen optimalen Steuerungsproblems ist. Daher ist $A^T + C^T L^T$ asymptotisch stabil und folglich auch $A + LC = (A^T + C^T L^T)^T$, weil diese beiden Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen.

7.2 Der Kalman-Filter als Beobachter

Wir wollen den Kalman-Filter nun für das in der Einführung dieses Kapitels skizzierte Beobachterproblem anwenden.

Gegeben sei dazu ein Kontrollsystem mit Ausgang (4.1), also

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

mit beobachtbarem Paar (A, C) . Gegeben seien weiterhin ein unbekannter Anfangswert x_0 sowie eine bekannte Kontrollfunktion $u(t)$, $t \geq 0$, die zugehörigen Ausgangswerte $y(t) = Cx(t; x_0, u)$, $t \geq 0$, sowie eine Schätzung z_0 des Anfangswerts x_0 . Gesucht ist nun eine Kurve $z(t)$, $t \geq 0$, mit $z(0) = z_0$ im \mathbb{R}^n , so dass der Schätzfehler $Cz(t) \approx y(t)$ in einem geeigneten Sinne möglichst klein wird und so, dass $z(t)$ nur von $y|_{[0,t]}$ abhängt (also aus den zur Zeit t bekannten Daten berechenbar ist). Der Ausgang $y(t)$ spielt hier also die Rolle der Messgröße $y_m(t)$ im Kalman-Filter.

Zur Lösung des Problems machen wir den Ansatz

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + v(t), \tag{7.7}$$

wobei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ so bestimmt werden soll, dass $z(t)$ eine möglichst gute Schätzung ist. Um den Term $Bu(t)$ aus der Gleichung zu eliminieren, definieren wir den *Schätzfehler* $e(t) := z(t) - x(t)$. Dieser erfüllt die Gleichung

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + v(t), \tag{7.8}$$

d.h. wir haben hier ein Kontrollsystem (7.1) mit $D = \text{Id}$ und $x = e$.

Die Messgröße e_m für das e -System muss nun, damit die Probleme für z und e äquivalent sind, die Gleichung

$$Ce(t) - e_m(t) = Cz(t) - y_m(t) = Cz(t) - y(t) \Leftrightarrow e_m(t) = y(t) + Ce(t) - Cz(t) \tag{7.9}$$

erfüllen. Wegen $y(t) = Cx(t)$ und der Definition von e folgt daraus $e_m(t) = Cx(t) + Ce(t) - Cz(t) = 0$.

Berechnen wir nun gemäß dem vorhergehenden Abschnitt das Feedback L für den Kalman-Filter für (7.8), so ergibt sich die Filtergleichung wegen $y_m \equiv 0$ zu

$$\dot{e}^*(t) = (A + LC)e^*(t).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + L(Cz(t) - y(t)) \quad (7.10)$$

und liefert damit eine online implementierbare Beobachtergleichung (beachte die strukturelle Ähnlichkeit zum dynamischen Beobachter in Kapitel 4) zur Berechnung von $z(t)$, die nur noch (analytisch oder numerisch) gelöst werden muss.

Nachdem wir hier keine Messwerte $y(t)$ für $t < 0$ gegeben haben, können wir den optimalen Startwert $e^*(0)$ hier nicht wie im vorhergehenden Abschnitt berechnen. Aber selbst wenn wir es könnten, würde uns dies nichts nützen, denn für (7.10) müssten wir dann ja $z(0) = e^*(0) + x_0$ verwenden — der Wert x_0 ist aber unbekannt. Es liegt also nahe, in (7.10) den Schätzwert $z_0 \approx x_0$ als Anfangswert zu verwenden. Weil $A - LC$ asymptotisch stabil ist, konvergiert der Schätzfehler $e^*(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0, d.h. die Approximation $z(t) \approx x(t)$ wird mit wachsendem t immer besser. Da unserem Ansatz aber ein LQ-optimales Steuerungsproblem zu Grunde liegt, kann man erwarten, dass die Schätzung $z(t)$ ausgehend von $z(0) = z_0$ in einem gewissen Sinne optimal ist.

Um zu sehen, welcher Art diese Optimalität ist, setzen wir $y(t)$ für $t < 0$ so fort, dass sich $e^*(0) = z_0 - x_0$ und damit $z(0) = z_0$ als Lösung des Kalman-Filters ergibt. Dies ist gerade dann der Fall, wenn wir $y(t)$ mittels

$$y(t) = \begin{cases} Cx(t; z_0, 0), & t < 0 \\ Cx(t; x_0, u), & t \geq 0 \end{cases} \quad (7.11)$$

aus der Vorwärtslösung von (4.1) für x_0 und u und der Rückwärtslösung für z_0 und $u \equiv 0$ zusammensetzen: Für $v \equiv 0$ gilt dann nämlich wegen der linken Gleichung in (7.9) und der Tatsache, dass (4.1) und (7.7) für $u = v = 0$ übereinstimmen

$$Ce(t; z_0 - x_0, 0) - y_m = Cz(t; z_0, 0, 0) - y(t) = Cx(t; z_0, 0) - y(t) = 0$$

für alle $t < 0$. Damit gilt $J_0(z_0 - x_0, 0) = 0$ für das Optimalitätskriterium (7.2), folglich auch $P_0(z_0 - x_0) = 0$ und wir erhalten $e^*(0) = z_0 - x_0$.

Der aus dem Anfangswert z_0 berechnete Approximationswert $z(t)$ ist also gerade der Endwert derjenigen Lösung von (7.7), welche die zusammengesetzte Kurve (7.11) im Sinne von (7.2) am Besten approximiert.

Der große Vorteil des Kalman-Filters ist es, dass er auch bei ungenauen Daten $\tilde{y}(t) \approx y(t)$ gute Approximationen liefert. Dies kann mit stochastischen Methoden mathematisch rigoros formuliert und bewiesen werden.

Kapitel 8

Nichtlineare Kontrollsysteme

In diesem und den folgenden Kapiteln werden wir uns mit nichtlinearen Kontrollsystemen der allgemeinen Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (8.1)$$

befassen. Ein Beispiel für ein solches nichtlineares Kontrollsystem ist das bereits bekannte nichtlineare Pendel auf dem Wagen (1.3).

Allgemein betrachten wir Kontrollfunktionen mit Werten in $U \subset \mathbb{R}^m$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein parameterabhängiges stetiges Vektorfeld. Den Raum der Kontrollfunktionen bezeichnen wir weiterhin mit \mathcal{U} , werden diesen aber im Vergleich zu den vorhergehenden Kapiteln im folgenden Abschnitt in Zusammenhang mit einem Existenz- und Eindeutigkeitsresultat erweitern.

8.1 Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Wie bereits bei den linearen Kontrollsystemen sind wir nicht unbedingt daran interessiert, Kontrollfunktionen in Abhängigkeit von der Zeit t auszurechnen. Tatsächlich werden wir uns weiterhin oft mit Kontrollfunktionen der Form $u(t) = F(x(t))$ (oder Verallgemeinerungen dieser Form) beschäftigen, d.h. der aktuelle Kontrollparameter $u(t)$ hängt über eine *Feedback-* (auch *Rückführungs-* oder *Rückkopplungs-*) *Funktion* $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ vom aktuellen Zustand $x(t)$ ab. In diesem Fall erhält man nach Einsetzen von F in f eine unkontrollierte gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t))) =: g(x(t)),$$

für die die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung — unter geeigneten Voraussetzungen an g — aus den üblichen Sätzen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen abgeleitet werden kann.

Betrachten wir zeitabhängige Kontrollfunktionen $u(t)$, so müssen wir zunächst klären, welche Regularitätseigenschaften diese besitzen sollen. Hierber spielen zwei Kriterien eine Rolle: Zum einen wollen wir eine hinreichend große Menge an Funktionen zulassen, zum anderen wollen wir eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die Lösungen von (8.1) formulieren.

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass z.B. die Wahl $\mathcal{U} = C(\mathbb{R}, U)$ (also die Menge aller stetigen Funktionen mit Werten in U), zusammen mit der Lipschitz–Stetigkeit von f in x einen Existenz– und Eindeutigkeitsatz erlaubt. Stetige Kontrollfunktionen sind allerdings für viele Anwendungen zu einschränkend, z.B. in der optimalen Steuerung, wo man bereits für sehr einfache Probleme nachweisen kann, dass optimale Steuerstrategien unstetig in t sind. Zudem ist es sowohl für die theoretische als auch für die numerische Behandlung von Kontrollsystemen sehr nützlich, wenn zu je zwei Kontrollfunktionen $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ auch die durch die *Konkatenation zur Zeit* $\tau \in \mathbb{R}$

$$u_1 \&_{\tau} u_2(t) := \begin{cases} u_1(t), & t < \tau \\ u_2(t), & t \geq \tau \end{cases}$$

gegebene Funktion wieder in \mathcal{U} liegt, was für den Raum der stetigen Funktionen ebenfalls nicht zutrifft.

Im ersten Teil dieser Vorlesung haben wir deshalb den Raum der stückweise und rechtsseitig stetigen Funktionen verwendet, der für unsere Zwecke ausreichend war.

Hier werden wir eine noch größere Klasse von Kontrollfunktionen zulassen, die zwar am Anfang etwas formalen Aufwand bei der Einführung verlangt, später aber einige Vorteile (und auch technische Vereinfachungen) bringen wird. Wir erinnern dazu an die folgende Definition.

Definition 8.1 Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.

(i) Eine Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *stückweise konstant*, falls eine Zerlegung von I in endlich viele Teilintervalle I_j , $j = 1, \dots, q$ existiert, so dass g auf I_j konstant ist für alle $j = 1, \dots, q$.

(ii) Eine Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (*Lebesgue–*) *messbar*, falls eine Folge von stückweise konstanten Funktionen $g_i : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i \in \mathbb{N}$, existiert mit $\lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) = g(x)$ für fast alle¹ $x \in I$.

(iii) Eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt (*Lebesgue–*) *messbar*, falls für jedes abgeschlossene Teilintervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ die Einschränkung $g|_I$ messbar im Sinne von (ii) ist. \square

Der folgende Satz zeigt, dass die Wahl messbarer Kontrollfunktionen einen sinnvollen Lösungsbegriff für (8.1) liefert.

Satz 8.2 (Satz von Carathéodory) Betrachte ein Kontrollsystem mit folgenden Eigenschaften:

i) Der Raum der Kontrollfunktionen ist gegeben durch

$$\mathcal{U} = L_{\infty}(\mathbb{R}, U) := \{u : \mathbb{R} \rightarrow U \mid u \text{ ist messbar und essentiell beschränkt}^2\}.$$

ii) Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig.

¹d.h. für alle x aus einer Menge $J \subseteq I$ mit der Eigenschaft, dass $I \setminus J$ eine Lebesgue–Nullmenge ist

²d.h. beschränkt außerhalb einer Lebesgue–Nullmenge

iii) Für jedes $R > 0$ existiert eine Konstante $L_R > 0$, so dass die Abschätzung

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq L_R \|x_1 - x_2\|$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und alle $u \in U$ mit $\|x_1\|, \|x_2\|, \|u\| \leq R$ erfüllt ist.

Dann gibt es für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ ein (maximales) offenes Intervall I mit $0 \in I$ und genau eine absolut stetige Funktion $x(t)$, die die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

für alle $t \in I$ erfüllt.

Definition 8.3 Wie bezeichnen die eindeutige Funktion $x(t)$ aus Satz 8.2 mit $\varphi(t, x_0, u)$ und nennen sie die *Lösung* von (8.1) zum *Anfangswert* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und zur *Kontrollfunktion* $u \in \mathcal{U}$. \square

Die folgende Beobachtung rechtfertigt diese Definition: Da $\varphi(t, x_0, u)$ absolut stetig ist, ist diese Funktion für fast alle $t \in I$ nach t differenzierbar. Insbesondere folgt also aus dem Satz 8.2, dass $\varphi(t, x_0, u)$ die Differentialgleichung (8.1) für fast alle $t \in I$ erfüllt, d.h. es gilt

$$\dot{\varphi}(t, x_0, u) = f(\varphi(t, x_0, u), u(t))$$

für fast alle $t \in I$.

Bemerkung 8.4 Im Weiteren nehmen wir stets an, dass die Voraussetzungen (i)–(iii) von Satz 8.2 erfüllt sind, werden dies aber nur in wichtigen Sätzen explizit formulieren. \square

Der Beweis von Satz 8.2 (auf den wir aus Zeitgründen nicht näher eingehen) verläuft ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Satzes für stetige gewöhnliche Differentialgleichungen, d.h. mit dem Banach'schen Fixpunktsatz angewendet auf einen passenden Funktionenraum. Er findet sich zusammen mit einer Einführung in die zugrundeliegende Lebesgue-Maßtheorie z.B. in dem Buch *Mathematical Control Theory* von E.D. Sontag [14, Anhang C].

Kapitel 9

Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungen

Die Analyse von Stabilitätseigenschaften nichtlinearer Differentialgleichungen und die Berechnung von Feedback-Kontrollen $u(t) = F(x(t))$, die ein nichtlineares Kontrollsystem stabilisieren, sind grundlegende Probleme der nichtlinearen Kontrolltheorie. Zum einen ist die Stabilität eine wesentliche Eigenschaft, auf die man in praktischen Anwendungen i.A. nicht verzichten kann. Zum anderen ist das Stabilisierungsproblem ein “Prototypproblem” der nichtlinearen Kontrolltheorie, was bedeutet, dass Techniken, die hierfür entwickelt werden, auf andere Probleme verallgemeinert werden können.

Wir betrachten in diesem Kapitel gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{9.1}$$

d.h. Systeme ohne Kontrolle. Wir nehmen durchgehend an, dass f die Bedingungen von Satz 1.4 erfüllt.

Die klassischen Definitionen von (asymptotischer) Stabilität verwenden üblicherweise recht technische ε - δ Relationen, vgl. Definition 3.2. Aus Satz 3.5 ist für lineare autonome Differentialgleichungen der Form $\dot{x}(t) = Ax(t)$ bekannt, dass asymptotische Stabilität des Nullpunktes äquivalent zu exponentieller Stabilität ist, d.h., es gibt Konstanten $C, \sigma > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle $t > 0$ die Ungleichung

$$\|\varphi(t, x)\| \leq Ce^{-\sigma t} \|x\| \tag{9.2}$$

für die Lösungen φ der Differentialgleichung gilt. Wir werden später an Beispielen sehen, dass dies für allgemeine nichtlineare Gleichungen des Typs (9.1) nicht gilt. Da die Charakterisierung von Stabilität über Ungleichungen des Typs (9.2) aber zum einen sehr anschaulich und zum anderen für viele Beweise und Rechnungen praktisch ist, werden wir hier eine ähnliche Technik für allgemeine nichtlineare Systeme verwenden. Dazu benötigen wir die sogenannten *Vergleichsfunktionen*.

9.1 Vergleichsfunktionen

Das Konzept der Vergleichsfunktionen wurde im Zusammenhang der Stabilitätsanalyse von W. Hahn in den Büchern „Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov“ [8] und „Stability of Motion“ [9] eingeführt. Die Idee dieser Funktionen geht dabei auf frühere Arbeiten von Müller und Kamke in den 1920er und 1930er Jahren zurück. In den 1990er Jahren wurde diese Methode zur Formulierung nichtlinearer Stabilitätseigenschaften durch die Arbeiten von E.D. Sontag wiederbelebt und hat sich in der nichtlinearen Kontrolltheorie inzwischen als Standard–Herangehensweise etabliert.

Die folgende Definition beschreibt einige Klassen dieser Funktionen.

Definition 9.1 Wir definieren die folgenden Klassen von Funktionen:

$$\mathcal{K} := \{\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \alpha \text{ ist stetig und streng monoton wachsend mit } \alpha(0) = 0\}$$

$$\mathcal{K}_\infty := \{\alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha \text{ ist unbeschränkt}\}$$

$$\mathcal{L} := \{\gamma : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \gamma \text{ ist stetig und streng monoton fallend mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0\}$$

$$\mathcal{KL} := \{\beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \text{stetig, } \beta(\cdot, t^*) \in \mathcal{K}, \beta(r^*, \cdot) \in \mathcal{L} \text{ für alle } r^* > 0, t^* \geq 0\}$$

□

Die folgende Grafik veranschaulicht eine typische \mathcal{KL} Funktion. Beachte, dass im Allgemeinen $\beta(r^*, 0) \neq r^*$ gilt (in der Grafik gilt $\beta(r^*, 0) > r^*$, was in unseren Anwendungen üblicherweise gelten wird; die Definition erlaubt aber auch „<“).

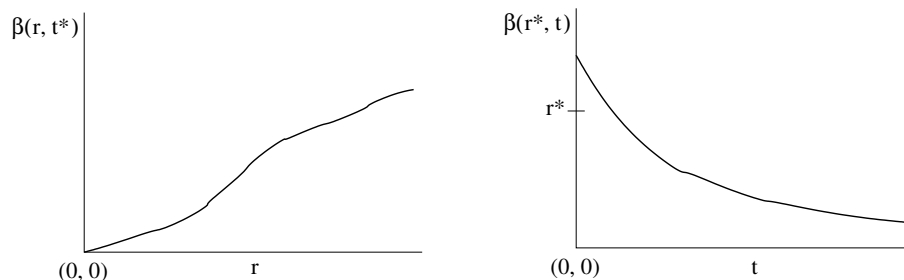


Abbildung 9.1: \mathcal{KL} Funktion

Wir werden im Laufe der Vorlesung einige Eigenschaften dieser Vergleichsfunktionen benötigen; die meisten werden wir an den entsprechenden Stellen formulieren und beweisen. Einige einfache Eigenschaften werden wir bereits jetzt formulieren.

Lemma 9.2 (i) Es gilt $\mathcal{K}_\infty = \text{Hom}(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$ (= Menge der Homöomorphismen von \mathbb{R}_0^+ in sich selbst). Insbesondere existiert also zu jedem $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ die Umkehrfunktion α^{-1} und es gilt $\alpha^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$.

(ii) Sei $\alpha \in \mathcal{K}$ und $\alpha^+ := \sup_{r \geq 0} \alpha(r)$. Dann existiert eine Umkehrfunktion $\alpha^{-1} : [0, \alpha^+) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\alpha^{-1}(\alpha(r)) = r$ für alle $r \geq 0$ und $\alpha(\alpha^{-1}(r)) = r$ für alle $r \in [0, \alpha^+)$.

(iii) Für alle Konstanten $C, \sigma > 0$ ist die Funktion $\beta(r, t) = Ce^{-\sigma t}r$ aus \mathcal{KL} .

Beweis: Übungsaufgabe.

9.2 Stabilität

Wir werden nun die Vergleichsfunktionen verwenden, um Stabilitätseigenschaften der Differentialgleichung (9.1) zu definieren. Man kann Stabilität für Lösungskurven, Mengen von Lösungskurven oder sogar für allgemeine Mengen (sogenannte Attraktoren) definieren. Wir werden hier zunächst die Stabilität von *Gleichgewichten* betrachten.

Definition 9.3 Ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt *Gleichgewicht* (auch *Ruhelage*, *Fixpunkt* oder *Equilibrium*) der Gleichung (9.1), falls $f(x^*) = 0$ gilt, oder, äquivalent, falls die zugehörige Lösung $\varphi(t, x^*) = x^*$ für alle $t > 0$ erfüllt. \square

Die Äquivalenz dieser zwei Bedingungen folgt aus der Tatsache, dass die Ableitung konstanter Funktionen gleich Null ist.

Bemerkung 9.4 Wir werden üblicherweise $x^* = 0$ annehmen, da dies die Schreibweise vereinfacht. Falls $x^* \neq 0$ ist, können wir einfach zum transformierten System $\tilde{f}(x) = f(x + x^*)$ übergehen. Dies verschiebt die Lösungskurven im \mathbb{R}^n , ändert aber nichts an ihrem Verlauf. \square

Nun können wir unsere Stabilitätskonzepte definieren.

Definition 9.5 Sei $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht der Differentialgleichung (9.1).

(i) x^* heißt *stabil*, falls eine Umgebung N von x^* und eine Funktion $\alpha \in \mathcal{K}$ existieren mit

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \alpha(\|x\|) \text{ für alle } x \in N, t \geq 0.$$

(ii) x^* heißt *instabil*, falls (i) nicht gilt.

(iii) x^* heißt (*lokal*) *asymptotisch stabil*, falls eine Umgebung N von x^* und eine Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ existieren, so dass

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \beta(\|x\|, t) \text{ für alle } x \in N, t \geq 0.$$

(iv) x^* heißt *global asymptotisch stabil*, falls (iii) mit $N = \mathbb{R}^n$ gilt.

(v) x^* heißt (*lokal* bzw. *global*) *exponentiell stabil*, falls Konstanten $C, \sigma > 0$ existieren, so dass (iii) (bzw. (iv)) mit $\beta(r, t) \leq Ce^{-\sigma t}r$ gilt. \square

Bemerkung 9.6 (i) In dieser Definition haben wir stets implizit vorausgesetzt, dass die betrachteten Lösungen $\varphi(t, x)$ für alle $t \geq 0$ existieren.

(ii) Beachte, dass die Stabilität aus (i) ebenfalls eine lokale Definition ist, die man — analog zu (iv) — auch global definieren könnte. Da wir uns in dieser Vorlesung vorwiegend mit asymptotischer Stabilität beschäftigen werden (also mit Teil (iii) und (iv)), wollen wir hierauf nicht näher eingehen. \square

9.3 Beispiele

Wir wollen die Stabilitätsbegriffe an zwei Beispielen erläutern. Als erstes Beispiel betrachten wir unser Pendelmodell (1.3), bei dem wir $u = 0$ setzen und nur die ersten zwei Komponenten x_1 und x_2 , also die Winkelposition und die Winkelgeschwindigkeit des Pendels betrachten. Setzen wir zur Vereinfachung der Gleichungen¹ $g = 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + \sin x_1(t)\end{aligned}\tag{9.3}$$

Die Punkte $(x_1^*, x_2^*) = (\pi, 0)$ und $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ sind zwei Gleichgewichte dieser Gleichung, die gerade das ruhig nach unten hängende und das (in der Praxis schwer zu realisierende) ruhig aufrecht stehende Pendel beschreiben. Für das herunterhängende Gleichgewicht $(x_1^*, x_2^*) = (\pi, 0)$ führen wir die Transformation aus Bemerkung 9.4 durch. Wir setzen $\tilde{x}_1 = x_1 - \pi$, damit ändern sich die Gleichungen wegen $\sin(\tilde{x}_1 + \pi) = -\sin \tilde{x}_1$ zu

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) - \sin \tilde{x}_1(t).\end{aligned}\tag{9.4}$$

Die Gleichungen beschreiben dieselben Bewegungen wie zuvor, allerdings entspricht $\tilde{x}_1 = \pi$ nun dem aufrecht stehenden Pendel und $\tilde{x}_1 = 0$ dem senkrecht nach unten hängenden Pendel.

Betrachten wir nun die physikalische Interpretation der Gleichungen (9.4) bzw. (9.3): Was würden wir erwarten, wenn sich das Pendel in einer der beiden Ruhelagen befindet und wir es durch leichtes Anstoßen aus dem Gleichgewicht bringen? Im Fall des herabhängenden Pendels, d.h. für $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ in (9.4), würden wir sicherlich erwarten, dass das Pendel in der Nähe der Ruhelage schwingt, sich aber nicht weiter von ihm entfernt. Falls Reibung auf das Pendel wirkt (d.h. falls $k > 0$ ist) würden wir sogar erwarten, dass das Pendel sich wieder der Ruhelage nähert. (In der Praxis würde man sogar erwarten, dass das Pendel nach einiger Zeit wieder ruhig nach unten hängt; dieser Effekt wird aber durch die Haftreibung bewirkt, die wir in unserem Modell vernachlässigt haben.)

Im Fall des aufrecht stehenden Pendels, d.h. für $(\tilde{x}_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ in (9.3), wird man nicht erwarten, dass das Pendel nach einem Stoß in der Nähe der Ruhelage bleibt, sondern dass es umfällt, um dann, je nachdem ob Reibung vorhanden ist oder nicht, entweder nach einiger Zeit gegen die hängenden Ruhelage zu konvergieren, oder für alle zukünftigen Zeiten mit gleicher Stärke weiter zu pendeln.

¹Hier kommt es nur auf das prinzipielle Verhalten des Modells und nicht auf eine genaue quantitative Analyse an.

Die folgenden Grafiken stellen Lösungen der linearen Gleichungen (9.4) und (9.3) in der (x_1, x_2) bzw. $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ -Ebene dar. Das „Anstoßen“ des Pendels modellieren wir dadurch, dass wir Anfangswerte $x \in \mathbb{R}^2$ wählen, die außerhalb des Gleichgewichts $x^* = (0, 0)^T$ liegen, nämlich $x = (1, 0)^T, \dots, (4, 0)^T$ für System (9.4) und $x = (0.1, 0)^T, \dots, (0.4, 0)^T$ für System (9.3).

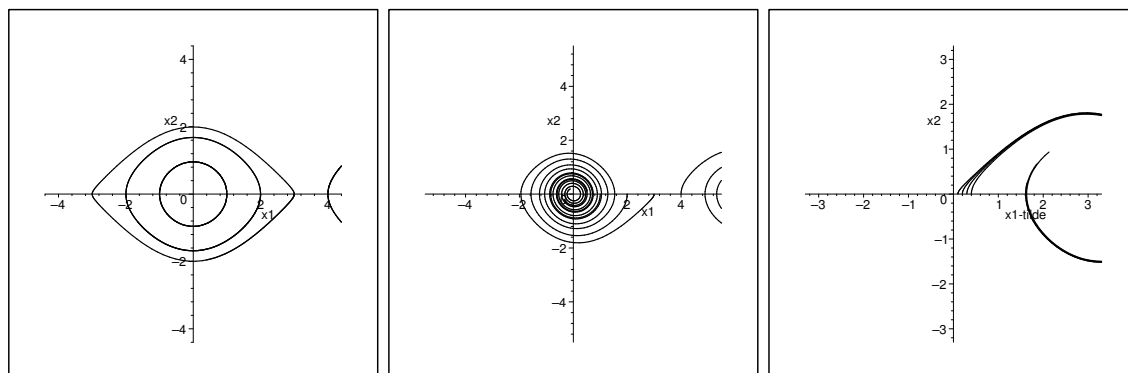


Abbildung 9.2: Lösung von (9.4) für $k = 0$ und $k = 0.1$ sowie Lösung von (9.3) für $k = 0.1$ (von links nach rechts)

Die Simulationen von (9.4) für die $x = (1, 0)^T$, $(2, 0)$ und $(3, 0)$ zeigen gerade das oben diskutierte Verhalten: Für $k > 0$ konvergiert die Lösung gegen das Gleichgewicht, für $k = 0$ beschreibt das Pendel eine periodische Bewegung um das Gleichgewicht, die Entfernung vom Gleichgewicht bleibt dabei aber proportional zur Anfangsentfernung. Für den weiter entfernten Anfangspunkt $x = (4, 0)^T$ ändert sich das Bild: Hier entfernt sich die Lösung schneller vom Gleichgewicht und konvergiert auch nicht wieder dagegen. Tatsächlich entspricht der hier sichtbare Effekt dem Überschlagen des Pendels; während das Pendel mit Reibung in der Praxis nach einiger Zeit trotzdem gegen die herabhängende Ruhelage konvergieren würde ist dies in der hier verwendeten mathematischen Modellierung nicht der Fall. Tatsächlich konvergiert das Pendel hier gegen einen anderen Gleichgewichtspunkt.

Das Verhalten von (9.3) ist — wie man ebenfalls aus der physikalischen Anschauung erwarten würde — ganz anders. Hier entfernen sich die Lösungen sofort vom Gleichgewichtspunkt, das Pendel fällt um.

Im Sinne unserer Definition 9.5 haben wir hier also die drei Fälle Stabilität, lokale asymptotische Stabilität und Instabilität vorliegen.

Unser zweites Modell ist ein Beispiel dafür, dass asymptotische Stabilität für nichtlineare Systeme nicht exponentiell sein muss. Betrachte die einfache eindimensionale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3.$$

Diese Gleichung ist asymptotisch aber nicht exponentiell stabil (Übungsaufgabe).

9.4 Ljapunov–Funktionen

Wir wollen nun ein wesentliches Hilfsmittel bei der Betrachtung von Stabilitätseigenschaften einführen, die sogenannte *Ljapunov–Funktion*. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass für eine \mathcal{KL} –Funktion im Allgemeinen $\beta(r, 0) \neq r$ ist, typischerweise gilt $\beta(r, 0) > r$. Daraus folgt, dass bei asymptotisch stabilen Systemen die Norm $\|\varphi(t, x)\|$ nicht monoton fallen muss. Diese Monotonie zu fordern, wäre für die allermeisten Systeme auch viel zu einschränkend. Trotzdem wäre dies für viele Anwendungen — insbesondere zur Überprüfung von asymptotischer Stabilität — eine sehr praktische Eigenschaft. Die Idee der Ljapunov–Funktion liegt nun darin, den Abstand vom Nullpunkt $\|\varphi(t, x)\|$ durch eine verallgemeinerte Abstandsfunktion V zu ersetzen, für die $V(\varphi(t, x))$ dann streng monoton fällt. Nimmt man darüberhinaus an, dass diese Abstandsfunktion V differenzierbar ist und “schnell genug” fällt, so kann man die strenge Monotonie mittels

$$0 > \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V(\varphi(t, x)) = DV(x) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(t, x) = DV(x)f(x)$$

ausdrücken. Dies führt zur folgenden Definition.

Definition 9.7 Betrachte eine Differentialgleichung (9.1) mit $f(0) = 0$ und eine offene Umgebung O von 0. Eine stetige Funktion $V : O \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $O \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar ist, heißt *lokale Ljapunov–Funktion*, falls Funktionen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ und eine stetige Funktion $W : O \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass die Ungleichungen

$$W(x) > 0, \tag{9.5}$$

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{9.6}$$

und

$$DV(x)f(x) \leq -W(x) \tag{9.7}$$

für alle $x \in O \setminus \{0\}$ gelten.

Die Funktion V heißt *globale Ljapunov–Funktion*, falls V und W diese Bedingungen für $O = \mathbb{R}^n$ erfüllen.

Das Paar (V, W) wird dabei als *Ljapunov–Paar* bezeichnet. \square

Das folgende Lemma zeigt eine äquivalente Formulierung von Ungleichung (9.7), die für Beweise geeigneter, aber etwas schwieriger nachzuprüfen ist.

Lemma 9.8 Für jedes Ljapunov–Paar (V, W) und jede abgeschlossene Teilmenge $D \subseteq O$ existiert eine global Lipschitz–stetige Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $g(0) = 0$, so dass $(V, g(V))$ ebenfalls ein Ljapunov–Paar ist.

Beweis: Sei W gegeben und sei $C := \sup_{x \in O} \alpha_2(\|x\|) \leq \infty$. Für $r \in [0, C)$ (bzw. $r > 0$, falls $C = \infty$) setzen wir

$$\tilde{g}(r) := \min\{W(y) \mid y \in D, \alpha_1(\|y\|) \leq r \leq \alpha_2(\|y\|)\}.$$

Beachte, dass dieses Minimum tatsächlich existiert, da hier eine stetige Funktion über eine kompakte Menge minimiert wird. Man rechnet leicht nach, dass \tilde{g} die Ungleichungen $\tilde{g}(r) > 0$ für $r > 0$ und $\tilde{g}(V(x)) \leq W(x)$ erfüllt. Falls $\tilde{g}(0) > 0$ ist, ersetzen wir $\tilde{g}(r)$ durch $\min\{\tilde{g}(r), r\}$, wodurch diese Ungleichungen erhalten bleiben und $\tilde{g}(0) = 0$ gilt. Die einzige Bedingung, die \tilde{g} nicht notwendigerweise erfüllt ist die Lipschitz-Stetigkeit. Das eigentliche g definieren wir daher als

$$g(r) = \inf_{s \geq 0} \{\tilde{g}(s) + |r - s|\}.$$

Aus der Definition folgt sofort $g(r) > 0$ falls $\tilde{g}(r) > 0$ und $g(r) \leq \tilde{g}(r)$ für alle $r \geq 0$, weswegen $(V, g(V))$ tatsächlich ein Ljapunov-Paar ist. Zu jedem $r \geq 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ können wir nun $s_\varepsilon(r)$ wählen, so dass das Infimum bis auf ε angenommen wird. Damit folgt
Zudem gilt

$$\begin{aligned} g(r_1) - g(r_2) &\leq \inf_{s \geq 0} \{\tilde{g}(s) + |r_1 - s|\} - \inf_{s \geq 0} \{\tilde{g}(s) + |r_2 - s|\} \\ &\leq \inf_{s \geq 0} \{\tilde{g}(s) + |r_1 - s|\} - \tilde{g}(s_\varepsilon(r_2)) - |r_2 - s_\varepsilon(r_2)| + \varepsilon \\ &\leq \tilde{g}(s_\varepsilon(r_2)) + |r_1 - s_\varepsilon(r_2)| - \tilde{g}(s_\varepsilon(r_2)) - |r_2 - s_\varepsilon(r_2)| + \varepsilon \\ &= |r_1 - s_\varepsilon(r_2)| - |r_2 - s_\varepsilon(r_2)| + \varepsilon \\ &\leq |r_1 - r_2| + \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Dreiecksungleichung folgt ($|a| - |b| = |a - b + b| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b| = |a - b|$). Da $\varepsilon > 0$ beliebig war und diese Ungleichung symmetrisch in r_1 und r_2 ist, folgt $|g(r_1) - g(r_2)| \leq |r_1 - r_2|$ für alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$ und damit die behauptete Lipschitz-Stetigkeit mit Konstante $L = 1$. \square

Das folgende Lemma zeigt eine weitere Art, die Bedingung (9.7) zu formulieren.

Lemma 9.9 Eine stetige Funktion $V : O \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, die auf $O \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar ist, erfüllt die Bedingung (9.7) genau dann, wenn für alle Lösungen $\varphi(t, x)$ von (9.1) und alle $t \geq 0$, für die $\varphi(s, x) \in O$ für alle $s \in [0, t]$ gilt, die Integralungleichung

$$V(\varphi(t, x)) \leq V(x) - \int_0^t W(\varphi(s, x)) ds \quad (9.8)$$

gilt.

Beweis: Leicht durch Differenzieren bzw. Integrieren der entsprechenden Ungleichungen. \square

Der Vorteil der Integralformulierung (9.8) ist, dass wir sie später auch für Ljapunov-Funktionen verwenden können, die nicht differenzierbar sind. Wir werden daher bei Beweisen im Folgenden üblicherweise (9.8) statt (9.7) verwenden. Beachte, dass wir aus Lemma 9.8 die Integralungleichung (9.8) mit $W(x) = g(V(x))$ erhalten.

9.5 Ljapunov-Funktion \Rightarrow Asymptotische Stabilität

Wir formulieren und beweisen nun das erste Hauptresultat dieses Kapitels, das besagt, dass aus der Existenz einer Ljapunov-Funktion asymptotische Stabilität folgt.

Satz 9.10 Betrachte eine Differentialgleichung (9.1) mit $f(0) = 0$. Angenommen, es existiert eine lokale (bzw. globale) Ljapunov-Funktion V im Sinne von Definition 9.7. Dann ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (bzw. global) asymptotisch stabil.

Hierbei ist die Vergleichsfunktion $\beta \in \mathcal{KL}$ aus Definition 9.5 gegeben durch

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(r))), \quad (9.9)$$

wobei μ die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r \quad (9.10)$$

ist mit g aus Lemma 9.8.

Beweis: Wir wählen ein $C > 0$ so dass die Menge O eine echte Umgebung der Menge $N = V^{-1}([0, C]) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) < C\}$ ist, was wegen (9.6) möglich ist. Sei g die Funktion aus Lemma 9.8. Wir betrachten die Lösung $\mu(t, r)$ des Anfangswertproblems (9.10) und zeigen zunächst das folgende Resultat: Für alle $x \in N$ gilt

$$V(\varphi(t, x)) \leq \mu(t, V(x)) \text{ für alle } t \geq 0. \quad (9.11)$$

Zum Beweis von (9.11) wählen wir ein $x \in N$ und betrachten für $\varepsilon > 0$ die Funktionen h_ε gegeben durch

$$h_\varepsilon(t) = V(x) - \int_0^t g(h_\varepsilon(s)) + \varepsilon ds.$$

Da h_ε die Differentialgleichung $\dot{h}_\varepsilon(t) = -g(h_\varepsilon(t)) + \varepsilon$ mit Anfangsbedingung $h_\varepsilon(0) = V(x)$ löst, folgt aus Gronwalls Lemma die Konvergenz $h_\varepsilon(t) \rightarrow \mu(t, V(x))$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und jedes $t \geq 0$. Wir zeigen, dass $V(\varphi(t, x)) \leq h_\varepsilon(t)$ für alle $t > 0$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt, woraus dann mit der Konvergenz $h_\varepsilon(t) \rightarrow \mu(t, V(x))$ die Behauptung (9.11) folgt. Nehmen wir also im Widerspruch zur Behauptung an, dass ein $t > 0$ existiert mit $V(\varphi(t, x)) > h_\varepsilon(t)$. Sei $t^* = \inf\{t \geq 0 \mid V(\varphi(t, x)) > h_\varepsilon(t)\}$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dann $V(\varphi(t^*, x)) = h_\varepsilon(t^*)$, und es folgt

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq \int_0^\tau g(V(\varphi(t^* + s, x)) - g(h_\varepsilon(t^* + s)) - \varepsilon ds.$$

Sei nun L eine Lipschitz-Konstante von g . Dann gilt für alle $\tau > 0$ die Ungleichung

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq \int_0^\tau L|V(\varphi(t^* + s, x)) - h_\varepsilon(t^* + s)| - \varepsilon ds.$$

Da $V(\varphi(t^*, x)) = h_\varepsilon(t^*)$ ist und beide Funktionen stetig in t sind, finden wir $\tau^* > 0$, so dass

$$L|V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau)| \leq \varepsilon/2$$

ist für alle $\tau \in [0, \tau^*]$. Damit folgt

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq -\tau\varepsilon/2 < 0$$

für alle $\tau \in [0, \tau^*]$, insbesondere also

$$V(\varphi(t^* + \tau)) < h_\varepsilon(t^* + \tau) \text{ für alle } \tau \in [0, \tau^*],$$

was der Wahl von t^* widerspricht. Damit ist (9.11) gezeigt.

Da g auf jedem kompakten Intervall der Form $[a, b]$ mit $0 < a < b \leq C$ strikt positiv ist, konvergiert $\mu(t, r)$ streng monoton gegen Null für $t \rightarrow \infty$ (jedes solche Intervall wird in endlicher Zeit „nach unten“ verlassen). Also ist μ eine \mathcal{L} -Funktion in t . Da sich die Lösungen der Differentialgleichung (9.10) nicht schneiden können, und $\mu(0, r)$ streng monoton in r ist, ist auch $\mu(t, r)$ streng monoton in r , also eine \mathcal{K} -Funktion in r . Man sieht damit leicht, dass dann β aus (9.9) eine \mathcal{KL} -Funktion ist. Aus

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(\varphi(t, x))) \leq \alpha_1^{-1}(\mu(t, V(x))) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(\|x\|))) = \beta(\|x\|, t) \end{aligned}$$

folgt damit die behauptete asymptotische Stabilität. \square

Wir wollen das Konzept der Ljapunov-Funktion an zwei Beispielen veranschaulichen.

Beispiel 9.11 Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)^3 \end{aligned}$$

Die Behauptung ist, dass das Gleichgewicht $x^* = 0$ global asymptotisch stabil ist. Zum Beweis betrachten wir die Funktion $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. Offenbar erfüllt V die Ungleichung (9.6) mit $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$. Wegen

$$DV(x)f(x) = (2x_1 \ 2x_2) \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^4 =: -W(x)$$

ist V also eine globale Ljapunov-Funktion. Mit etwas Rechnerei sieht man außerdem, dass die (optimale) Funktion $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ in Lemma 9.8 gegeben ist durch

$$g(r) = \begin{cases} 2r^2, & \text{falls } r < 1 \\ 2r, & \text{falls } r \geq 1 \end{cases}$$

\square

Die Hauptschwierigkeit bei Ljapunov-Funktionen liegt darin, geeignete Kandidaten zu finden, für die man die benötigten Eigenschaften nachprüfen kann. Für Differentialgleichungen mit speziellen Strukturen gibt es z.T. systematische Verfahren von denen wir später einige kennen lernen werden. Oft kann man auch physikalische Eigenschaften eines Systems benutzen, wie wir dies im folgenden Beispiel machen.

Beispiel 9.12 Betrachte das vereinfachte nichtlineare mathematische Pendel (9.4) mit Reibungskonstante $k = 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - \sin(x_1(t)) \end{aligned}$$

Der Ansatz zum Finden einer Ljapunov-Funktion liegt hier in der Betrachtung der Energie des Systems, die — bedingt durch die Reibung — monoton abnimmt. Als ersten Versuch setzen wir

$$\tilde{V}(x) = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Der erste Term $1 - \cos x_1$ beschreibt hierbei die potentielle Energie, während der zweite Term $x_2^2/2$ die Bewegungsenergie beschreibt. Berechnet man hier die Richtungsableitung $D\tilde{V}(x)f(x)$, so erhält man aber nur für $x_2 \neq 0$ einen negativen Ausdruck. Zwar nimmt \tilde{V} auch für $x_2 = 0$ und $x_1 \neq 0$ streng monoton ab, allerdings so langsam, dass die Ableitung trotzdem verschwindet. Mit etwas Überlegung und Probieren kommt man darauf, dass man einen zusätzlichen “gemischten” Term addieren muss, um dieses Problem zu lösen. Dies führt auf die Funktion

$$V(x) = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{10}x_2 \sin x_1.$$

Übungsaufgabe: Prüfe nach, dass V eine lokale Ljapunov-Funktion ist. □

9.6 Asymptotische Stabilität \Rightarrow Ljapunov-Funktion

In diesem Abschnitt werden wir eine Umkehrung von Satz 9.10 formulieren und — unter Zuhilfenahme von einigen tieferen Sätzen aus der Literatur — beweisen.

Wir beginnen gleich mit der Formulierung des Hauptresultates.

Satz 9.13 Betrachte eine Differentialgleichung (9.1) mit $f(0) = 0$. Wenn das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (bzw. global) asymptotisch stabil, dann existiert eine lokale (bzw. globale) Ljapunov-Funktion V im Sinne von Definition 9.7.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Hilfsresultate. Wir beginnen mit dem folgenden Lemma.

Lemma 9.14 Für jede Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ existiert eine Funktion $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, so dass die Ungleichung

$$\alpha(\beta(r, t)) \leq e^{-t}r$$

gilt für alle $r \in [0, 1]$ und alle $t > 0$.

Beweis: Wir definieren eine Funktion $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mittels

$$g(q) = \max\{\beta(r, -\ln(s)) \mid r \in [0, 1], s \in (0, 1], rs = q\}.$$

Beachte zunächst, dass hier für festes q über die kompakte Menge $\{(r, q/r) \mid r \in [q, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ maximiert wird, weswegen das Maximum über die stetige Funktion β tatsächlich existiert. Für gegebenes $q \in (0, 1]$ bezeichnen wir die Werte r und s , für die dieses angenommen wird mit $r^*(q)$ und $s^*(q)$. Wir beweisen, dass g stetig und streng monoton wachsend ist und $\lim_{q \rightarrow 0, q > 0} g(q) = 0$ ist.

Wir zeigen zunächst, dass g streng monoton wachsend ist. Dazu ist zu zeigen, dass $0 < q_1 < q_2 \leq 1$ die Ungleichung $g(q_1) < g(q_2)$ impliziert. Betrachte die Werte $r_1 = r^*(q_1)$ und $s_1 = s^*(q_1)$. Wir setzen

$$r_2 := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1 > 1 \\ q_2, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1 > 1 \\ \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad s_2 := \begin{cases} q_2, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1 > 1 \\ 1, & \text{falls } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1 > 1 \\ \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1, & \text{sonst} \end{cases} .$$

In allen drei Fällen gilt $r_2 \in (0, 1]$, $s_2 \in (0, 1]$, $r_2 s_2 = q_2$, $r_1 \leq r_2$ und $s_1 \leq s_2$ (und damit $-\ln(s_2) \leq -\ln(s_1)$). Im ersten und zweiten Fall gilt darüberhinaus $s_1 < s_2$ (und damit $-\ln(s_2) < -\ln(s_1)$) und im zweiten und dritten Fall $r_1 < r_2$. Damit folgt im ersten und zweiten Fall

$$g(q_2) \geq \beta(r_2, -\ln(s_2)) \geq \beta(r_1, -\ln(s_2)) > \beta(r_1, -\ln(s_1)) = g(q_1)$$

und im zweiten und dritten Fall

$$g(q_2) \geq \beta(r_2, -\ln(s_2)) \geq \beta(r_2, -\ln(s_1)) > \beta(r_1, -\ln(s_1)) = g(q_1),$$

womit die strenge Monotonie gezeigt ist.

Zum Beweis der Stetigkeit wähle $q_0 \in (0, 1]$ und betrachte eine Folge $q_i \rightarrow q_0$. Wir setzen $r_i := r^*(q_i)$ und $s_i := s^*(q_i)$ für $i = 0, 1, 2, \dots$. Mit der gleichen Konstruktion wie oben sieht man, dass zu jedem $i \in \mathbb{N}$ Zahlen \tilde{r}_i und \tilde{s}_i sowie Zahlen \bar{r}_i und \bar{s}_i existieren mit den Eigenschaften

$$\tilde{r}_i \tilde{s}_i = q_i, \quad |\tilde{r}_i - r_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right| \quad \text{und} \quad |\tilde{s}_i - s_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right|$$

sowie

$$\bar{r}_i \bar{s}_i = q_0, \quad |\bar{r}_i - r_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right| \quad \text{und} \quad |\bar{s}_i - s_0| \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}} \right|.$$

Insbesondere gilt $\tilde{r}_i \rightarrow r_0$, $\tilde{s}_i \rightarrow s_0$, $\bar{r}_i \rightarrow r_0$ und $\bar{s}_i \rightarrow s_0$ für $i \rightarrow \infty$. Also folgt aus der Stetigkeit von β und \ln

$$g(q_0) - g(q_i) \leq \beta(r_0, -\ln(s_0)) - \beta(\tilde{r}_i, -\ln(\tilde{s}_i)) \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty$$

und

$$g(q_i) - g(q_0) \leq \beta(r_i, -\ln(s_i)) - \beta(\bar{r}_i, -\ln(\bar{s}_i)) \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

also die gewünschte Stetigkeit.

Zuletzt beweisen wir die Konvergenz $\lim_{q \rightarrow 0, q > 0} g(q) = 0$. Beachte dazu, dass für jedes Paar $(r, s) \in [0, 1]^2$ mit $rs = q$ entweder $s \leq \sqrt{q}$ oder $r \leq \sqrt{q}$ gilt, da ansonsten $rs > \sqrt{q}\sqrt{q} = q$ wäre. Also gilt

$$g(q) \leq \max\{\beta(\sqrt{q}, -\ln(s)), \beta(r, -\ln(\sqrt{q}))\} \leq \max\{\beta(\sqrt{q}, 0), \beta(1, -\ln(\sqrt{q}))\} \rightarrow 0$$

für $q \rightarrow 0$, und damit die behauptete Konvergenz.

Wir definieren nun eine Funktion $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mittels

$$h(q) := \begin{cases} 0, & \text{falls } q = 0 \\ g(q), & \text{falls } q \in (0, 1] \\ g(1) + q - 1, & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

Wegen der Eigenschaften von g ist dies eine \mathcal{K}_∞ -Funktion und es gilt

$$h(rs) \geq \beta(r, -\ln(s)) \text{ für alle } r \in [0, 1], s \in (0, 1].$$

Da $h \in \mathcal{K}_\infty$ ist, existiert h^{-1} . Mit $\alpha = h^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$ gilt dann

$$rs \leq \alpha(\beta(r, -\ln(s))) \text{ für alle } r \in [0, 1], s \in (0, 1]$$

und mit $t = -\ln(s)$, also $s = e^{-t}$, folgt

$$re^{-t} \leq \alpha(\beta(r, t)), \text{ für alle } r \in [0, 1], t \geq 0$$

also die Behauptung. □

Neben diesem Lemma benötigen wir noch zwei andere Sätze, die wir hier nicht beweisen werden.

Satz 9.15 (Rademacher) Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\tilde{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige Funktion. Dann gibt es in jeder offenen Menge $B \subset O$ einen Punkt $x \in B$, in dem \tilde{V} differenzierbar ist.

Satz 9.16 Betrachte eine Differentialgleichung (9.1) mit Vektorfeld f . Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\tilde{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige Funktion. Dann gibt es für alle stetigen Funktionen $\gamma, \delta : O \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion $V : O \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$|V(x) - \tilde{V}(x)| \leq \gamma(x)$$

für alle $x \in O$ und

$$DV(x)f(x) \leq D\tilde{V}(x)f(x) + \delta(x)$$

für alle $x \in O$ in denen \tilde{V} differenzierbar ist.

Für den Beweis von Satz 9.15 siehe das Buch “Measure Theory and Fine Properties of Functions” von L.C. Evans and F. Gariepy [5, Theorem 2, Section 3.1.2]. Die ursprüngliche Version von Satz 9.16 findet sich in dem Artikel von F.W. Wilson, “Smoothing derivatives of functions and applications” [15]; die hier angegebene Version stammt aus dem Artikel von Y. Lin, E.D. Sontag and Y. Wang, “A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability”, [12].

Nun kommen wir zum **Beweis von Satz 9.13**:

Wir beweisen hier den globalen Fall, der lokale Fall folgt analog durch Einschränkung auf eine geeignete Umgebung O der 0.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\|f(x)\| \leq 1$ ist, ansonsten können wir f durch $f/\sqrt{1+\|f\|^2}$ ersetzen (wenn V eine Ljapunov-Funktion für das veränderte f ist, dann

ist es mit gleichem W auch eine für das ursprüngliche f). Betrachte nun die Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ aus der Definition der asymptotischen Stabilität und die Funktion α aus Lemma 9.14. O.B.d.A. können wir $\beta(1, 0) \geq 1$ und $\alpha(r) \leq 1$ für $r \leq \beta(1, 0)$ annehmen.

Sei nun L eine Lipschitz-Konstante für f für alle x mit $\|x\| \leq \beta(1, 0)$. Wir definieren eine Funktion $\omega : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mittels

$$\omega(r) = \frac{1}{\beta(1, 0)} \int_0^r \alpha(s)^{L+1} ds \quad \text{für } r \in [0, \beta(1, 0)]$$

und $\omega(r) = \omega(\beta(1, 0))$ für $r > \beta(1, 0)$. Dann gilt $\omega(r) \leq \alpha(r)$ und $\omega'(r) \leq \alpha(s)^{L+1}$ für $r \in [0, \beta(1, 0)]$, insbesondere ist ω Lipschitz mit Konstante $L_R = \alpha(R)^{L+1}$ auf $[0, R]$ für alle $R \in [0, \beta(1, 0)]$ und global Lipschitz mit Konstante $L_{\beta(1, 0)}$.

Wir setzen nun $\widetilde{W}(x) = \omega(\|x\|)$. Beachte, dass \widetilde{W} auf $B_R(0)$ Lipschitz-stetig mit der Konstanten L_R von ω ist und global Lipschitz-stetig ist mit der Konstanten $L_W := L_{\beta(1, 0)}$. Mittels \widetilde{W} definieren wir

$$\widetilde{V}(x) := \int_0^\infty \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt.$$

Für \widetilde{V} zeigen wir drei Eigenschaften

- (i) Es gibt $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \mathcal{K}_\infty$ mit

$$\tilde{\alpha}_1(\|x\|) \leq \widetilde{V}(x) \leq \tilde{\alpha}_2(\|x\|).$$

- (ii) \widetilde{V} ist Lipschitz stetig

- (iii) In allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$, in denen \widetilde{V} differenzierbar ist gilt

$$D\widetilde{V}(x)f(x) \leq -\widetilde{W}(x).$$

“(i)”: Wir zeigen zunächst die Existenz von α_2 : Sei $\tau(x) := \inf\{t \geq 0 \mid \|\varphi(t, x)\| \leq 1\}$ und $\sigma(r) := \inf\{t \geq 0 \mid \beta(r, t) \leq 1\}$. Hierfür gilt $\tau(x) \leq \sigma(\|x\|)$. Falls $\|x\| > 1$ ist, folgt $\tau(x) > 0$ und damit

$$\begin{aligned} \widetilde{V}(x) &= \int_0^\infty \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &= \int_0^{\tau(x)} \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt + \int_{\tau(x)}^\infty \widetilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &\leq \tau(x)\omega(\beta(1, 0)) + \int_{\tau(x)}^\infty \alpha(\beta(1, t - \tau(x))) dt \\ &\leq \sigma(\|x\|)\omega(\beta(1, 0)) + \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \sigma(\|x\|)\omega(\beta(1, 0)) + 1 \leq \sigma(\|x\|)\omega(\beta(1, 0)) + \|x\| =: \tilde{\alpha}_2(\|x\|). \end{aligned}$$

Beachte, dass $\sigma(r)$ monoton wachsend mit $\sigma(0) = 0$ ist, weswegen $\tilde{\alpha}_2$ tatsächlich aus \mathcal{K}_∞ ist.

Falls $\|x\| < 1$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x) &= \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha(\beta(\|x\|, t)) dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-t} \|x\| dt = \|x\| \leq \tilde{\alpha}_2(\|x\|).\end{aligned}$$

Zum Beweis der Existenz von α_1 benutzen wir die Beschränktheit $\|f(x)\| < 1$. Aus dieser Eigenschaft folgt aus der Integraldarstellung der Lösung die Ungleichung $\|\varphi(t, x) - x\| \leq t$ und daraus die Ungleichung $\|\varphi(t, x)\| \geq \|x\| - t$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x) &= \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt \geq \int_0^{\|x\|} \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &= \int_0^{\|x\|} \omega(\|\varphi(t, x)\|) dt \geq \int_0^{\|x\|} \omega(\|x\| - t) dt =: \alpha_1(\|x\|).\end{aligned}$$

Diese Funktion α_1 ist stetig, streng monoton wachsend und erfüllt wegen der Monotonie und nicht-Negativität von ω die Ungleichung

$$\alpha_1(r) = \int_0^r \omega(r-t) dt \geq \int_0^{r/2} \omega(r-t) dt \geq \int_0^{r/2} \omega(r/2) dt = \frac{r}{2} \omega(r/2) \rightarrow \infty$$

für $r \rightarrow \infty$. Da aus der Integraldarstellung zudem $\alpha_1(0) = 0$ folgt, erhalten wir $\alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$.

“(ii)”: Beachte zunächst, dass für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 1$ aus Gronwalls Lemma die Ungleichung

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{Lt} \|x - y\|$$

folgt. Mit

$$\delta(t) := \max\{\|\varphi(t, x)\|, \|\varphi(t, y)\|\} \leq \beta(\max\{\|x\|, \|y\|\}, t)$$

gilt für solche x und y die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\tilde{V}(x) - \tilde{V}(y)| &\leq \int_0^\infty |\tilde{W}(\varphi(t, x)) - \tilde{W}(\varphi(t, y))| dt \\ &\leq \int_0^\infty L_{\delta(t)} \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha(\delta(t))^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha(\beta(\max\{\|x\|, \|y\|\}, t))^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-(L+1)t} \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \|x - y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \|x - y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} \leq \|x - y\|,\end{aligned}$$

was die behauptete Lipschitz-Stetigkeit (mit Lipschitz-Konstante 1) zeigt.

Seien nun beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $M = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ und L_M eine Lipschitz-Konstante für f auf $B_{\beta(M,0)}$. Wiederum mit Gronwalls Lemma erhalten wir

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{L_M t} \|x - y\|$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{V}(x) - \tilde{V}(y)| &= \left| \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\sigma(M)} \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_0^{\sigma(M)} \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_{\sigma(M)}^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \int_{\sigma(M)}^\infty \tilde{W}(\varphi(t, y)) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\sigma(M)} |\tilde{W}(\varphi(t, x)) - \tilde{W}(\varphi(t, y))| dt \\ &\quad + \left| \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, \varphi(\sigma(M), x))) - \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, \varphi(\sigma(M), y))) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\sigma(M)} L_W e^{L_M t} \|x - y\| dt + |\tilde{V}(\varphi(\sigma(M), x)) - \tilde{V}(\varphi(\sigma(M), y))| \\ &\leq \frac{L_W}{L_M} (e^{L_M \sigma(M)} - 1) \|x - y\| + \|e^{L_M \sigma(M)}\| \|x - y\| =: L_{V,M} \|x - y\|, \end{aligned}$$

also die behauptete Lipschitz-Stetigkeit.

“(iii)”: Aus der Definition von \tilde{V} folgt die Gleichung

$$\tilde{V}(\varphi(\tau, x)) - \tilde{V}(x) \leq - \int_0^\tau \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt,$$

aus der man die gewünschte Eigenschaft durch Differenzieren nach τ in $\tau = 0$ erhält.

Wir wenden nun Satz 9.16 mit $O = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\gamma(x) = \min\{\tilde{\alpha}_1(\|x\|), \tilde{\alpha}_2(\|x\|)\}/2$ und $\delta(x) = \tilde{W}(x)/2$ an.

Mit $\alpha_1(r) = \tilde{\alpha}_1(r)/2$ und $\alpha_2(r) = 3\tilde{\alpha}_2(r)/2$ folgt damit

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

und mit $W(x) = \tilde{W}(x)/2$ gilt für alle Punkte, in denen \tilde{V} differenzierbar ist, die Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -W(x).$$

Sei x nun ein Punkt, in dem \tilde{V} nicht differenzierbar ist. Nach Satz 9.15 gibt es in jeder Umgebung $B_{\frac{1}{n}}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, einen Punkt x_n , in dem \tilde{V} differenzierbar ist. Wegen $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ und der Stetigkeit von DV , f und W gilt damit

$$DV(x)f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} DV(x_n)f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} -W(x_n) = -W(x),$$

also die gewünschte Eigenschaft. \square

Bemerkung 9.17 Die Konstruktionsidee in diesem Beweis wurde in den 1960er Jahren von dem russischen Mathematiker V.I. Zubov [16] entwickelt.² Wenn die (partielle) Differentialgleichung

$$D\tilde{V}(x)f(x) = -\tilde{W}(x) \quad (9.12)$$

lösbar ist, liefert der Beweis sogar eine konstruktive Methode zu Berechnung von \tilde{V} . Manchmal ist dies möglich, auch wenn man die Lösungen der zu Grunde liegenden gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ nicht kennt, im Allgemeinen ist (9.12) aber schwer lösbar. In niedrigeren Raumdimensionen ($n=2,3$) existieren verschiedene numerische Verfahren zur Lösung der Gleichung (9.12). \square

²Alternative Konstruktionsmethoden wurden u.A. von Kurzweil, Massera und Yoshizawa entwickelt.

Kapitel 10

Asymptotische Kontrollierbarkeit und Feedback–Stabilisierung

In diesem Kapitel werden wir die Stabilitätsdefinition aus dem letzten Kapitel auf Kontrollsysteme (8.1) verallgemeinern, was zu den Begriffen Asymptotische Kontrollierbarkeit und Feedback–Stabilisierbarkeit führt. Wir werden dann untersuchen, wie diese beiden Begriffe zusammen hängen und dies an Beispielen illustrieren.

10.1 Definition

Wir kehren nun zurück zu unserem Kontrollsystem (8.1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

und wollen den Stabilitätsbegriff von (9.1) auf (8.1) verallgemeinern. Wie in der Einführung bereits erwähnt, gibt es zwei wesentliche Möglichkeiten, die Kontrollfunktion $u(t)$ zu spezifizieren:

- als explizit zeitvariante Funktion $u \in \mathcal{U} = L_\infty(\mathbb{R}, U)$
- mittels eines Feedback–Gesetzes $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ via $u(t) = F(x(t))$

Im ersten Fall spricht man von *Steuerung* oder *open–loop Kontrolle*, im zweiten Fall von *Regelung*, *Feedback–Kontrolle* oder *closed–loop Kontrolle*. Für ein gegebenes Feedback F bezeichnen wir dabei die Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$$

zum Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t, x_0, F)$.

In Fall der Steuerung haben wir mit Satz 1.4 einen allgemeinen Existenz– und Eindeutigkeitssatz; im Fall der Regelung nehmen wir an, dass das Vektorfeld $g(x) = f(x, F(x))$ (lokal) Lipschitz–stetig ist, so dass der Existenzsatz 1.4 (angewendet ohne u) auf das Vektorfeld $g(x)$ anwendbar ist.

Definition 10.1 Es sei $x^* = 0$ ein Gleichgewicht des Kontrollsystems (8.1) für ein $u^* \in U$.

(i) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ heißt (lokal) *asymptotisch kontrollierbar*, wenn eine offene Umgebung N von x^* und Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$ existieren, so dass zu jedem $x \in N$ eine Kontrollfunktion $u_x \in \mathcal{U}$ existiert mit $\|u_x\|_\infty \leq \gamma(\|x\|)$ und

$$\|\varphi(t, x, u_x)\| \leq \beta(\|x\|, t)$$

für alle $t \geq 0$.

(ii) Das Gleichgewicht $x^* = 0$ heißt (lokal) *Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar*, wenn eine offene Umgebung N von x^* , eine Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ sowie eine stetige Feedback-Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ mit $f(x, F(x))$ lokal Lipschitz in x existieren mit

$$\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t) \text{ für alle } x \in N, t \geq 0.$$

(iii) Die obige Kontrollierbarkeit bzw. Stabilisierbarkeit heißt *global*, falls $N = \mathbb{R}^n$ und *exponentiell*, falls $\beta(r, t) = Ce^{-\sigma t}r$ für Konstanten $C, \sigma > 0$ gewählt werden kann. \square

Wie bereits in der Stabilitätsdefinition ohne Kontrolle nehmen wir hierbei implizit an, dass die betrachteten Lösungen $\varphi(t, x, u_x)$ bzw. $\varphi(t, x, F)$ für alle $t \geq 0$ existieren.

In der Praxis wird man, wenn möglich, typischerweise Feedback-Lösungen bevorzugen, da diese auf den aktuellen Zustand eingehen können und damit — insbesondere bei langen Kontrollhorizonten — auf Fehler (Modellfehler, äußere Störungen etc.) reagieren und diese im Idealfall korrigieren können, was eine open-loop Steuerung i.A. nicht leisten kann. Eine wesentliche Frage, die wir in den nächsten Kapiteln untersuchen werden, ist also, unter welchen Bedingungen stabilisierende Feedbacks existieren und wie man diese berechnet.

In diesem Kapitel untersuchen wir nun zunächst die Frage, wie die beiden Begriffe (i) und (ii) miteinander in Beziehung stehen.

Tatsächlich ist es relativ leicht zu zeigen, dass die Feedback-Stabilisierung die asymptotische Kontrollierbarkeit impliziert, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 10.2 Wenn das Gleichgewicht $x^* = 0$ für das Kontrollsystem (8.1) (lokal, global, exponentiell) Feedback-stabilisierbar ist, so ist es auch (lokal, global, exponentiell) asymptotisch kontrollierbar.

Beweis: Es gelte Definition 10.1(ii) und es sei $x \in N$ beliebig. Sei $\varphi(t, x, F)$ die Lösung des Feedback-geregelten Systems. Diese existiert dann für alle $t \geq 0$ und erfüllt die Ungleichung aus Definition 10.1(ii). Definieren wir nun die stetige Funktion $\gamma(r) = \max_{\|x\| \leq \beta(r, 0)} \|F(x)\|$ und setzen

$$u_x(t) = \begin{cases} F(\varphi(t, x, F)), & t \geq 0 \\ F(0), & t < 0 \end{cases},$$

so ist u stückweise stetig und durch $\gamma(\|x\|)$ beschränkt und liegt damit insbesondere in $L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Für die zugehörige Lösung $\varphi(t, x, u)$ gilt dann

$$\dot{\varphi}(t, x, F) = f(\varphi(t, x, u), F(\varphi(t, x, F))) = f(\varphi(t, x, F), u_x(t)).$$

Integration dieser Gleichung liefert, dass $\varphi(t, x, F)$ die Integralgleichung

$$\varphi(t, x, F) = x + \int_0^t f(\varphi(\tau, x, F), u_x(\tau)) d\tau$$

erfüllt. Da nach Satz 1.4 die Funktion $\varphi(t, x, u_x)$ die eindeutige Lösung dieser Integralgleichung ist, folgt $\varphi(t, x, u) = \varphi(t, x, F)$, womit $\varphi(t, x, u)$ die Ungleichung aus Definition 10.1(i) erfüllt und die asymptotische Kontrollierbarkeit folgt. \square

Beachte, dass wir in diesem Beweis nur benötigen, dass die Funktion $u_x(\cdot) = F(\varphi(\cdot, x, F))$ die Bedingungen von Definition 10.1(i) erfüllt. Die hier vorausgesetzte Stetigkeit von F ist dafür hinreichend aber nicht notwendig, weswegen sich dieses Resultat auf allgemeinere Feedback-Klassen verallgemeinern lässt.

Für lineare Kontrollsysteme gilt auch die Umkehrung, was man leicht mit der Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A_1 z_1(t) + A_2 z_2(t) + B_1 u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= A_3 z_2(t) \end{aligned}$$

mit $z_1(t) \in \mathbb{R}^r$ und $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$ aus Lemma 2.14 sieht: Die z_2 -Komponente der Lösung ist gerade durch $e^{A_3 t} z_{0,2}$ gegeben und damit nicht von der Wahl von u abhängig. Falls das System nullkontrollierbar ist (beachte, dass die asymptotische Kontrollierbarkeit von 0 unter einer linearen Koordinatentransformation erhalten bleibt), muss diese Lösungskomponente gegen 0 konvergieren, was nach Satz 3.4 genau dann der Fall ist, wenn alle Eigenwerte von A_3 negativen Realteil haben. Dies impliziert nach Satz 3.26 die Existenz eines stabilisierenden linearen Feedbacks $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, für das $f(x, Fx) = (A + BF)x$ linear und damit Lipschitz-stetig ist.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Umkehrung von Satz 10.2 auch für nichtlineare Systeme gilt. Dies wollen wir im folgenden Abschnitt untersuchen.

10.2 Brocketts Bedingung

In diesem Abschnitt werden wir zuerst eine leicht überprüfbare notwendige Bedingung an das Vektorfeld $f(x, u)$ herleiten, mit der man testen kann, ob ein System Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar ist. Dies Kriterium wurde 1983 von dem amerikanischen Mathematiker Roger W. Brockett veröffentlicht [3]; der Beweis, den wir hier angeben, stammt aus dem Buch von E.D. Sontag [14]. Wir formulieren das Resultat in Lemma 10.3 zuerst für unkontrollierte Differentialgleichungen $\dot{x} = f(x)$ und geben danach in Satz 10.4 die Folgerung für kontrollierte Differentialgleichungen $\dot{x} = f(x, u)$ an. Hierbei bezeichnen B_ρ und $\text{cl } B_\rho$ den offenen bzw. abgeschlossenen Ball mit Radius $\rho > 0$ um den Nullpunkt im \mathbb{R}^n

Lemma 10.3 Betrachte ein gewöhnliche Differentialgleichung (9.1) mit lokal Lipschitz-stetigem Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und lokal asymptotisch stabilem Gleichgewicht $x^* = 0$. Dann enthält die Menge

$$f(\mathbb{R}^n) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n\}$$

eine Umgebung B_ε der Null.

Beweis: Es bezeichne \mathbb{S}_ρ die Sphäre mit Radius ρ im \mathbb{R}^n , also $\mathbb{S}_\rho = \partial B_\rho$.

Wir skizzieren zunächst den Beweis der folgenden Eigenschaft: Wenn eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times \text{cl } B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^n :$$

die Bedingungen

$$H(1, x) = -x \text{ für alle } x \in \mathbb{S}_\rho \text{ und } H(t, x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{S}_\rho, t \in [0, 1]$$

erfüllt, so existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass die Inklusion

$$\text{cl } B_\varepsilon \subset H(0, \text{cl } B_\rho) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = H(0, x) \text{ für ein } x \in \text{cl } B_\rho\} \quad (10.1)$$

gilt.

Der Beweis von (10.1) beruht auf dem *Brouwer'schen Abbildungsgrad* $\deg(G, x)$ einer Abbildung $G : \text{cl } B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $x \in B_\rho$. Dies ist eine ganze Zahl, die der Abbildung zugeordnet wird (für eine genaue Definition siehe z.B. Jeggler [11, Definition (3), p. 94]. Der Betrag $|\deg(G, x)|$ liefert eine untere Schranke für die Anzahl der Lösungen $y \in \text{cl } B_\rho$ der Gleichung $G(y) = x$. Der Abbildungsgrad existiert unter den obigen Voraussetzungen an H für die Abbildungen $G_t(x) := H(t, x)$, $t \in [0, 1]$, zudem ist er unabhängig von $t \in [0, 1]$ (dies folgt aus dem Homotopiesatz [11, Satz (26), p. 103]). Aus dem Randsatz [11, Satz (27)] und der expliziten Formel von $\deg(G, x)$ für differenzierbares G erhält man $\deg(G_t, 0) = (-1)^n$ für alle $t \in [0, 1]$. Aus der Stetigkeit von $G_0(x) = H(0, x)$ in x und der Kompaktheit der Sphäre \mathbb{S}_ρ folgt die Existenz von $\varepsilon > 0$ mit $\|G_0(x)\| > \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{S}_\rho$. Hieraus folgt mit [11, Satz (29)] die Gleichung $\deg(G_0, x) = (-1)^n$ für alle $x \in \text{cl } B_\varepsilon$, folglich besitzt die Gleichung $G_0(y) = x$ für alle $x \in \text{cl } B_\varepsilon$ mindestens eine Lösung $y \in \text{cl } B_\rho$, woraus (10.1) folgt.

Mit Hilfe von (10.1) beweisen wir nun das Lemma. Wähle einen abgeschlossenen Ball $\text{cl } B_\rho \subset N$, wobei N die Umgebung aus der Stabilitätsdefinition 3.2(iii) ist. Wir wenden (10.1) auf die Abbildung

$$H(t, x) := \begin{cases} f(x), & t = 0 \\ -x, & t = 1 \\ \frac{1}{t} \left[\varphi \left(\frac{t}{1-t}, x \right) - x \right], & t \in (0, 1) \end{cases}$$

an.

Wir müssen nachweisen, dass dieses H die obigen Bedingungen erfüllt. Zunächst ist sicherlich $H(1, x) = -x$, zudem ist $H(t, x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{S}_\rho \subset N \setminus \{0\}$ und alle $t \in [0, 1]$, da $H(0, x) = 0$ bedeuten würde, dass x ein Gleichgewicht ist, und $H(t, x)$ bedeuten würde, dass x ein $t/(1-t)$ -periodischer Punkt wäre; beides widerspräche der asymptotischen Stabilität für $x \in N$.

Es bleibt, die Stetigkeit von H zu zeigen. Für $t \in (0, 1)$ ist H als Komposition stetiger Funktionen stetig, für $t \rightarrow 1$ gilt wegen der asymptotischen Stabilität $\varphi \left(\frac{t}{1-t}, x \right) \leq \beta(\rho, t) \rightarrow 0$, woraus $H(t, x) \rightarrow -x$ gleichmäßig in x und damit die Stetigkeit folgt. Zum Beweis der

Stetigkeit in $t = 0$ zeigen wir, dass für jedes $x \in \text{cl } B_\rho$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|H(t, y) - f(x)\| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [0, 1], y \in \text{cl } B_\rho \text{ mit } t < \delta, \|y - x\| < \delta. \quad (10.2)$$

Zum Beweis von (10.2) verwenden wir die aus der Integraldarstellung der Lösungen stammende Gleichung

$$\frac{1}{s}(\varphi(s, y) - y) = \frac{1}{s} \int_0^s f(\varphi(\tau, y)) d\tau.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1+s}{s}(\varphi(s, y) - y) - f(x) = \frac{1}{s} \int_0^s (f(\varphi(\tau, y)) - f(x)) d\tau + \int_0^s f(\varphi(\tau, y)) d\tau.$$

Wegen der Stetigkeit von $f(\varphi(\cdot, \cdot))$ existieren nun $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass aus $s \in [0, \delta_1)$ und $\|y - x\| < \delta_2$ die Ungleichung

$$\|f(\varphi(\tau, y)) - f(x)\| < \varepsilon/2$$

folgt. Sei $M > 0$ eine Schranke für $\|f(\varphi(\tau, y))\|$ für $s \in [0, \delta_1)$ und $\|y - x\| < \delta_2$. Dann gilt für diese s und y und $t = s/(1+s)$ die Ungleichung

$$\|H(y, t) - f(x)\| < \varepsilon/2 + M \frac{t}{1-t}.$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass $\delta < \delta_2$, $\delta/(1-\delta) < \delta_1$ und $M \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon/2$ ist, so erhalten wir hieraus (10.2).

Die Funktion H erfüllt also alle Voraussetzungen, um (10.1) zu folgern, weswegen wir (10.1) und damit

$$\text{cl } B_\varepsilon \subset H(0, \text{cl } B_\rho) = f(\text{cl } B_\rho) \subseteq f(\mathbb{R}^n)$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ erhalten. Dies zeigt die Behauptung. \square

Der folgende Satz formuliert Lemma 10.3 für Kontrollsysteme.

Satz 10.4 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0, 0) = 0$. Angenommen, es existiert ein (lokal) stabilisierendes Feedback $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$, so dass $f(x, F(x))$ lokal Lipschitz-stetig ist. Dann enthält die Menge

$$f(\mathbb{R}^n, U) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x, u) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n \text{ und ein } u \in U\}$$

eine Umgebung B_ε der Null.

Beweis: Wenden wir Lemma 10.3 auf $g(x) = f(x, F(x))$ an, so erhalten wir sofort $B_\varepsilon \subseteq g(\mathbb{R}^n) = f(\mathbb{R}^n, F(\mathbb{R}^n)) \subseteq f(\mathbb{R}^n, U)$. \square

Beispiel 10.5 Betrachte das 3d System mit 2d Kontrolle

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t)u_1(t) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass kein Punkt der Form $(0, r, \varepsilon)$ mit $\varepsilon \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$ beliebig im Bild von f liegt.

Dieses Beispiel ist keine mathematische Spielerei, sondern modelliert ein lenkbares Fahrzeug mit Fahrtrichtungswinkel $\theta = x_1$ (gemessen bezüglich der x_1 -Achse) und Position $(z_1, z_2) = (x_2 \cos(\theta) + x_3 \sin(\theta), x_2 \sin(\theta) - x_3 \cos(\theta))$. Systeme dieser Art werden *nichtholonome Systeme* genannt und treten typischerweise in der Modellierung von Fahrzeugbewegungen auf. Das obige System ist als *Brocketts nichtholonome Integrator* bekannt. \square

Mit Hilfe von Beispiel 10.5 und Satz 10.4 können wir nun zeigen, dass die Umkehrung von Satz 10.2 nicht gilt.

Korollar 10.6 Die asymptotische Kontrollierbarkeit impliziert nicht die Lipschitz-stetige Feedback-Stabilisierbarkeit.

Beweis: Betrachte Beispiel 10.5 mit $U = \mathbb{R}^2$. Nach Satz 10.4 ist das System nicht Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar, da Brocketts notwendige Bedingung verletzt ist. Die Behauptung des Korollars folgt nun, wenn wir zeigen, dass das System asymptotisch kontrollierbar ist.

Für einen gegebenen Anfangswert $x \in \mathbb{R}^3$ wählen wir die Kontrollen

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ -\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}, & t \in [1, 2] \\ 0, & t \in [2, 3] \\ -(x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}), & t \in [3, 4] \\ 0, & t \geq 4 \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - x_2, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \in [1, 2] \\ -\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}, & t \in [2, 3] \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$

Mit diesen Kontrollen ergeben sich die folgenden Zustände

$$\begin{aligned} \varphi(1, x, u) &= \begin{pmatrix} x_1 + \int_0^1 0 dt \\ x_2 + \int_0^1 \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - x_2 dt \\ x_3 + \int_0^1 x_2(t) 0 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \varphi(2, x, u) &= \begin{pmatrix} x_1 + \int_1^2 -\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} dt \\ \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} + \int_1^2 0 dt \\ x_3 + \int_1^2 (\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|})(-\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} \\ \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(3, x, u) &= \begin{pmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - \int_2^3 0 dt \\ \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} + \int_2^3 -\operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} dt \\ 0 + \int_2^3 x_2(t) 0 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\varphi(4, x, u) = \begin{pmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - \int_3^4 -(x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|})dt \\ 0 + \int_2^3 0dt \\ 0 + \int_1^2 0 - (x_1 - \operatorname{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|})dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\varphi(t, x, 0) = 0$ für $t \geq 4$. Das System wird also in endlicher Zeit $t = 4$ nach 0 gesteuert. Verwenden wir der einfacheren Rechnung wegen die Maximums-Norm, so hat das System für $t \in [0, 4]$ den maximalen Abstand

$$\|x\|_\infty \leq \max\{|x_1| + \sqrt{|x_3|}, |x_2|, |x_3|\} \leq \|x\|_\infty + \sqrt{\|x\|_\infty}$$

vom Nullpunkt. Die Funktion $\beta(r, t) = e^4 e^{-t}(r + \sqrt{r})$ ist daher eine \mathcal{KL} -Funktion mit $\|\varphi(t, x, u)\|_\infty \leq \beta(\|x\|_\infty, t)$. Da zudem $\|u(t)\|_\infty \leq |x_1| + \sqrt{|x_3|} \leq \|x\|_\infty + \sqrt{\|x\|_\infty}$, folgt die asymptotische Kontrollierbarkeit mit $\gamma(r) = r + \sqrt{r}$. \square

10.3 Beispiel: Artsteins Kreise

In diesem Abschnitt diskutieren wir ein Beispiel, das zeigt, dass Brocketts Bedingung tatsächlich nur notwendig ist. Wir beweisen, dass das Beispiel Brocketts Bedingung erfüllt, obwohl für das System kein Lipschitz-stetig stabilisierendes Feedback existiert — tatsächlich existiert nicht einmal ein stetig stabilisierendes Feedback. Das von dem israelischen Mathematiker Zvi Artstein stammende und unter dem Namen “Artsteins Kreise” bekannte Beispiel ist gegeben durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left(-x_1(t)^2 + x_2(t)^2\right)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(-2x_1(t)x_2(t)\right)u(t). \end{aligned} \tag{10.3}$$

Beachte, dass Brocketts Bedingung erfüllt ist: Für $v = (v_1, v_2)^T$ mit $v_2 \neq 0$ wählen wir $x_1 = 1, x_2 = \frac{v_1}{v_2} + \sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} + 1}$ ($\Rightarrow x_2^2 - 1 = -2\frac{v_1}{v_2}x_2$, beachte, dass $x_2 \neq 0$ ist) und $u = -\frac{v_2}{2x_2}$. Damit ergibt sich

$$f(\mathbb{R}^n, U) \ni f(x, u) = \begin{pmatrix} -1 + x_2^2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{2x_2}(-2\frac{v_1}{v_2}x_2) \\ -\frac{v_2}{2x_2}(-2x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Für $v_2 = v_1 = 0$ wählen wir $u = 0$ und x beliebig und für $v_2 = 0$ und $v_1 \neq 0$ wählen wir $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{|v_1|}$ und $u = \operatorname{sgn}(v_1)$.

Somit liegt jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ im Bild von f darstellen, womit Brocketts Bedingung erfüllt ist.

Um zu zeigen, dass das System nicht mit stetigem Feedback stabilisierbar ist, betrachten wir die Lösungstrajektorien, die sich für dieses System analytisch beschreiben lassen: Für den Anfangswert $x = (x_1, x_2)$ setzen wir

$$r = r(x) = \begin{cases} \|x\|^2/2x_2, & x_2 > 0 \\ -\|x\|^2/2x_2, & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0 \\ \infty, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

Dann sind die Lösungen zu diesem Anfangswert gegeben durch

$$\varphi(t, x, u) = \begin{cases} (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, u)), -r \cos(\psi_r(t, \psi_0, u)) + r)^T, & x_2 > 0 \\ (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, u)), r \cos(\psi_r(t, \psi_0, u)) - r)^T, & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0 \\ (\psi_\infty(t, \psi_0, u), 0)^T, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

wobei $\psi_r(\cdot, \psi, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi_\infty(\cdot, \psi, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösungen der 1d Kontrollsysteme

$$\dot{\psi}(t) = g_r(\psi, u) = 2u(t)r(\cos(\psi(t)) - 1)$$

mit Anfangsbedingung $r \sin(\psi_0) = x_1$ bzw.

$$\dot{\psi}_\infty(t) = g_\infty(\psi, u) = -u(t)\psi(t)^2$$

mit Anfangsbedingung $\psi_0 = x_1$ sind. Wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus können wir im Falle $r < \infty$ $\psi_0 \in [-\pi, \pi]$ annehmen. Der Nullpunkt $x = (0, 0)^T$ entspricht dann gerade dem Punkt $\psi_0 = 0$. Einige dieser Lösungen sind in Abbildung 10.1 dargestellt.

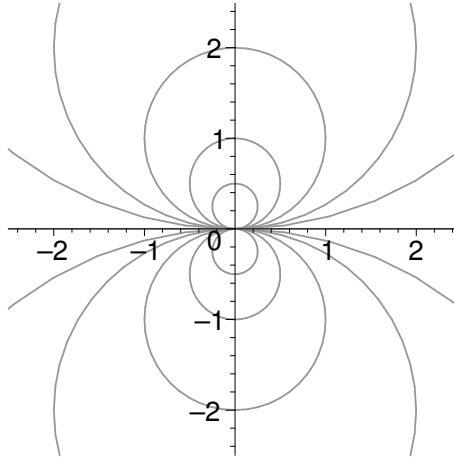


Abbildung 10.1: Einige Lösungen von System 10.3

Beachte, dass man die in Abbildung 10.1 dargestellten Lösungskurven nicht verlassen kann, egal wie u gewählt wird; man kann lediglich die Richtung und die Geschwindigkeit beeinflussen, mit der diese Kurven durchlaufen werden.

Wir wollen nun beweisen, dass es kein stetiges Feedback geben kann, das dieses System stabilisiert, nicht einmal lokal. Wir nehmen dazu an, dass mit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokal stabilisierendes stetiges Feedback gegeben ist.

Wähle ein $r > 0$ so klein, dass der zugehörige Lösungskreis ganz in der Umgebung N liegt, in der das mittels F geregelte System asymptotisch stabil ist. Für die durch

$$\tilde{F}(\psi) = F(r \sin(\psi), -r \cos(\psi) + r)$$

gegebene Abbildung $F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann, dass die Lösungen $\varphi(t, x, F)$ des mittels geregelten Systems für Anfangswerte $x = (x_1, x_2)$ mit $x_2 > 0$ und $r(x) = r$ von der Form

$$\varphi(t, x, F) = (r \sin(\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F})), -r \cos(\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F})) + r)^T$$

mit $r \sin(\psi_0) = x_1$ sind. Aus der angenommenen asymptotischen Stabilität folgt die Konvergenz $\varphi(t, x, F) \rightarrow 0$ und $\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, 0)$, woraus für ψ hinreichend nahe bei 0 die Konvergenz $\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F}) \rightarrow 0$ folgt. Da ψ eindimensional ist, müssen in einer Umgebung der Null also die Bedingungen

$$\begin{aligned} g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &< 0 && \text{für } \psi > 0 \\ g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &> 0 && \text{für } \psi < 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

gelten. Wiederum wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus gilt

$$g_r(\psi + 2\pi, \tilde{F}(\psi + 2\pi)) = g_r(\psi, \tilde{F}(\psi))$$

für alle $\psi \in \mathbb{R}$. Also folgt aus (10.4), dass eine Umgebung von $\psi^* = 2\pi$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &< 0 && \text{für } \psi > 2\pi \\ g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) &> 0 && \text{für } \psi < 2\pi \end{aligned} \quad (10.5)$$

gilt. Aus (10.4) und (10.5) folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$g_r(\varepsilon, \tilde{F}(\varepsilon)) < 0 \text{ und } g_r(2\pi - \varepsilon, \tilde{F}(2\pi - \varepsilon)) > 0$$

ist. Da $g_r(\psi, \tilde{F}(\psi))$ stetig in ψ ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ mit $g_r(\xi, \tilde{F}(\xi)) = 0$. Daraus folgt, dass auch $f(x_1, F) = 0$ ist für $x_1 = (r \sin(\xi), -r \cos(\xi) + r) \neq 0$, also ist x_1 ein Gleichgewicht und es folgt

$$\varphi(t, x_1) = x_1 \text{ für alle } t > 0. \quad (10.6)$$

Da x_1 aber auf dem zu r gehörigen Lösungskreis liegt, liegt $x_1 \in N$. In diesem Bereich ist das geregelte System aber asymptotisch stabil, also folgt $\varphi(t, x_1) \rightarrow 0$, was ein Widerspruch zu (10.6) ist. Also kann F nicht existieren.

Kapitel 11

Linearisierung

In früheren Kapiteln dieser Vorlesung haben wir Methoden zur Berechnung stabilisierender Feedbacks für lineare Kontrollsysteme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ entwickelt. Unter der Bedingung, dass das System stabilisierbar ist (was man durch Bedingungen an das Matrizenpaar (A, B) sicher stellen kann), haben wir explizite Methoden zur Berechnung eines stabilisierenden linearen Feedbacks $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ betrachtet.

In diesem Kapitel wollen wir beweisen, dass ein asymptotisch stabilisierendes lineares Feedback auch das nichtlineare System (8.1) lokal asymptotisch stabilisiert. Hierzu betrachten wir zunächst einige Grundlagen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.

11.1 Die linearisierte Differentialgleichung

Wir betrachten zunächst wieder unsere nichtlineare Differentialgleichung (9.1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung ist.

Wir erinnern an den Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, siehe z.B. O. Forster, Analysis II [6].

Bemerkung 11.1 Falls $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in einem Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$, so gilt für die Jacobi-Matrix $A = Df(x^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für alle x aus einer Umgebung N der 0 die Ungleichung

$$f(x^* + x) = f(x^*) + Ax + r(x),$$

wobei $r : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion ist mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\|x\|} = 0.$$

□

Sei nun $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht der Gleichung (9.1), also $f(0) = 0$. Für $x^* = 0$ existiert dann eine Umgebung N von $x^* = 0$ mit

$$f(x) = Ax + r(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\|x\|} = 0$$

für $A = Df(0)$. Für dieses A betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{11.1}$$

eine lineare Differentialgleichung vom Typ (9.1). Die Gleichung (11.1) wird als *Linearisierung* von (9.1) im Punkt $x^* = 0$ bezeichnet. Ihre Lösungen mit Anfangswert $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\psi(t, x)$.

11.2 Approximation der Lösungstrajektorien

Unser Ziel ist es nun, die Lösungen $\varphi(t, x)$ der Differentialgleichung (9.1) mit den Lösungen $\psi(t, x)$ ihrer Linearisierung (11.1) zu vergleichen, natürlich in der Hoffnung, dass $\psi(t, x)$ eine brauchbare Approximation von $\varphi(t, x)$ darstellt. Der folgende Satz zeigt, dass dies in einer Umgebung von $x^* = 0$ tatsächlich der Fall ist.

Satz 11.2 Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (9.1) mit Gleichgewicht $x^* = 0$ und ihre Linearisierung (11.1). Bezeichne die zugehörigen Lösungen mit $\varphi(t, x)$ und $\psi(t, x)$. Seien $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jeden Anfangswert $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq \delta$ die Abschätzung

$$\|\varphi(t, x) - \psi(t, x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

gilt für alle $t \in [0, T]$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die folgende Eigenschaft der Lösungen von (9.1):

$$\begin{aligned} &\text{Für jedes } T > 0 \text{ existieren ein } \delta > 0 \text{ und ein } \alpha > 0, \text{ so dass } \|\varphi(t, x)\| \leq \alpha \|x\| \\ &\text{gilt für alle Anfangswerte } x \text{ mit } \|x\| \leq \delta \text{ und alle } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Zum Beweis von Eigenschaft (11.2) beachte, dass aus der Lipschitz Stetigkeit von f die Abschätzung

$$\|f(x)\| \leq L \|x\| \tag{11.3}$$

folgt für eine geeignete Konstante $L > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq 1$. Zu dem gegebenen $T > 0$ setzen wir nun $\delta := e^{-LT} < 1$. Die Behauptung ist nun, dass für dieses $\delta > 0$ die Eigenschaft (11.2) erfüllt ist. Wähle dazu einen Anfangswert x mit $\|x\| \leq \delta$. Sei $t_0 > 0$ die minimale Zeit mit $\varphi(t_0, x) \geq 1$ mit $t_0 = \infty$, falls diese Gleichheit nie gilt. Wir zeigen zunächst, dass $t_0 \geq T$ gilt. Falls $t_0 = \infty$ gilt ist nichts zu zeigen. Ansonsten gilt für $t \in [0, t_0]$ mit dem Gronwall-Lemma die Abschätzung

$$\|\varphi(t, x)\| = \|\varphi(t, x) - \varphi(t, 0)\| \leq e^{Lt} \|x - 0\| = e^{Lt} \|x\|, \tag{11.4}$$

und daraus nach Wahl von t_0

$$1 \leq \|\varphi(t_0, x)\| \leq e^{Lt_0} \|x\| \leq e^{Lt_0} \delta \leq e^{Lt_0} e^{-LT} = e^{L(t_0-T)},$$

also $e^{L(t_0-T)} \geq 1$. Da $L > 0$ ist, muss $t_0 \geq T$ sein, was zu zeigen war. Die behauptete Eigenschaft (11.2) folgt nun sofort aus (11.4) mit $\alpha = e^{LT}$.

Wir beweisen nun die Aussage des Satzes und wählen dazu $\varepsilon > 0$ und $T > 0$. Sei $D = \max_{t \in [0, T]} \|e^{At}\|$ und seien $\delta > 0$ und $\alpha > 0$ aus Eigenschaft (11.2). Aus der Eigenschaft von r folgt, dass ein $\tilde{\delta} > 0$ existiert mit

$$\|r(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{DT\alpha} \|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq \tilde{\delta}$; insbesondere sei $\tilde{\delta}$ dabei so gewählt, dass $r(x)$ definiert ist falls $\|x\| \leq \tilde{\delta}$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\delta \leq \tilde{\delta}$ und $\delta \leq \tilde{\delta}/\alpha$. Wegen (11.2) folgt aus der zweiten Ungleichung, dass $r(\varphi(t, x))$ definiert ist für alle $t \in [0, T]$ falls $\|x\| \leq \delta$.

Wir wählen nun einen Anfangswert $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq \delta$. Setzen wir $g(t) = r(\varphi(t, x))$, so erfüllt die zugehörige Lösung $\varphi(t, x)$ von (9.1) für $t \in [0, T]$ offenbar die nichtautonome lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t).$$

Mit der allgemeinen Form (1.8) der Lösung dieser Gleichung für $u = g$ und $B = \text{Id}$ gilt

$$\varphi(t, x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds = \psi(t, x) + \int_0^t e^{A(t-s)}r(\varphi(s, x))ds.$$

Also folgt für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\psi(t, x) - \varphi(t, x)\| &\leq \left\| \int_0^t e^{A(t-s)}r(\varphi(s, x))ds \right\| \leq \int_0^t \|e^{A(t-s)}r(\varphi(s, x))\|ds \\ &\leq DT \sup_{s \in [0, T]} r(\underbrace{\varphi(s, x)}_{\|\cdot\| \leq \alpha \|x\| \leq \tilde{\delta}}) \leq DT \frac{\varepsilon}{DT\alpha} \alpha \|x\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

was die Behauptung liefert. □

11.3 Stabilität und Linearisierung

Satz 11.2 liefert keine direkte Möglichkeit, Stabilitätseigenschaften zu untersuchen, da die Menge der Anfangswerte, für die er gilt, von der gewählten Zeit T abhängt. Eine Aussage für $T \rightarrow \infty$ ist also nicht so ohne weiteres zu erhalten.

Zum Beweis der lokalen asymptotischen Stabilität von (9.1) werden wir daher auf einen Beweis mittels Ljapunov-Funktionen zurück greifen. Trotzdem ist Satz 11.2 für die Rückrichtung im Beweis des folgenden Satzes über die linearisierte asymptotische Stabilität wichtig.

Satz 11.3 Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (9.1) mit Gleichgewicht $x^* = 0$ und ihre Linearisierung (11.1). Dann ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal exponentiell stabil für Gleichung (9.1) genau dann, wenn es global exponentiell stabil für Gleichung (11.1) ist.

Beweis: Sei Gleichung (11.1) exponentiell stabil. Aus Satz 3.13 folgt dann die Existenz einer bilinearen Ljapunov Funktion $V(x) = x^T P x$ mit $c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2$, $DV(x)Ax \leq -c_3 \|x\|^2$ und symmetrischer und positiv definiten Matrix P . Wegen

$$DV(x)f(x) = DV(x)A(x) + DV(x)r(x) \leq -c_3 \|x\|^2 + 2x^T P r(x) \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \|x\| \|r(x)\|$$

für ein geeignetes $c_4 > 0$. Aus der Differenzierbarkeitseigenschaft folgt für alle hinreichend kleinen x , dass $\|r(x)\| \leq \frac{c_3}{2c_4} \|x\|$ ist. Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq \delta$ die Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -\frac{c_3}{2} \|x\|^2 \quad (11.5)$$

gilt. Damit erfüllt V alle Eigenschaften einer lokalen Ljapunov-Funktion für (9.1), woraus die lokale asymptotische Stabilität mit Satz 9.10 folgt. Die lokale exponentielle Stabilität folgt mit den gleichen Rechnungen wie im Beweis von Satz 3.8.

Sei umgekehrt $x^* = 0$ lokal exponentiell stabil für (9.1). Dann gibt es insbesondere ein $T > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass für alle $\|x\| \leq \delta$ die Ungleichung

$$\|\varphi(T, x)\| \leq \frac{1}{2} \|x\|$$

gilt. Aus Satz 11.2 angewendet mit $\varepsilon = 1/4$ folgt nun, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass die Lösungen der linearen Gleichung (11.1) für alle Anfangswerte x mit $\|x\| \leq \delta$ die Abschätzung

$$\|\psi(T, x)\| \leq \frac{3}{4} \|x\|$$

erfüllen, woraus wir

$$\|e^{AT}\| = \sup_{\|x\|=\delta} \frac{\|e^{AT}x\|}{\delta} \leq \frac{3}{4}$$

erhalten. Wir zeigen, dass hieraus die exponentielle Stabilität folgt: Sei $a = \ln(\|e^{AT}\|)/T$, also $\|e^{AT}\| = e^{aT}$. Wegen $\|e^{AT}\| = 3/4 < 1$ folgt $a < 0$. Sei nun $t > 0$ beliebig und $k \geq 0$ die größte ganze Zahl mit $kT \leq t$. Dann gilt $kT \geq t - T$ und $t - kT \leq T$ und damit

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &= \|e^{A(t-kT)} e^{AkT}\| \leq \|e^{A(t-kT)}\| \|e^{AkT}\| \leq e^{\|A\|T} \|e^{AT}\|^k \\ &= e^{\|A\|T} e^{akT} \leq e^{\|A\|T} e^{a(t-T)} = e^{\|A\|T} e^{-aT} e^{at}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun für $c = e^{\|A\|T} e^{-aT}$ und $\sigma = -a$ die Abschätzung

$$\|\psi(t, x)\| = \|e^{At}x\| \leq ce^{-\sigma t} \|x\|,$$

also gerade die behauptete exponentielle Stabilität. \square

Wir formulieren zwei Korollare, die sich aus den Ergebnissen ergeben.

Korollar 11.4 Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (9.1) mit Gleichgewicht $x^* = 0$. Dann ist $x^* = 0$ genau dann lokal exponentiell stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(0)$ negativen Realteil haben.

Beweis: Nach Satz 11.3 ist $x^* = 0$ genau dann lokal exponentiell stabil für (9.1), wenn die Linearisierung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit $A = Df(0)$ exponentiell stabil ist. Nach Satz 3.5 ist dies genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil besitzen. \square

Korollar 11.5 Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung (9.1) mit Gleichgewicht $x^* = 0$. Dann ist $x^* = 0$ genau dann lokal exponentiell stabil, wenn eine lokale bilineare Ljapunov Funktion existiert.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 11.3 zeigt man, dass die Existenz einer lokalen bilinearen Ljapunov Funktion die lokale exponentielle Stabilität impliziert.

Falls umgekehrt $x^* = 0$ lokal exponentiell stabil ist, ist die Linearisierung exponentiell stabil, und nach Satz 3.13 folgt dann die Existenz einer bilinearen Ljapunov Funktion. Der Beweis von Satz 11.3 zeigt dann, dass dies eine lokale bilineare Ljapunov Funktion für (9.1) in $x^* = 0$ ist. \square

Für lineare Systeme wissen wir, dass exponentielle und asymptotische Stabilität äquivalent sind. Für nichtlineare Systeme ist das nicht der Fall. Insbesondere gilt Satz 11.3 nicht, falls wir für das nichtlineare System (9.1) nur asymptotische Stabilität voraussetzen. Dies zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 11.6 Betrachte die nichtlineare eindimensionale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3.$$

In den Übungen wurde gezeigt, dass das Gleichgewicht $y^* = 0$ tatsächlich asymptotisch stabil, aber nicht exponentiell stabil ist.

Die Linearisierung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = 0$$

und offenbar ist diese Gleichung nicht asymptotisch stabil. \square

11.4 Feedback–Stabilisierung mittels Linearisierung

Satz 11.3 hat eine Konsequenz für nichtlineare Kontrollsysteme (8.1). Wenn das Vektorfeld $f(x, u)$ die Bedingung $f(0, 0) = 0$ erfüllt und in $(0, 0)$ stetig differenzierbar ist, so können wir das lineare Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{mit} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{und} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \quad (11.6)$$

definieren. Dieses System heißt die *Linearisierung* von (8.1) im Nullpunkt. Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen der Stabilisierbarkeit von (8.1) und seiner Linearisierung.

Satz 11.7 Gegeben sei ein nichtlineares Kontrollsystem (8.1) mit $f(0,0) = 0$ und Linearisierung (11.6). Dann gilt: ein lineares Feedback $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ stabilisiert den Nullpunkt $x^* = 0$ von (8.1) lokal exponentiell genau dann, wenn F die Linearisierung (11.6) global exponentiell stabilisiert.

Beweis: Wir setzen $g(x) = f(x, Fx)$. Dann gilt mit der Kettenregel

$$Dg(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)F = A + BF.$$

Das mittels F geregelte lineare System $\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$ ist also gerade die Linearisierung (im unkontrollierten Sinne (11.1)) des mittels F geregelten nichtlinearen Systems $\dot{x}(t) = f(x(t), Fx(t))$. Damit folgt die Behauptung sofort aus Satz 11.3. \square

Beispiel 11.8 Betrachte das nichtlineare invertierte Pendel (1.3)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + g \sin x_1(t) + u(t) \cos x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= u(t) \end{aligned} \right\} =: f(x(t), u(t)).$$

Die Linearisierung (11.6) ergibt hier

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vgl. (1.4)). In den Übungen wurde ein stabilisierendes lineares Feedback $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ für dieses lineare System berechnet. Die zugehörige Matrix $F \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ lautet

$$F = \left(-\frac{g+k^2}{g^2} - \frac{4k}{g} - 6 - g, \quad -\frac{k}{g^2} - \frac{4}{g} - 4 + k, \quad \frac{1}{g}, \quad \frac{k}{g^2} + \frac{4}{g} \right)$$

Abbildung (11.1) zeigt, dass dieses Feedback auch das nichtlineare Pendel stabilisiert. Die Abbildung zeigt die Komponenten der Trajektorie $\varphi(t, x, F)$ für $x = (1/2, 0, 0, 0)^T$. \square

Beispiel 11.9 Betrachte wiederum Brocketts nichtholonomen Integrator, vgl. Beispiel 10.5.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t)u_1(t) \end{aligned}$$

Da das Vektorfeld offensichtlich Lipschitz in u ist, liefert jedes stabilisierende lineare Feedback automatisch ein Lipschitz–stetiges Vektorfeld. Da ein solches nach Brocketts Bedingung nicht existieren kann, kann das linearisierte System folglich nicht stabilisierbar sein. Wir wollen diese Tatsache noch einmal explizit nachprüfen:

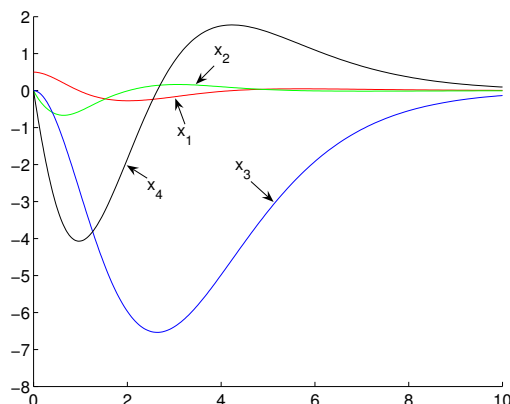


Abbildung 11.1: Lösungstrajektorie des nichtlinearen Pendels mit stabilisierendem linearem Feedback

Ausrechnen der Ableitungen liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir (11.6) mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

Die dritte Zeile der linearisierten Differentialgleichung ergibt sich damit zu

$$\dot{x}_3(t) = 0,$$

d.h., egal wie wir $u(t)$ bzw. F wählen gilt für die Lösung stets

$$\varphi_3(t, x, u) = x_3.$$

Die Lösung kann also nicht nach $x^* = 0$ konvergieren, weswegen kein stabilisierendes Feedback für die Linearisierung existieren kann. \square

Kapitel 12

Kontroll–Ljapunov–Funktionen

In diesem Kapitel wollen wir ein wesentliches Hilfsmittel bei der Betrachtung von Stabilität und Stabilisierbarkeit nichtlinearer Kontrollsysteme betrachten, die Kontroll–Ljapunov–Funktion. Dies ist eine direkte Verallgemeinerung der Ljapunov–Funktion für unkontrollierte Differentialgleichungen, wobei wir in der Definition allerdings keine Differenzierbarkeit annehmen. Zur Vereinfachung der Darstellung der Ergebnisse in diesem Abschnitt nehmen wir durchgehend an, dass die Funktion γ aus Definition 10.1(i) eine konstante Funktion ist, also $\gamma(r) \equiv C \in \mathbb{R}$ ist und schreiben kurz $U_C = \{u \in U \mid \|u\| \leq C\}$ und $\mathcal{U}_C = L_\infty(\mathbb{R}, U_C)$.

12.1 Definition und alternative Darstellungen

Definition 12.1 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0, 0) = 0$ und eine offene Umgebung $O \subset \mathbb{R}^n$ von 0. Eine stetige Funktion $V : O \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokale Kontroll–Ljapunov–Funktion* (clf), falls Funktionen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, eine stetige Funktion $W : O \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass die Ungleichungen

$$W(x) > 0, \tag{12.1}$$

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{12.2}$$

und

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \in [0, \tau(x, u))} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \leq V(x) \tag{12.3}$$

gelten für alle $x \in O \setminus \{0\}$ und ein $C > 0$. Hierbei bezeichnet

$$\tau(x, u) := \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(t, x, u) \notin O\}$$

mit der Konvention $\varphi(t, x, u) \notin O$ falls die Lösung zur Zeit t nicht mehr existiert.

Die Funktion V heißt *globale Kontroll–Ljapunov–Funktion*, falls V und W diese Bedingungen für $O = \mathbb{R}^n$ erfüllen.

Das Paar (V, W) wird dabei auch als *Kontroll–Ljapunov–Paar* bezeichnet. \square

Bemerkung 12.2 Analog zu Lemma 9.8 können wir bei Bedarf annehmen, dass $W(x) = g(V(x))$ ist für eine global Lipschitz–stetige Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und alle $x \in O$. \square

Das folgende Lemma zeigt, dass man Bedingung (12.3) schwächer formulieren kann. Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir dazu

$$\tau_K(x, u) := \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(t, x, u) \notin K\}.$$

Lemma 12.3 Eine stetige Funktion $V : O \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ erfüllt die Bedingung (12.3) genau dann, wenn sie für ein $T > 0$ und jede kompakte Menge $K \subset O$ die Bedingung

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \in [0, \min\{T, \tau_K(x, u)\}]} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \leq V(x) \quad (12.4)$$

erfüllt.

Beweis: Die Implikation “(12.3) \Rightarrow (12.4)” ist unmittelbar klar.

Zum Beweis der Implikation “(12.4) \Rightarrow (12.3)” wählen wir eine abzählbare Familie von kompakten Mengen $\{K_0, K_1, K_2, \dots\}$ mit

$$K_j \subset \text{int } K_{j+1} \quad \text{und} \quad \bigcup_{j \geq 0} K_j = O.$$

Für jedes $x \in O$ bezeichne $K(x)$ die kleinste der Mengen K_j , für die $x \in \text{int } K(x)$ gilt. Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$, jedes $x \in O$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert wegen (12.4) ein $u_{x, \varepsilon} \in \mathcal{U}_C$ mit

$$\sup_{t \in [0, t_i]} \left\{ V(\varphi(t, x, u_{x, \varepsilon})) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{x, \varepsilon})) ds - V(x) \right\} \leq \varepsilon \quad (12.5)$$

mit $t_i = \min\{T, \tau_{K(x_i)}(x_i, u_{x_i, \varepsilon_i})\}$. Nun wählen wir die Folge $\varepsilon_i = \varepsilon/2^{i+1}$ und definieren induktiv

$$x_0 = x, \quad x_{i+1} = \varphi(t_i, x, u_{x_i, \varepsilon_i})$$

für alle $i = 0, 1, 2, \dots$. Beachte, dass aus der Definition von τ_K und der Kompaktheit von $K(x)$ die Inklusion $x_{i+1} \in K(x_i) \subset O$ folgt. Zudem gilt

$$K(x_i) \neq K(x_{i+1}) \Leftrightarrow \tau_{K(x_i)}(x_i, u_{x_i, \varepsilon_i}) \leq T. \quad (12.6)$$

Definieren wir nun $T_i = \sum_{j=0}^{i-1} t_j$ und setzen die Kontrollen mittels

$$u(t) = u_{x_i, \varepsilon_i}(t - T_i), \quad t \in [T_i, T_{i+1}]$$

zusammen, so erhalten wir

$$\varphi(T_i + t, x, u) = \varphi(t, x_i, u_{x_i, \varepsilon_i})$$

für alle $t \in [0, t_i]$. Damit erhalten wir aus (12.5) für jedes $i = 0, 1, 2, \dots$ und jedes $t \in [T_i, T_{i+1}]$ die Ungleichung

$$V(\varphi(t, x, u)) + \int_{T_i}^t W(\varphi(s, x, u)) ds - V(x_i) \leq \varepsilon_i. \quad (12.7)$$

und daraus für $t = T_{i+1}$ insbesondere

$$V(x_{i+1}) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} W(\varphi(s, x, u)) ds - V(x_i) \leq \varepsilon_i. \quad (12.8)$$

Addieren wir nun (12.8) für $i = 1, \dots, k-1$ und (12.7) für $i = k$ so erhalten wir

$$V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds - V(x) \leq \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \leq \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [T_k, T_{k+1}]$. Daraus folgt

$$\sup_{t \in [0, T^*]} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds - V(x) \right\} \leq \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \leq \varepsilon. \quad (12.9)$$

mit $T^* = \lim_{i \rightarrow \infty} T_i$. Da $x_i \in O$ liegt, folgt $T^* \leq \tau(x, u)$. Falls $T^* = \infty$ ist oder die Lösung $\varphi(T^*, x, u)$ nicht mehr existiert, folgt $T^* = \tau(x, u)$. Wir zeigen nun noch, dass $T^* = \tau(x, u)$ auch gilt, wenn T^* endlich ist und die Lösung zum Zeitpunkt T^* noch existiert.

In diesem Fall gilt wegen der Stetigkeit von φ die Gleichung $\varphi(T^*, x, u) = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i =: x_\infty$. Um $T^* = \tau(x, u)$ zu zeigen müssen wir beweisen, $x_\infty \notin O$ gilt und nehmen dazu das Gegenteil an, also $x_\infty \in O$. Da die Mengen K_j die Menge O ausschöpfen, existiert ein $j \in \mathbb{N}_0$ mit $x_\infty \in K_j$. Wegen der Inklusionseigenschaft der K_j folgt dann $x_\infty \in \text{int } K_{j+1}$, und da das Innere $\text{int } K_{j+1}$ eine offene Menge ist, existiert ein $i^* > 0$ mit

$$x_i \in K_{j+1} \quad \text{für alle } i \geq i^*.$$

Definieren wir nun zu jedem x_i den Index $j(i)$ so, dass $K(x_i) = K_{j(i)}$ gilt, so folgt $j(i) \leq j+1$ für alle $i \geq i^*$. Zudem ist $j(i)$ nach Konstruktion von $K(x_i)$ und der Inklusionseigenschaft der K_j eine monoton wachsende Folge, also muss sie konvergieren. Da alle $j(i)$ aber ganze Zahlen sind, muss $j(i) = j(i+1)$ sein für alle hinreichend großen i . Aus (12.6) folgt $t_i = T$ für alle hinreichend großen i , was der Endlichkeit von $T^* = \sum_{i=0}^{\infty} t_i$ widerspricht.

Wir erhalten also in allen Fällen $T^* = \tau(x, u)$. Da zudem $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (12.3) aus (12.9). \square

Im differenzierbaren Fall können wir (12.3) durch eine Bedingung ersetzen, die ähnlich zu der für unkontrollierte Differentialgleichungen ist.

Lemma 12.4 Für eine stetig differenzierbare Funktion $V : O \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gilt (12.3) genau dann, wenn die Ungleichung

$$\inf_{u \in U_C} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) \quad (12.10)$$

für alle $x \in O$ gilt.

Beweis: Vorüberlegung: Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Stetigkeit von DV , φ und W folgt

$$\begin{aligned} V(\varphi(t, x, u)) - V(x) &= \int_0^t DV(\varphi(s, x, u))f(\varphi(s, x, u), u(s))ds \\ &= \int_0^t DV(x)f(x, u(s))ds + r_V(t, x, u) \\ &= DV(x) \int_0^t f(x, u(s))ds + r_V(t, x, u) \end{aligned} \quad (12.11)$$

und

$$\int_0^t W(\varphi(s, x, u))ds = tW(x) + r_W(t, x, u). \quad (12.12)$$

Für jede kompakte Menge $K \subset O$ lassen sich die Restterme hierbei für alle $x \in K$ abschätzen durch

$$|r_V(t, x, u)| + |r_W(t, x, u)| \leq \eta_K(t)$$

für ein $\eta_K : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\eta_K(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Nun zeigen wir die einzelnen Implikationen.

“(12.3) \Rightarrow (12.10)”: Sei $x \in O$. Dann existiert eine kompakte Menge $K \subset O$ mit $\varphi(s, x, u) \in K$ für alle $u \in \mathcal{U}_C$ und alle hinreichend kleinen $t > 0$. Aus (12.11), (12.12) und (12.3) folgt daher

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in \mathcal{U}_C} \frac{1}{t} DV(x) \int_0^t f(x, u(s))ds - W(x) \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \left\{ \frac{1}{t} (V(\varphi(t, x, u)) - V(x)) - \frac{1}{t} \int_0^t W(\varphi(s, x, u))ds \right\} + \frac{\eta_D(t)}{t} \leq \frac{\eta_D(t)}{t}. \end{aligned}$$

Für jedes $u \in \mathcal{U}_C$ gilt nun aber

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(x, u(s))ds \in \text{cl co } f(x, U_C),$$

wobei $\text{cl co } f(x, U_C)$ den Abschluss der konvexen Hülle von $f(x, U_C)$ bezeichnet. Es gilt also für $t \rightarrow 0$

$$\inf_{w \in \text{co } f(x, U_C)} DV(x)w = \inf_{w \in \text{cl co } f(x, U_C)} DV(x)w \leq -W(x).$$

Für jedes Element aus der konvexen Hülle gilt nun aber

$$w = \sum_i \lambda_i w_i$$

mit $w_i \in f(x, U_C)$ und $\sum \lambda_i = 1$. Damit folgt für jedes $w \in \text{co } f(x, U_C)$

$$DV(x)w = \sum_i DV(x)\lambda_i w_i \geq \min_i DV(x)w_i.$$

Folglich erhalten wir

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} DV(x)f(x, u) = \inf_{w \in f(x, U_C)} DV(x)w \leq \inf_{w \in \text{co } f(x, U_C)} DV(x)w \leq -W(x),$$

also (12.10).

“(12.10) \Rightarrow (12.3)”: Wir beweisen (12.4) für $T = 1$. Sei dazu $K \subset O$ eine beliebige kompakte Menge. Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $\Delta t > 0$ so klein, dass

$$\eta_K(t) \leq \varepsilon t \quad \text{für alle } t \leq \Delta t \quad (12.13)$$

gilt.

Wähle nun $x_0 \in K$.

Wir identifizieren im Folgenden einen Kontrollwert $u \in U_C$ mit der konstanten Kontrollfunktion $t \mapsto u$. Mit dieser Konvention erhalten wir aus (12.11), (12.12) und (12.10) die Ungleichung

$$\inf_{u_0 \in U_C} \left\{ V(\varphi(t, x_0, u_0)) + \int_0^t W(\varphi(s, x_0, u_0)) ds - V(x_0) \right\} \leq \eta_K(t) \leq \varepsilon t. \quad (12.14)$$

für $t \leq \min\{\Delta t, \tau_K(x_0, u_0)\}$. Falls $\tau_K(x_0, u_0) > \Delta t$ ist, können wir für $x_1 = \varphi(\Delta t, x_0, u_0) \in K_D$ die gleiche Abschätzung erhalten, also

$$\inf_{u_1 \in U_C} \left\{ V(\varphi(t, x_1, u_1)) + \int_0^t W(\varphi(s, x_1, u_1)) ds - V(x_1) \right\} \leq \varepsilon t \quad (12.15)$$

für $t \leq \min\{\Delta t, \tau_K(x_1, u_1)\}$. Für die Kontrollfunktion u_2^* definiert durch $u_2^*(t) = u_0$, $t \in [0, \Delta t)$, $u_2^*(t) = u_1$, $t \geq \Delta t$ erhalten wir

$$\varphi(s, x_0, u_0) = \varphi(s, x_0, u_2^*) \quad \text{und} \quad \varphi(s, x_1, u_1) = \varphi(\Delta t + s, x_0, u_2^*), \quad \text{jeweils für } s \in [0, \Delta t].$$

Damit können wir (12.15) schreiben als

$$\inf_{u_1 \in U_C} \left\{ V(\varphi(\Delta t + t, x_0, u_2^*)) + \int_{\Delta t}^{\Delta t+t} W(\varphi(s, x_0, u_2^*)) ds - V(\varphi(\Delta t, x_0, u_0)) \right\} \leq \varepsilon t. \quad (12.16)$$

Addieren von (12.14) und (12.16) (für $i = 2$) und direkte Anwendung von (12.14) (für $i = 1$) liefert dann

$$\inf_{u_0, u_1 \in U_C} \sup_{t \in [0, \min\{2\Delta t, \tau_K(x_0, u_2^*)\}]} \left\{ V(\varphi(t, x_0, u_2^*)) + \int_0^t W(\varphi(s, x_0, u_2^*)) ds - V(x_0) \right\} \leq 2\varepsilon \Delta t.$$

Setzen wir nun $\Delta t = 1/N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass (12.13) gilt, und wenden die obige Konstruktion iterativ für $i = 1, \dots, N - 1$ an so erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf_{u_0, \dots, u_{N-1} \in U_C} \sup_{t \in [0, \min\{N\Delta t, \tau_K(x_0, u_2^*)\}]} \left\{ V(\varphi(t, x, u_N^*)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u_N^*)) ds - V(x) \right\} \\ \leq N\varepsilon \Delta t = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $u_N^* \in \mathcal{U}_C$ (als stückweise konstante Funktion), folgt daraus

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \in [0, \min\{1, \tau_K(x, u)\}]} \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \leq V(x) + \varepsilon$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (12.4) mit $T = 1$ und daher mit Lemma 12.3 auch (12.3). \square

12.2 Kontroll-Ljapunov-Funktion \Leftrightarrow asymptotische Kontrollierbarkeit

Wir formulieren nun die analogen Resultate zu den Sätzen 9.10 und 9.13.

Satz 12.5 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0,0) = 0$. Angenommen, es existiert eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Ljapunov-Funktion V im Sinne von Definition 12.1. Dann ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (bzw. global) asymptotisch kontrollierbar.

Hierbei ist die Vergleichsfunktion $\beta \in \mathcal{KL}$ aus Definition 10.1 gegeben durch

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\mu(t, (1 + \delta)\alpha_2(r))), \quad (12.17)$$

wobei μ die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r \quad (12.18)$$

ist mit g aus Bemerkung 12.2 ist und $\delta > 0$ beliebig ist.

Beweis: Wir fixieren ein beliebiges $\delta > 0$ und wählen ein $C > 0$ so dass die Menge O eine echte Umgebung von $V^{-1}([0, C + \delta C])$ ist und setzen $N = V^{-1}([0, C])$. Sei $x \in N \setminus \{0\}$ (für $x = 0$ folgt die Behauptung mit $u \equiv 0$). Aus der Definition der Ljapunov-Funktion und Bemerkung 12.2 folgt, dass für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $u \in \mathcal{U}_C$ existiert mit

$$V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t g(V(\varphi(s, x, u))) ds \leq V(x) + \delta V(x)$$

für alle $t \in [0, \tau(x, u)]$. Aus dieser Ungleichung folgt $\tau(x, u) = \infty$, da $V(\varphi(t, x, u)) \leq V(x) + \delta V(x) < (1 + \delta)C$ ist und $\varphi(t, x, u)$ daher für alle $t \geq 0$ in $V^{-1}([0, C + \delta]) \subset O$ liegt.

Analog zum Beweis von Satz 9.10 folgt aus dieser Integralungleichung die Ungleichung

$$V(\varphi(t, x, u)) \leq \mu(t, (1 + \varepsilon)V(x)).$$

Damit folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 9.10. \square

Als nächstes betrachten wir eine Umkehrung von Satz 12.5.

Satz 12.6 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0,0) = 0$. Wenn das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (bzw. global) asymptotisch kontrollierbar ist, dann existiert eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Ljapunov-Funktion V im Sinne von Definition 12.1.

Beweis: Die Konstruktion ist ganz ähnlich zum Beweis von Satz 9.13; wie dort beschränken wir uns auf den globalen Fall. Wir wählen W wie \widetilde{W} im Beweis von Satz 9.13 und definieren

$$V(x) := \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \int_0^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds.$$

Die oberen und unteren Schranken α_1 und α_2 leitet man analog zum Beweis von Satz 9.13 her. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \int_0^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds \\
 &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + \int_t^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \\
 &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + \int_0^\infty W(\varphi(s, \varphi(t, x, u), u(t + \cdot))) ds \right\} \\
 &\geq \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\},
 \end{aligned}$$

also (12.3).

Mit Satz 6.2 folgt, dass V für jedes $t \geq 0$ die Gleichung

$$V(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\}$$

erfüllt. Mit Hilfe dieser Gleichung beweisen wir nun die Stetigkeit von V : Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann können wir für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $t > 0$ eine Kontrollfunktion $u_{x,t} \in \mathcal{U}_C$ finden, so dass

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\} \\
 &\geq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{x,t})) - \varepsilon
 \end{aligned}$$

gilt. Hieraus folgt, dass Zeiten $T(t) \in [0, t]$ existieren, so dass $\varphi(T(t), x, u_{x,t})$ für $t \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, da ansonsten das Integral über W für $t \rightarrow \infty$ divergieren würde, was nicht sein kann, da $V(x) + \varepsilon$ eine endliche obere Schranke für dieses Integral ist. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
 V(x) &\geq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{x,t})) - \varepsilon \\
 &= \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + \int_{T(t)}^t W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{x,t})) - \varepsilon \\
 &\geq \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(T(t), x, u_{x,t})) - \varepsilon
 \end{aligned}$$

Für gegebenes $R > 0$ wählen wir nun $\tilde{\varepsilon}$ so klein und $t > 0$ so groß, dass

$$\|\varphi(T(t), x, u_{x,t})\| \leq \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \alpha_2(2\tilde{\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

gilt für alle x mit $\|x\| \leq R$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq R$ und $\|y\| \leq R$ folgt dann

$$\begin{aligned}
 V(x) - V(y) &\leq \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{y,t})) ds + V(\varphi(T(t), x, u_{y,t})) \\
 &\quad - \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds - V(\varphi(T(t), y, u_{y,t})) + \varepsilon \\
 &\leq \int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{y,t})) - W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds + V(\varphi(T(t), x, u_{y,t})) + \varepsilon
 \end{aligned}$$

Falls nun $\|x - y\|$ klein ist, folgt aus Gronwalls Lemma, dass auch

$$\|\varphi(\tau, x, u_{y,t}) - \varphi(\tau, y, u_{y,t})\|$$

für $\tau \in [0, t]$ klein ist. Falls also $\|x - y\|$ hinreichend klein ist, erhalten wir wegen $T(t) \leq t$

$$\int_0^{T(t)} W(\varphi(s, x, u_{y,t})) - W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds \leq \varepsilon$$

und

$$\|\varphi(T(t), x, u_{y,t})\| \leq \|\varphi(T(t), y, u_{y,t})\| + \tilde{\varepsilon} \leq 2\tilde{\varepsilon}.$$

Aus dieser zweiten Ungleichung folgt

$$V(\varphi(T(t), x, u_{y,t})) \leq \alpha_2(\|\varphi(T(t), x, u_{y,t})\|) \leq \alpha_2(2\tilde{\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

Also gilt für x hinreichend nahe an y die Ungleichung

$$V(x) - V(y) \leq 3\varepsilon,$$

womit aus Symmetriegründen auch die Ungleichung

$$|V(x) - V(y)| \leq 3\varepsilon$$

folgt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt also die Stetigkeit von V . \square

Beachte, dass wir hier — im Gegensatz zum Beweis von Satz 9.13 — keine Lipschitz-Stetigkeit erhalten. Es gibt allerdings (sehr komplizierte) Konstruktionen, mit denen man die Existenz Lipschitz-stetiger Kontroll-Ljapunov-Funktionen beweisen kann. Allerdings ist selbst für Lipschitz-stetige V der Satz 9.16 nicht anwendbar, da das “inf” vor der Ableitung nicht zu den Voraussetzungen dieses Satzes passt.

Beispiel 12.7 Wir betrachten wiederum Artsteins Kreise (vgl. (10.3)), gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left(-x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \right) u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(-2x_1(t)x_2(t) \right) u(t) \end{aligned}$$

Betrachte die Funktion

$$V(x) = \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} - |x_1|.$$

Wegen $\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}/2 \geq |x_1|$ und $\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}/2 \geq \sqrt{3}|x_1|/2$ erhält man die untere Schranke $\alpha_1(r) = \sqrt{3}r/2$; als obere Schranke kann man $\alpha_2(r) = 2r$ wählen.

Die Funktion ist differenzierbar für $x_1 \neq 0$. Für $x_1 > 0$ errechnet man

$$DV(x)f(x, -1) = -W(x)$$

und für $x_1 < 0$ erhalten wir

$$DV(x)f(x, 1) = -W(x) \tag{12.19}$$

mit

$$W(x) = \frac{4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}}{\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}}.$$

Diese Funktion ist positiv für $x \neq 0$: Für $x_1^2 - x_2^2 < 0$ folgt dies, weil alle Summanden im Zähler positiv sind. Für $x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ (also $|x_1| \geq |x_2|$) erhalten wir für den Zähler

$$\begin{aligned} & 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} \\ & \geq 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)(\sqrt{4x_1^2} + \sqrt{3x_2^2}) \\ & = 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)(2|x_1| + \sqrt{3}|x_2|) \\ & = 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - 2|x_1|^3 - \underbrace{\sqrt{3}x_1^2|x_2|}_{\leq \sqrt{3}|x_1|^3} + 2x_2^2|x_1| + \sqrt{3}|x_2|^3 \\ & \geq (2 - \sqrt{3})|x_1|^3 + 4|x_1|x_2^2 + \sqrt{3}|x_2|^3 > 0 \end{aligned}$$

für $x \neq 0$. Wenn wir nun zu einem Anfangswert $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 \neq 0$ die Kontrollfunktion $u_x \equiv -1$ falls $x_1 > 0$ bzw. $u_x \equiv 1$ falls $x_1 < 0$ wählen, so wissen wir aus der expliziten Darstellung der Trajektorien in Abschnitt 10.3, dass die x_1 -Komponente der Lösungen für alle Zeiten positiv bleibt. Die Differentialungleichung (12.19) ist also für alle $x = \varphi(t, x, u_x)$ gültig und wir können sie integrieren, was die Ungleichung

$$V(\varphi(t, x, u_x)) + \int_0^t W(\varphi(\tau, x, u_x))d\tau \leq V(x)$$

für alle $t \geq 0$ liefert. Da alle Funktionen in dieser Ungleichung stetig in x sind (wenn u_x festgehalten wird) gilt die Ungleichung tatsächlich auch für $x_1 = 0$, wobei wir wahlweise $u_x \equiv -1$ oder $u_x \equiv 1$ verwenden können. Folglich erhalten wir (12.3), womit wir nachgewiesen haben, dass V eine Kontroll-Ljapunov-Funktion ist. \square

Bemerkung 12.8 Beachte, dass der Beweis explizit die Kenntnis der Lösungen des Systems verwendet, da wir ausgenutzt haben, dass die Lösungen zu den verwendeten Kontrollen die Nichtdifferenzierbarkeitsstellen $x_1 = 0$ nicht überqueren. Auf dem 5. Übungsblatt wird eine Methode hergeleitet, mit der die Bedingung (12.3) auch für $x_1 = 0$ aus den Richtungsableitungen von V in Richtung f berechnet werden kann, obwohl die Funktion dort nicht differenzierbar ist. \square

Diese Kontroll-Ljapunov-Funktion V wurde von A. Bacciotti und F. Ceragioli [2] als Beispiel angegeben. Beachte, dass V in diesem Beispiel nicht differenzierbar ist. Wir werden im nächsten Kapitel beweisen, dass für dieses Beispiel tatsächlich überhaupt keine differenzierbare Kontroll-Ljapunov-Funktion existieren kann.

Zunächst aber betrachten wir hier ein “umgekehrtes” Resultat, nämlich eine hinreichende Bedingung, unter der eine differenzierbare Kontroll-Ljapunov-Funktion existiert.

Satz 12.9 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0, u^*) = 0$ für ein $u^* \in U$. Wenn das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (bzw. global) Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar ist, dann existiert eine lokale (bzw. globale) Kontroll-Ljapunov-Funktion $V \in C^\infty(O, \mathbb{R})$ im Sinne von Definition 12.1.

Beweis: Nach Satz 9.13 existiert eine stetig differenzierbare Ljapunov-Funktion V für das Feedback-geregelte Vektorfeld $g(x) = f(x, F(x))$. Diese Funktion erfüllt (12.1), (12.2) und (12.10), weswegen sie nach Lemma 12.4 eine Kontroll-Ljapunov-Funktion ist. \square

Kapitel 13

Sontags Universelle Formel

Dieses Kapitel gehört zum Gebiet der “konstruktiven nichtlinearen Regelung”, das sich mit der Herleitung expliziter Formeln für nichtlineare Feedback-Regler befasst. Typisch an den Methoden der konstruktiven nichtlinearen Regelung ist, dass sie nicht für allgemeine nichtlineare Kontrollsysteme der Form (8.1) funktionieren. Statt dessen benötigt man geeignete Strukturannahmen an $f(x, u)$ und oft auch weiteres Wissen über das System. In der hier beispielhaft betrachteten Methode besteht das weitere Wissen in der Kenntnis einer stetig differenzierbaren Kontroll-Ljapunov-Funktion.

Wir betrachten in diesem Kapitel *kontroll-affine* Kontrollsysteme. Diese sind gegeben durch

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) := f_0(x(t)) + \sum_{k=1}^m f_k(x)u_k(t) \quad (13.1)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in U = \mathbb{R}^m$, wobei die f_i lokal Lipschitz stetige Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n sind.

Zudem betrachten wir in diesem Abschnitt stetige Feedbacks $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die die folgende Annahme erfüllen.

$$F \text{ ist Lipschitz-stetig auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ und erfüllt } F(0) = 0 \quad (13.2)$$

Die Bedingung $F(0) = 0$ kann hierbei o.B.d.A. angenommen werden, ansonsten transformieren wir f und F mittels $\tilde{f}(x, u) = f(x, u + F(0))$, $\tilde{F}(x) = F(x) - F(0)$.

Beachte, dass $f(x, F(x))$ für ein solches Feedback nicht unbedingt Lipschitz-stetig in $x = 0$ sein muss. Wir schwächen unsere bisher gemachten Bedingungen also etwas ab. Insbesondere müssen die Lösungen von (13.1) mit diesem Feedback für Anfangswert $x = 0$ nicht eindeutig sein. Wenn das Feedback F allerdings asymptotisch stabilisierend ist, erhalten wir zumindest Eindeutigkeit in Vorwärtszeit, da aus der Ungleichung

$$\varphi(t, 0, F) \leq \beta(\|0\|, t) = 0$$

für $t \geq 0$ zwingend $\varphi(t, 0, F) \equiv 0$ folgt und es daher in Vorwärtszeit nur die Nulllösung zum Anfangswert $x = 0$ geben kann.

Wenn wir nun ein ein Lipschitz–stetig stabilisierendes Feedback F für (13.1) finden können, das zusätzlich (13.2) erfüllt, so können wir Satz 12.9 anwenden und erhalten eine C^∞ Kontroll–Ljapunov–Funktion V .

Wegen $F(0) = 0$ und der Stetigkeit von F erhalten wir aber noch etwas mehr: Wir können eine Funktion $\gamma \in \mathcal{K}$ finden, so dass die Ungleichung

$$F(x) \leq \gamma(\|x\|)$$

gilt, z.B. indem wir $\gamma(r) := \max_{\|x\| \leq r} \|F(x)\| + r$ setzen. Für jede solche Funktion $\gamma \in \mathcal{K}$ gilt dann die Ungleichung

$$\inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq DV(x)f(x, F(x)) \leq -W(x).$$

Die Kontrollwerte, für die man die Negativität der Richtungsableitung erhält, können also um so kleiner (in der Norm) gewählt werden, je näher x an $x^* = 0$ liegt.

Diese Eigenschaft: es gibt ein $\gamma \in \mathcal{K}$ mit

$$\inf_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (13.3)$$

wird im Folgenden wichtig sein. Das Ziel in diesem Abschnitt ist es nämlich, unter Annahme (13.3) eine Umkehrung von Satz 12.9 zu beweisen, dass nämlich aus der Existenz einer glatten Kontroll–Ljapunov–Funktion mit mit den dortigen Eigenschaften die Existenz eines stabilisierenden Feedbacks folgt — ein Resultat, das auf Z. Artstein zurück geht. Wir werden aber noch etwas mehr als einen abstrakten Existenzbeweis führen, denn man kann sogar eine explizite Formel für F angeben. Diese Formel ist in der Literatur als *universelle Formel* oder — nach ihrem Erfinder E.D. Sontag — *Sontag–Formel* bekannt. Das daraus resultierende Feedback wird i.A. nicht mehr Lipschitz–stetig stabilisierend sein (in diesem Sinne erhalten wir also nicht die exakte Umkehrung von Satz 12.9), erfüllt aber die nur leicht schwächere Bedingung (13.2), was für praktische Zwecke in der Regel ausreicht.

Um die Rechnungen zu vereinfachen beschränken wir uns im folgenden Satz auf den Fall $m = 1$ in (13.1), d.h.

$$f(x, u) = f_0(x) + f_1(x)u$$

mit $u \in \mathbb{R}$ und geben die allgemeine Lösung in Bemerkung 13.2 nur an.

Satz 13.1 Betrachte ein kontroll–affines Kontrollsystem (13.1) mit $m = 1$. Sei V eine stetig differenzierbare globale Kontroll–Ljapunov–Funktion, die Bedingung (13.3) erfüllt und deren Ableitung für $x \neq 0$ Lipschitz stetig ist. Dann ist F gegeben durch $F(0) = 0$ und

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4}}{DV(x)f_1(x)} & \text{falls } DV(x)f_1(x) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } DV(x)f_1(x) = 0 \end{cases}$$

für $x \neq 0$ ein stetiges Feedback, das (13.2) erfüllt und für das die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$$

global asymptotisch stabil ist.

Beweis: Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$\psi(a, b) := \begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}, & b \neq 0 \\ 0, & b = 0 \end{cases}$$

und die Menge

$$S := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > 0 \text{ oder } a < 0\}.$$

Wir zeigen, dass $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung ist. Dies folgt aus dem impliziten Funktionensatz, da ψ die Gleichung $\phi(a, b, \psi(a, b)) = 0$ erfüllt für

$$\phi(a, b, p) = bp^2 - 2ap - b.$$

Die Funktion ϕ ist auf S differenzierbar und die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}(a, b, p) = 2bp - 2a$$

hat in einer (hinreichend kleinen) offenen Umgebung der Menge $(a, b, \psi(a, b))$ vollen Rang: falls $b = 0$ ist, gilt $2bp - 2a = -2a > 0$ und falls $b \neq 0$, gilt

$$2b\psi(a, b) - 2a = 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a = \sqrt{a^2 + b^2} > 0.$$

Daher ist der implizite Funktionensatz anwendbar und ψ ist differenzierbar.

Wir zeigen nun zunächst die Lipschitz-Stetigkeit von F auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir können F mit Hilfe von ψ als

$$F(x) = -DV(x)f_1(x)\psi(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2)$$

schreiben. Falls $x \neq 0$ und $DV(x)f_1(x)^2 = 0$ ist, muss — wegen $\inf_u DV(x)f(x, u) \leq -W(x) < 0$ — die Ungleichung $DV(x)f(x, u) < 0$ gelten. Also gilt

$$(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2) \in S$$

für $x \neq 0$, weswegen $\psi(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2)$ und damit auch F auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Komposition Lipschitz-stetiger Funktionen ist und damit selbst Lipschitz-stetig ist.

Wir schreiben nun kurz $g(x) = f(x, F(x))$. Wegen

$$DV(x)g(x) = DV(x)f_0(x) + DV(x)f_1(x)F(x) = -\sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4}$$

für $x \neq 0$ (beachte, dass diese Gleichung auch im Fall $DV(x)f_1(x) = 0$ gilt) ist V eine Ljapunov-Funktion für g mit

$$W(x) = \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4} > 0 \quad \text{für } x \neq 0,$$

woraus die globale asymptotische Stabilität mit Satz 9.10 folgt¹.

¹Tatsächlich haben wir in Satz 9.10 Lipschitz-Stetigkeit des Vektorfeldes für ganz \mathbb{R}^n vorausgesetzt. Betrachtet man den Beweis genauer, so sieht man aber, dass Lipschitz-Stetigkeit in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, die hier aus der bereits bewiesenen Lipschitz-Stetigkeit von F auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und der Struktur (13.1) folgt, für den Beweis ausreicht.

Es bleibt die Stetigkeit von F in $x = 0$ zu zeigen, wegen $F(0) = 0$ ist also zu zeigen, dass $F(x_n) \rightarrow 0$ gilt für jede Folge $x_n \rightarrow 0$. Da V in 0 ein lokales Minimum besitzt folgt $DV(0) = 0$, also $DV(x_n) \rightarrow 0$ für $x_n \rightarrow 0$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: Falls $DV(x)f_0(x) \geq 0$ ist, betrachte die Ungleichung

$$DV(x)f_0(x) + \inf_{\substack{u \in U \\ |u| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f_1(x)u = \inf_{\substack{u \in U \\ |u| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) \leq 0.$$

Das Infimum im ersten Summanden wird hier entweder für $u = \gamma(x)$ oder $u = -\gamma(x)$ angenommen und ist in jedem Fall gleich $-\gamma(x)|DV(x)f_1(x)|$. Also erhalten wir unter Ausnutzung von $DV(x)f_0(x) \geq 0$ die Ungleichung

$$|DV(x)f_0(x)| - \gamma(x)|DV(x)f_1(x)| = DV(x)f_0(x) - \gamma(x)|DV(x)f_1(x)| \leq 0.$$

Daraus folgt

$$|DV(x)f_0(x)| \leq \gamma(x)|DV(x)f_1(x)|$$

und wegen

$$DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4} \leq 2|DV(x)f_0(x)| + \left(DV(x)f_1(x)\right)^2$$

ergibt sich

$$|F(x)| \leq 2 \frac{|DV(x)f_0(x_n)|}{|DV(x)f_1(x)|} + \frac{\left(DV(x)f_1(x)\right)^2}{|DV(x)f_1(x)|} \leq 2\gamma(\|x\|) + |DV(x)f_1(x)|.$$

2. Fall: Falls $DV(x)f_0(x) < 0$ ist, gilt

$$DV(x)f_0(x) + \sqrt{\left(DV(x)f_0(x)\right)^2 + \left(DV(x)f_1(x)\right)^4} \leq \left(DV(x)f_1(x)\right)^2,$$

also

$$|F(x)| \leq \frac{\left(DV(x)f_1(x)\right)^2}{|DV(x)f_1(x)|} = |DV(x)f_1(x)| \leq |DV(x)f_1(x)|,$$

d.h. wir erhalten eine kleinere Schranke als in Fall 1.

Für $x_n \rightarrow 0$ folgt damit

$$|F(x_n)| \leq \underbrace{2\gamma(\|x_n\|)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|DV(x_n)}_{\rightarrow 0} \underbrace{f_1(x_n)}_{\text{beschränkt}} \rightarrow 0,$$

wobei $DV(x_n) \rightarrow 0$ aus der Stetigkeit von DV und der Tatsache folgt, dass $x = 0$ ein lokales Minimum von V ist, woraus $DV(0) = 0$ folgt. Dies zeigt die Stetigkeit von F und beendet damit den Beweis. \square

Bemerkung 13.2 Im allgemeinen Fall (d.h. $m \geq 1$) erhält man für die i -te Komponente des Feedbacks $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Formel

$$F_i(x) = -DV(x)f_i(x) \psi \left(DV(x)f_0(x), \sum_{k=1}^m \left(DV(x)f_k(x) \right)^2 \right)$$

für $x \neq 0$ und $F(0) = 0$, mit ψ aus dem Beweis von Satz 13.1. \square

Wir illustrieren das Resultat an zwei Beispielen.

Beispiel 13.3 Betrachte die mathematische Pendelgleichung, bei der der Nullpunkt dem aufgerichteten Pendel entspricht

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + \sin x_1(t)\end{aligned}$$

vgl. (9.3).

Wir setzen $k = 1$ und addieren nun eine Kontrollvariable in der zweiten Komponente, also

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + \sin x_1(t) + u\end{aligned}$$

was physikalisch einer Kraft entspricht, mit der die Winkelgeschwindigkeit beeinflusst werden kann, z.B. durch einen Motor an der Drehachse.

Betrachte die Funktion

$$V(x) = \frac{1}{2} \left((x_1 + x_2)^2 + x_1^2 \right),$$

die wegen

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + x_2^2 + \underbrace{2x_1x_2}_{\geq -3x_1^2/2 - 2x_2^2/3} + x_1^2 \right) \geq \frac{1}{6} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{6} \|x\|^2$$

durch $\alpha_1(r) = r^2/6$ nach unten und wegen

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{(x_1 + x_2)^2}_{\leq 2x_1^2 + 2x_2^2} + x_1^2 \right) \leq 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 3\|x\|^2$$

durch $\alpha_2(r) = 3r^2$ nach oben abgeschätzt werden kann. Für diese Funktion gilt

$$DV(x)f((x), u) = (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_2 + \sin(x_1) + u).$$

Wir zeigen, dass dies eine Kontroll-Ljapunov-Funktion für das gegebene System ist, indem wir geeignete u wählen, so dass die Ableitungsbedingung erfüllt ist:

Hierzu setzen wir $u = -x_1 - x_2 - \sin x_1$, woraus $|u| \leq 3\|x\|$ folgt; wir können also $\gamma(r) = 3r$ wählen. Für die Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned}DV(x)f(x, u) &= (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_2 + \sin(x_1) - x_1 - x_2 - \sin x_1) \\ &= (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_1 - 2x_2) \\ &= 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 \\ &= -x_1^2 - x_2^2 - \underbrace{x_1x_2}_{\geq -x_1^2/2 - x_2^2/2} \leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = -\|x\|^2/2 < 0.\end{aligned}$$

Damit ist V eine Kontroll-Ljapunov-Funktion für das System, die (13.3) erfüllt.

In der Form 13.1 geschrieben gilt für das System

$$f_0(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 + \sin x_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also

$$DV(x)f_0(x) = (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_2 + \sin x_1) = x_1x_2 + (x_1 + x_2)\sin x_1$$

und

$$DV(x)f_1(x) = x_1 + x_2.$$

Die universelle Formel liefert daher

$$F(x) = -\frac{x_1x_2 + (x_1 + x_2)\sin x_1 + \sqrt{(x_1x_2 + (x_1 + x_2)\sin x_1)^2 + (x_1 + x_2)^4}}{x_1 + x_2}$$

Abbildung (13.1) zeigt, dass dieses Feedback das Pendel stabilisiert. Die Abbildung zeigt die Komponenten der Trajektorie $\varphi(t, x, F)$ für $x = (2, 2)^T$.

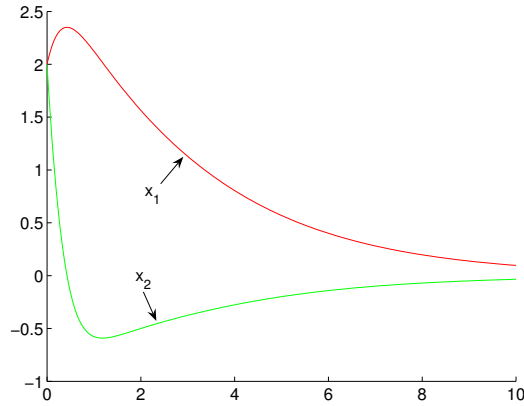


Abbildung 13.1: Lösungstrajektorie des nichtlinearen Pendels mit stabilisierendem Feedback

□

Beispiel 13.4 Betrachte wiederum Artsteins Kreise, gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left(-x_1(t)^2 + x_2(t)^2 \right) u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(-2x_1(t)x_2(t) \right) u(t) \end{aligned}$$

In Abschnitt 10.3 haben wir bewiesen, dass das System asymptotisch kontrollierbar ist aber nicht stabilisierbar mit stetigem Feedback. In Beispiel (12.7) haben wir gezeigt, dass eine nichtglatte Kontroll-Ljapunov-Funktion existiert.

Mit Satz 13.1 können wir nun zeigen, dass keine stetig differenzierbare Kontroll–Ljapunov–Funktion mit Lipschitz stetiger Ableitung existieren kann. Nehmen wir dazu an, dass V eine solche Kontroll–Ljapunov–Funktion im Sinne der Definition von Abschnitt 12 ist, d.h. es gilt die Ungleichung (12.10)

$$\inf_{u \in U_C} DV(x)f(x, u) \leq -W(x)$$

für ein $C > 0$ in einer Umgebung der 0. Setzen wir $\gamma(r) = r$, so erhalten wir aus der Struktur der Gleichung

$$\inf_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ |u| \leq \gamma(\|x\|)}} DV(x)f(x, u) \leq \inf_{u \in U_C} DV(x)f(x, u)\gamma(\|x\|)/C \leq -W(x)\gamma(\|x\|)/C =: -\widetilde{W}(x).$$

Da für die neue Funktion \widetilde{W} offenbar $\widetilde{W}(x) > 0$ für $x \neq 0$ gilt, erfüllt V die Bedingung (13.3). Satz 13.1 liefert also die Existenz eines Lipschitz–stetigen Feedbacks, was nach Abschnitt 10.3 nicht existiert. Deswegen kann auch V nicht existieren.

(Tatsächlich kann man sogar etwas mehr zeigen: Die Lipschitz Annahme an DV im Beweis von Satz 13.1 brauchen wir nämlich nur, um die Lipschitz–Stetigkeit von F sicher zu stellen; falls DV nur stetig ist erhalten wir immer noch ein stetiges stabilisierendes Feedback F . Da in Abschnitt 10.3 gezeigt wurde, dass nicht einmal ein stetiges stabilisierendes F existieren kann, existiert folglich auch keine stetig differenzierbare Kontroll–Lyapunov–Funktion. Um dies formal sauber zu beweisen, muss man allerdings die mögliche Nichteindeutigkeit der Lösungen für nicht Lipschitz–stetiges F berücksichtigen, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen.) \square

Kapitel 14

Stabilisierung mit Abtastfeedback

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass stetige stabilisierende Feedbacks nicht immer existieren. Wenn man das Feedback–Stabilisierungsproblem trotzdem lösen möchte, lässt es sich folglich nicht vermeiden, unstetige Feedbacks zu verwenden. Dies werden wir in diesem Abschnitt betrachten.

In diesem Kapitel wollen wir zunächst ein Lösungskonzept für Feedback–geregelter Kontrollsysteme einführen, das auch für unstetige Feedbacks zu mathematisch sinnvollen Lösungen führt.

14.1 Abtast–Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir ein Lösungskonzept für Feedback–geregelter Kontrollsysteme einführen, das auch für unstetige Feedbacks zu mathematisch sinnvollen Lösungen führt.

Definition 14.1 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1). Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ eine beliebige Abbildung, die die Abschätzung $\|F(x)\| \leq \delta(x)$ für eine stetige Funktion $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt.

Zu einer gegebenen *Abtastperiode* (auch *Abtastzeit* oder *Sampling–Periode*) $T > 0$ definieren wir die *Abtastlösung* (auch *Sampling–Lösung*) des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$, $x(0) = x_0$ für $t \geq 0$ induktiv mittels

$$\varphi_T(t, x_0, F) = \varphi(t - iT, x_i, F(x_i)) \text{ für alle } t \in [iT, (i+1)T]$$

wobei $\varphi(\cdot, x_i, F(x_i))$ die Lösung von (8.1) mit Anfangswert $x_i := \varphi_T(t_i, x_0, F)$ und konstanter Kontrollfunktion $u(t) \equiv F(x_i)$ bezeichnet. \square

Beachte, dass — unter unseren Standard–Voraussetzungen an (8.1) und wegen der Beschränktheits–Annahme an F — die Lösung φ_T für jede Abtastperiode $T > 0$ eindeutig existiert, unabhängig von den sonstigen Regularitätseigenschaften des Feedbacks F .

Neben diesem mathematischen Vorteil hat diese Art der Definition aber auch eine sehr praxisnahe Interpretation: In der modernen Regelungstechnik werden Feedbacks zur Regelung

nicht mehr nur als analoge elektronische Schaltungen sondern immer öfter mittels digitaler Computer implementiert, da diese zum einen inzwischen billig und überall verfügbar und zum anderen flexibel programmierbar sind. Aufgrund der Arbeitsweise digitaler Computer ist es allerdings nicht möglich, das Feedback F für jeden Punkt $x(t)$ auf der Trajektorie auszuwerten; statt dessen muss man sich von vornherein auf eine endliche Anzahl von Auswertungen an Punkten $x(t_i)$ beschränken, was exakt der obigen Definition entspricht. Aus praktischen Gründen werden also auch stetige Feedbacks heutzutage oft mittels Abtastung implementiert. Wir werden auf die digitale Regelung in späteren Kapiteln noch genauer eingehen.

14.2 Stabilität und Abtastung

Wenn man Feedbacks entwerfen bzw. berechnen will, so dass die Abtastlösungen (in geeignetem Sinne) asymptotisch stabil werden, so steht man vor der prinzipiellen Entscheidung, ob man das Feedback F unabhängig von der Abtastfolge \mathbf{t} oder in Abhängigkeit davon definieren soll. Flexibler ist es sicherlich, das Feedback F unabhängig von \mathbf{t} zu entwerfen, so dass es für eine große Menge von Abtastfolgen \mathbf{t} funktioniert. Wir werden hier trotzdem den zweiten Ansatz verfolgen, da dies die mathematische Behandlung etwas vereinfacht.

Wir verwenden die folgende Definition; wiederum zur Vereinfachung beschränken wir uns auf den globalen Fall, der hier allerdings *semiglobal* heißt.

Definition 14.2 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0,0) = 0$. Wir sagen, dass eine Familie von Feedbacks $F_T : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ für $T \in (0, T^*]$ das Gleichgewicht $x^* = 0$ des Abtastsystems *semiglobal praktisch asymptotisch stabilisiert*, falls eine Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ existiert, so dass für je zwei Konstanten $R > \varepsilon > 0$ ein $T_0 > 0$ existiert, so dass für alle $T \in (0, T_0]$ die Abtastlösungen $\varphi_T(t, x, F_T)$ die Abschätzung

$$\|\varphi_T(t, x, F_T)\| \leq \max\{\beta(\|x\|, t), \varepsilon\}$$

für alle $t \geq 0$ und alle Anfangswerte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq R$ erfüllt. \square

Der Begriff “semiglobal” bezieht sich hierbei auf die Konstante R , der Begriff “praktisch” auf die Konstante ε . Je weiter entfernt der Anfangswert von $x^* = 0$ ist und je näher man dem Gleichgewicht $x^* = 0$ kommen will, desto kleiner muss man die Abtastzeit T wählen, d.h. desto öfter muss man F auswerten. Im Allgemeinen ist dies das Beste, was man mit Abtastfeedback erzielen kann, da die nicht-kontinuierliche Auswertung von F zu Einbußen in der Kontroll-Genauigkeit führt, die sich nahe dem Gleichgewicht $x^* = 0$ und weit entfernt davon besonders auswirkt: Nahe dem Gleichgewicht deswegen, da man hier sehr präzise steuern muss, weit entfernt deswegen, da die Dynamik des Kontrollsystems hier sehr schnell sein kann, was ebenfalls häufiges Messen und Auswerten des Feedbacks erfordert.

Tatsächlich ist es manchmal trotzdem möglich, auch mit konstantem T “echte” asymptotische Stabilität des Abtastsystems zu erhalten, wie im folgenden Beispiel.

Beispiel 14.3 Betrachte das System (10.3)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \left(-x_1(t)^2 + x_2(t)^2\right)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(-2x_1(t)x_2(t)\right)u(t).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$F_T(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0 \\ -1, & x_1 < 0 \end{cases}$$

Mit dieser Wahl wird das System global asymptotisch stabil für jedes $T > 0$, d.h. wir erreichen sogar echte asymptotische Stabilität für die Abtastlösungen; darüberhinaus ist F_T hier unabhängig von T . Der Grund hierfür ist, dass diese Wahl von F tatsächlich zu einer konstanten Steuerstrategie $F(x(t))$ führt, da die Sampling-Lösungen des Systems die "Schaltlinie" $x_1 = 0$ niemals kreuzen. Daher ist die Länge T der Sampling-Intervalle für dieses System unerheblich. \square

Für andere Systeme kann man natürlich nicht erwarten, dass das Feedback F konstant entlang der Lösungen ist. In diesem Fall ist die semiglobale praktische Stabilität aus Definition 14.2 i.A. das Beste, was man mit Abtastung erreichen kann.

14.3 Abtastung und Ljapunov-Funktionen

Ebenso wie bei stetigem Feedback können auch für unstetiges Feedback Ljapunov-Funktionen als Hilfsmittel zur Konstruktion stabilisierender Feedbacks verwendet werden. Die folgende Definition liefert das zu Definition 14.2 passende Konzept.

Definition 14.4 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0,0) = 0$. Eine Familie von stetigen Funktionen $V_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für $T \in (0, T^*]$ heißt *semiglobale praktische Familie von (Abtast-) Ljapunov-Funktionen*, falls Funktionen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, ein $C > 0$ und eine stetige Funktion $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass die Ungleichungen

$$W(x) > 0, \tag{14.1}$$

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V_T(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{14.2}$$

für alle $T \in (0, T^*]$ und alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erfüllt sind und für alle Konstanten $C_2 > C_1 > 0$ ein $T_0 > 0$ existiert, so dass die Ungleichung

$$\inf_{u \in U_C} V_T(\varphi(T, x, u)) \leq \max\{V_T(x) - TW(x), C_1\} \tag{14.3}$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $V_T(x) \leq C_2$ und alle $T \in (0, T_0]$. \square

Beachte, dass das u in (14.3) ein konstanter Kontrollwert aus U_C und keine messbare Kontrollfunktion aus \mathcal{U}_C ist. Da die Lösung $\varphi(T, x, u)$ stetig von $u \in U_C$ abhängt, ist das Infimum in (14.3) tatsächlich ein Minimum.

Der folgende Satz zeigt, dass wir aus den Ljapunov–Funktionen V_T stabilisierende Feedbacks im Sinne von Definition 14.2 erhalten können. Hierzu verwenden wir für eine reelwertige Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, deren Minimum u^* über U_c existiert, für die also

$$\min_{u \in U_c} h(u) = h(u^*)$$

gilt, die Schreibweise

$$\operatorname{argmin}_{u \in U_c} h(u) := u^*.$$

Beachte, dass das argmin i.A. nicht eindeutig ist; im Falle der Nichteindeutigkeit wählen wir einfach einen der möglichen minimierenden Kontrollwerte.

Satz 14.5 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0,0) = 0$. Sei V_T für $T \in (0, T^*]$ eine semiglobale praktische Familie von Ljapunov–Funktionen. Betrachte eine Familie von Feedbacks F_T , für die für alle $C_1, C_2 > 0$ ein $T_0 \in (0, T^*]$ existiert mit

$$V_T(\varphi(T, x, F_T(x))) \leq \max\{V_T(x) - TW(x), C_1\} \quad (14.4)$$

für alle $T \in (0, T_0]$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $V_T(x) \leq C_2$. Dann ist F_T eine Familie von semiglobal praktisch asymptotisch stabilisierenden Feedbacks im Sinne von Definition 14.2.

Insbesondere erfüllt die Familie von Feedbacks F_T definiert durch

$$F_T(x) := \operatorname{argmin}_{u \in U_c} V_T(\varphi(T, x, u)) \quad (14.5)$$

diese Bedingung.

Beweis: Beachte zunächst, dass F_T aus (14.5) für T_0 aus Definition 14.4 offenbar (14.4) erfüllt.

Analog zum Beweis von Lemma 9.8 können wir o.B.d.A. annehmen, dass $W(x) \geq g(V_T(x))$ für ein geeignetes global Lipschitz–stetiges $g : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0$ mit $g(r) > 0$ für $r > 0$ ist. Tatsächlich kann g unabhängig von T gewählt werden, da alle V_T durch die gleichen \mathcal{K}_∞ –Funktionen α_1 und α_2 beschränkt sind. Indem wir T^* falls nötig verkleinern, können wir o.B.d.A. $T^* < 1/L$ annehmen, wobei L die Lipschitz–Konstante von g ist.

Seien nun $R > \varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $C_2 = \alpha_2(R)$ und $C_1 = \alpha_1(\varepsilon/2)$, betrachten das zugehörige T_1 aus der Annahme und wählen ein beliebiges $T \in (0, T_0]$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq R$ die Ungleichung $V_T(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \leq \alpha_2(R) = C_2$. Aus (14.4) folgt damit die Ungleichung

$$V_T(\varphi(T, x, F_T(x))) \leq \max\{V_T(x) - Tg(V_T(x)), C_1\}.$$

Betrachte nun die Funktionen $\mu(r, t)$, die induktiv definiert ist durch $\mu(r, 0) = r$ und

$$\mu(r, iT + \tau) = \mu(r, iT) - \tau g(\mu(r, iT)) \quad \text{für alle } \tau \in (0, T].$$

Die so definierte Funktion μ ist offenbar streng monoton fallend in t . Zudem konvergiert sie gegen 0:

Nehmen wir an, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(r, t) =: \gamma > 0$ ist. Wir wählen ein $\varepsilon_0 > 0$. Dann folgt für jedes $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ und alle $i > 0$ mit $\mu(r, iT) \leq \gamma + \varepsilon$ die Ungleichung

$$\mu(r, T + iT) = \mu(r, iT) - T \underbrace{g(\mu(r, iT))}_{=: \alpha_0 > 0} \leq \gamma + \varepsilon - T\alpha_0.$$

Für $\varepsilon < T\alpha_0$ folgt also $\mu(r, iT + T) < \gamma$, was zu einem Widerspruch führt. Also gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(r, t) = 0$. Aus der Lipschitz-Stetigkeit von g folgt zudem, dass μ in r streng monoton wachsend ist, weswegen $\mu \in \mathcal{KL}$ ist.

Beachte, dass das hier konstruierte μ zwar von T abhängt, aber für alle $T \in (0, T^*]$ durch eine von T unabhängige \mathcal{KL} Funktion beschränkt werden kann. Dies folgt aus der stetigen Abhängigkeit der μ von T und der Tatsache, dass μ für $T \rightarrow 0$ gegen die Lösung der Differentialgleichung $\dot{\mu} = -g(\mu)$ konvergiert (beachte, dass μ nichts anderes als die Euler-Diskretisierung dieser DGL ist), deren Lösung wieder eine \mathcal{KL} -Funktion ist.

Aus der Definition von μ folgt mittels Induktion über i die Ungleichung

$$V_T(\varphi_T(iT, x, F_T)) \leq \max\{\mu(V_T(x), iT), C_1\}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $V(x) \leq C_2$. Daraus folgt mit $\|x\| \leq R$ ($\Rightarrow V(x) \leq \alpha_2(R) = C_2$) für $\beta(r, t) := \alpha_1^{-1}(\mu(\alpha_2(r), t)) \in \mathcal{KL}$ die Ungleichung

$$\|\varphi_t(iT, x, F_T)\| \leq \max\{\alpha_1^{-1}(\mu(\alpha_2(\|x\|), iT)), \alpha_1^{-1}(C_1)\} = \max\{\beta(\|x\|, t), \varepsilon/2\}$$

für $i \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von $\|\varphi_t(t, x, F_T)\|$ gilt diese Abschätzung für hinreichend kleines $T > 0$ auch für beliebige t in den Zwischenintervallen $[iT, (i+1)T]$, wenn wir $\varepsilon/2$ durch ε ersetzen und β durch $C\beta$ für eine geeignete Konstante $C > 1$ ersetzen. Damit folgt die behauptete semiglobale praktische Stabilität. \square

Korollar 14.6 Es sei F ein Lipschitz-stetig stabilisierendes Feedback und V eine C^2 -Lyapunov Funktion für das geregelte System $\dot{x} = f(x, F(x))$. Dann ist $F_T = F$ eine Familie von (für alle T identischen) semiglobal praktisch asymptotisch stabilisierenden Feedbacks im Sinne von Definition 14.2.

Beweis: Es seien $C_1, C_2 > 0$ gegeben. Betrachte die kompakte Menge $K = V^{-1}([0, C_2])$. Aus der Lyapunov-Ungleichung $DV(x)f(x, F(x)) \leq -W(x)$ folgt mit Taylor-Entwicklung von $t \mapsto V(\varphi(t, x, F(x)))$ in $t = 0$ die Ungleichung

$$V(\varphi(T, x, F(x))) \leq V(x) - TW(x) + CT^2 = V(x) - TW(x)/2 + T(CT - W(x)/2)$$

für alle $x \in K$. Daraus folgt

$$V(\varphi(T, x, F(x))) \leq \begin{cases} V(x) - TW(x)/2, & CT \leq W(x)/2 \\ V(x) + CT^2, & \text{für alle } x \in K \end{cases}$$

Wählen wir nun $T_0 > 0$ so klein, dass für alle $T \in (0, T_0]$ die Implikation

$$V(x) > C_1 - CT^2 \Rightarrow W(x)/2 \geq CT$$

gilt, so erhalten wir im Fall $V(x) \leq C_1 - CT^2$ die Ungleichung $V(\varphi(T, x, F(x))) \leq V(x) + CT^2 \leq C_1$ und andernfalls $V(\varphi(T, x, F(x))) \leq V(x) - TW(x)/2$. Insgesamt erhalten wir also (14.4) (mit $W/2$ an Stelle von W), damit auch (14.3) und da $V_T = V$ als Lyapunov-Funktion alle anderen Bedingungen einer Abtast-Lyapunov-Funktion erfüllt, sind alle Voraussetzungen von Satz 14.5 erfüllt und die Aussage folgt. \square

Bemerkung 14.7 In der Praxis wird man F_T und V_T oft nicht für alle beliebig kleinen $T \in (0, T_0]$ zur Verfügung haben, z.B. wenn man V_T oder F_T numerisch berechnet; in diesem Fall ist die Berechnung für beliebig kleine T oft nicht praktisch realisierbar.

Tatsächlich reicht es aber auch aus, wenn man zu vorgegebenen $R > \varepsilon > 0$ eine Ljapunov-Funktion V_T mit $C_2 \geq \alpha_2(R)$, $C_1 \leq \alpha_1^{-1}(\varepsilon/2)$ und hinreichend kleinem $T > 0$ berechnen kann oder theoretisch sicher stellen kann, dass ein solches V_T zu einem numerisch berechneten F_T existiert. Der Beweis von Satz 14.5 ist dann für diese Parameter R und ε durchführbar und garantiert die Stabilität des berechneten Feedbacks F_T für diese Parameter, ohne dass dazu die Kenntnis von V_T bzw. F_T für alle $T \in (0, T_0]$ nötig ist. \square

14.4 Existenz von Abtast-Ljapunov-Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir nun beweisen, dass eine Familie von Ljapunov-Funktion im Sinne von Definition 14.4 immer existiert, wenn das System asymptotisch kontrollierbar ist. Dies formuliert der folgende Satz.

Satz 14.8 Betrachte ein Kontrollsystem (8.1) mit $f(0, 0) = 0$. Dann gilt: Wenn das System asymptotisch kontrollierbar ist, so existiert eine Familie von Ljapunov-Funktionen im Sinne von Definition 14.4. Insbesondere ist das Abtastsystem damit semiglobal praktisch asymptotisch stabilisierbar.

Der Beweis dieses Satzes benötigt etwas Vorbereitung. Für eine gegebene stetige Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$ für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ und $\beta \in (0, 1]$ definieren wir die Funktionen

$$V_\beta(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ V(y) + \frac{\|x - y\|^2}{2\beta^2} \right\}, \quad (14.6)$$

die sogenannten (*quadratischen*) *inf-Konvolutionen* von V . Mit $y_\beta(x)$ bezeichnen wir einen Punkt, in dem das Minimum in (14.6) für x angenommen wird; damit definieren wir den Vektor $\zeta_\beta(x) := (x - y_\beta(x))/2\beta^2$. Dann gilt das folgende Lemma.

Lemma 14.9 Die Funktionen V_β haben die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\bar{\alpha}_1(\|x\|) \leq V_\beta(x) \leq V(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und eine von $\beta \in (0, 1]$ unabhängige Funktion $\bar{\alpha}_1 \in \mathcal{K}_\infty$
- (ii) Für alle $R, \delta > 0$ gibt es ein $\beta_0 > 0$, so dass die Abschätzungen

$$\|y_\beta(x) - x\| \leq \delta, \quad \|\zeta_\beta(x)\| \|y_\beta(x) - x\| \leq \delta \quad \text{und} \quad |V(y_\beta(x)) - V_\beta(x)| < \delta$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq R$ und alle $\beta \leq \beta_0$ gelten.

(iii) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $\tau > 0$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} V_\beta(x + \tau v) &\leq V_\beta(x) + \tau \langle \zeta_\beta(x), v \rangle + \frac{\tau^2 \|v\|^2}{2\beta^2} \\ V(y_\beta(x) + \tau v) &\geq V(y_\beta(x)) + \tau \langle \zeta_\beta(x), v \rangle - \frac{\tau^2 \|v\|^2}{2\beta^2}. \end{aligned}$$

Beweis: Alle Eigenschaften folgen mit elementaren aber zum Teil etwas technischen Abschätzungen, wobei man die gleichmäßige Stetigkeit von V auf kompakten Mengen ausnutzt. \square

Bemerkung 14.10 Die Abschätzungen in (iii) haben Ähnlichkeit mit einer Taylor-Entwicklung, wobei $\zeta_\beta(x)$ die Rolle des Gradienten spielt. Tatsächlich wird $\zeta_\beta(x)$ *Supergradient* der Funktion V_β in x und *Subgradient* der Funktion V in $y_\beta(x)$ genannt. \square

Beweis von Satz 14.8: Sei V die Kontroll-Ljapunov-Funktion aus Satz 12.6 und seien $R, \varepsilon > 0$ gegeben. Wir konstruieren nun eine Funktion V_T , die die Bedingungen der Definition 14.4 erfüllt.

Wir wählen $\beta \in (0, 1]$ so, dass für V_β und $y_\beta(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon \leq \|x\| \leq R$ die Abschätzung

$$W(y_\beta(x)) \geq W(x)/2 \quad (14.7)$$

gilt und wir wählen T_0 so, dass für alle $T \leq T_0$ und alle x wie oben die Ungleichung

$$\int_0^T W(\varphi(s, x, u)) ds \leq T3W(x)/4$$

gilt für alle $u \in \mathcal{U}_C$.

Aus der zweiten Ungleichung von Lemma 14.9 (iii) folgt damit aus der Ljapunov-Ungleichung aus Definition 12.1 mit $v = (\varphi(T, y_\beta(x), u) - y_\beta(x))/T$ und $\tau = T$ für alle $\beta \in (0, \beta_0]$ und alle hinreichend kleinen T die Abschätzung

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \mathcal{U}_C} \langle \zeta_\beta(x), (\varphi(T, y_\beta(x), u) - y_\beta(x))/T \rangle &\leq -3W(y_\beta(x))/4 + \frac{T\|v\|^2}{2\beta^2} \\ &\leq -W(y_\beta(x))/2 \leq -W(x)/4. \end{aligned}$$

Wegen

$$\varphi(T, y_\beta(x), u) - y_\beta(x) = \int_0^T f(\varphi(t, y_\beta(x)), u(t)) dt = \int_0^T f(y_\beta(x), u(t)) dt + O(T^2)$$

und der Tatsache, dass

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(y_\beta(x), u(t)) dt$$

in der konvexen Hülle der Menge $F_\beta := \{f(y_\beta(x), u) \mid u \in \mathcal{U}_C\}$ liegt (vgl. den Beweis von Lemma 12.4), folgt daraus die Abschätzung

$$\min_{w \in \text{co}F_\beta} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/6.$$

Da der zu minimierende Ausdruck linear in w ist, wird das Minimum für ein $w \in F_\beta$ angenommen (Konvexkombinationen von Elementen aus F_β können keine kleineren Werte liefern), also folgt

$$\min_{w \in F_\beta} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/6.$$

Für hinreichend kleine $\beta > 0$ liegt $y_\beta(x)$ nahe an x , so dass wir die Ungleichung

$$\min_{w \in F} \langle \zeta_\beta(x), w \rangle \leq -W(x)/8$$

mit $F := \{f(x, u) \mid u \in U_C\}$ folgern können. Für Kontrollwerte $\bar{u} \in U_C$ gilt nun

$$\varphi(T, x, \bar{u}) - x = \int_0^T f(\varphi(t, x), \bar{u}) dt = \int_0^T f(x, \bar{u}) dt + O(T^2)$$

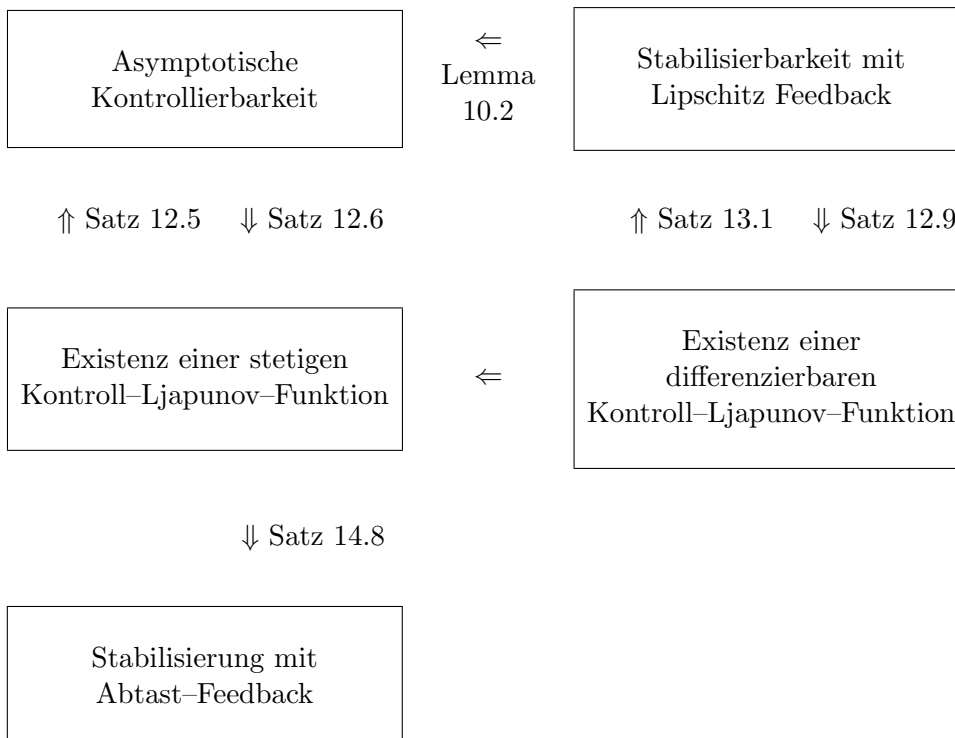
Also folgt mit $v(\bar{u}) = (\varphi(T, x, \bar{u}) - x)/T$ aus der ersten Ungleichung von Lemma 14.9 (iii) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \inf_{\bar{u} \in U_C} V_\beta(\varphi(T, x, \bar{u})) &\leq \inf_{\bar{u} \in U_C} V_\beta(x + Tv(\bar{u})) \\ &\leq \inf_{\bar{u} \in U_C} \left\{ V_\beta(x) - T \langle \zeta_\beta(x), v(\bar{u}) \rangle + \frac{T^2 \|v(\bar{u})\|^2}{2\beta^2} \right\} \\ &= \min_{w \in F} \left\{ V_\beta(x) - T \langle \zeta_\beta(x), w \rangle + O(T^2) + \frac{T^2 \|w\|^2}{2\beta^2} \right\} \\ &\leq V_\beta(x) - TW(x)/8 + O(T^2) + \frac{T^2 \|w^*\|^2}{2\beta^2} \\ &\leq V_\beta(x) - TW(x)/16 \end{aligned}$$

für alle hinreichend kleinen $T > 0$, wobei $w^* \in F$ den Wert bezeichnet, in dem das Minimum angenommen wird. Dies ist die gewünschte Ljapunov-Ungleichung, weswegen $V_T = V_\beta$ die gesuchte Abtast-Ljapunov-Funktion ist. \square

14.5 Schematische Übersicht der Stabilitäts-Ergebnisse

Die folgende Übersicht stellt die Ergebnisse über die Stabilisierbarkeit nichtlinearer Kontrollsysteme schematisch dar. Hierbei werden nicht alle benötigten Voraussetzungen dargestellt; diese finden sich jeweils präzise in den angegebenen Sätzen.



Literaturverzeichnis

- [1] B. AULBACH, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Elsevier–Spektrum Verlag, Heidelberg, 2. auflage ed., 2004.
- [2] A. BACCIOTTI AND F. CERAGIOLI, *Nonsmooth Lyapunov functions and discontinuous Carathéodory systems*, in Proceedings of NOLCOS04, 2004, pp. 1115–1119.
- [3] R. W. BROCKETT, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in Differential Geometric Control Theory, R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, eds., Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 181–191.
- [4] F. COLONIUS, *Einführung in die Steuerungstheorie*. Vorlesungsskript, Universität Augsburg, 1992, eine aktuelle Version ist erhältlich unter dem Link “Lehre” auf scicomp.math.uni-augsburg.de/~colonius/.
- [5] L. C. EVANS AND F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [6] O. FORSTER, *Analysis 2*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1996.
- [7] L. GRÜNE, *Stabilität und Stabilisierung linearer Systeme*. Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 2003, www.math.uni-bayreuth.de/~lgruene/linstab0203/.
- [8] W. HAHN, *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 22, Springer–Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.
- [9] ———, *Stability of Motion*, Springer–Verlag Berlin, Heidelberg, 1967.
- [10] D. HINRICHSSEN AND A. J. PRITCHARD, *Mathematical systems theory I*, vol. 48 of Texts in Applied Mathematics, Springer, Heidelberg, 2010. Modelling, state space analysis, stability and robustness, Corrected reprint [of MR2116013].
- [11] H. JEGGLE, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1979.
- [12] Y. LIN, E. D. SONTAG, AND Y. WANG, *A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability*, SIAM J. Control Optim., 34 (1996), pp. 124–160.
- [13] J. LUNZE, *Regelungstechnik 1*, Springer, 10 ed., 2010.
- [14] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Springer Verlag, New York, 2nd ed., 1998.

- [15] F. W. WILSON, *Smoothing derivatives of functions and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., 139 (1969), pp. 413–428.
- [16] V. I. ZUBOV, *Methods of A.M. Lyapunov and their Application*, P. Noordhoff, Groningen, 1964.

Index

- A-invarianter Unterraum, 14
- Abbildungsgrad, 110
- Abtast–Ljapunov–Funktion, 145
 - Existenz, 148
- Abtastlösungen, 143
- Abtastperiode, 143
- Abtastung, 143
- Abtastung und Stabilität, 144
- Abtastzeit, 143
- Anfangsbedingung, 5, 8
- Anfangswert, 89
- Artsteins Kreise, 113, 132, 140, 144
- asymptotische Kontrollierbarkeit, 108
- asymptotische Stabilität, 93
 - semiglobal praktisch, 144
- Ausgang, 37
- Ausgangsfeedback, 29
 - dynamisch, 45
- Ausgangsregelung, 75

- Bellman'sches Optimalitätsprinzip, 62
- Beobachtbarkeit, 37
 - asymptotische, 42
 - Dualität, 43
 - Eigenwertkriterium, 42
 - Dualität, 39
- Beobachtbarkeitsmatrix, 40
- Beobachter
 - dynamischer, 44
 - Existenz, 44
 - mittels Kalman-Filter, 85
- Bilinearform, 24
- Bodediagramm, 55
- Brocketts Bedingung, 109, 111
- Brocketts nichtholonomer Integrator, *siehe*
nichtholonomer Integrator

- Carathéodory, Satz von, 88
- charakteristisches Polynom
 - kontrollierbarer Anteil, 17
 - unkontrollierbarer Anteil, 17

- Differentialgleichung
 - Linearisierung, 118
- Differenzierbarkeit, 117
- duales System, 39
- Dualität, 39
 - Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit, 39
 - Stabilisierbarkeit und asymptotische Beobachtbarkeit, 43
- dynamische Programmierung, 62

- E/A-Stabilität, *siehe* Eingangs-Ausgangs-Stabilität
- Eigenwertkriterium für Stabilität, 20, 22
- Eingangs-Ausgangs-Stabilität, 51
- Equilibrium, 19, 93
- Erreichbarkeit, 11
- Erreichbarkeitsmatrix, 15
- Erreichbarkeitsmenge, 11
 - Struktur, 16
- Existenz- und Eindeutigkeitssatz, 5, 8
- Existenz- und Eindeutigkeitssatz, 88
- exponentielle Kontrollierbarkeit, 108
- exponentielle Stabilität, 93

- Feedback, 27
 - dynamisch, 45
 - optimal, 72
 - Stabilisierung, 28, 45, 55
 - statisch, 45
- Feedback–Kontrolle, 107
- Feedback–Stabilisierbarkeit, 108
 - exponentiell, 108
- Funktional, 62

- Gleichgewicht, 19, 93

- Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung, 64

- Hautus-Kriterium, 17
- Heizungsregelung, 28
- Instabilität, 93
- invertiertes Pendel, *siehe* Pendel
- Jacobi-Matrix, 117
- Jordan'sche Normalform, 21
- \mathcal{K} -Funktion, 92
- \mathcal{K}_∞ -Funktion, 92
- Kalman-Filter, 85
- Kalman-Kriterium, 16
- \mathcal{KL} -Funktion, 92
- Konkatenation, 7, 88
- kontroll-affin, 135
- Kontroll-Ljapunov-Funktion, 125
 - asymptotische Kontrollierbarkeit, 130
 - differenzierbar, 127
 - Feedback-Stabilisierung, 133
- Kontroll-Ljapunov-Paar, 125
- Kontrolle, 1
- Kontrollierbarkeit, 11
 - Dualität, 39
 - vollständige, 14
- Kontrollierbarkeitsmenge, 12
 - Struktur, 16
- Kontrollsystem, 1
 - linear, 2
- Kontrolltheorie, 1
- Kontrollwert, 1
- Kostenfunktion, 62
 - quadratisch, 67
- \mathcal{L} -Funktion, 92
- Laplace-Transformation, 48
- Lebesgue-messbar, 88
- linear-quadratisches Problem, 68
 - Ausgangsregelung, 75
 - Lösbarkeit, 72, 78
 - Lösungsansatz, 71
- Linearisierung, 118
 - Stabilität, 119
 - Trajektorien, 118
- Ljapunov Funktion
 - bilinear, 24, 121
 - hinreichendes Kriterium, 23
 - hinreichendes und notwendiges Kriterium, 26
 - quadratisch, 23, 121
- Ljapunov Gleichung, 25
- Ljapunov-Funktion, 96
 - Kontroll-, 125
 - Pendel, 99
 - semiglobal praktisch, 145
 - und asymptotische Stabilität, 97, 100
- Ljapunov-Paar, 96
- Matrix-Differentialgleichung, 6
- Matrix-Exponentialfunktion, 4
- messbar, 88
- nichtholonomer Integrator, 112, 122
- nichtholonomes System, 112
- nullkontrollierend, 66, 78
- Nyquistdiagramm, 58
- Nyquistkriterium, 59
- open-loop Kontrolle, 107
- optimale Steuerung, 61
- optimale Wertefunktion, 62
- optimales Paar, 62
- optimales Steuerungsproblem, 62
 - linear-quadratisch, 68
 - Ausgangsregelung, 75
 - nullkontrollierend, 66, 78
- Optimalitätsbedingung
 - hinreichend, 66
 - notwendig, 65
- Optimalitätsprinzip, 62
- Pendel
 - Darstellung der Lösungen, 3
 - grafische Veranschaulichung, 2
 - Kontroll-Ljapunov-Funktion, 139
 - lineares Modell, 3
 - linearisiert, 122
 - Ljapunov Funktion, 27
 - Ljapunov-Funktion, 99
 - nichtlineares Modell, 2
 - Stabilität, 94
 - Stabilität, 22
- Polverschiebungssatz, 35, 54
- Realisierungstheorie, 50

- Regelung, 1, 107
- Regelungsnormalform, 31
- Riccati-Gleichung
 - algebraisch, 70
 - dual, 84
 - Differentialgleichung, 72
- Rückführung, *siehe* Feedback
- Ruhelage, 19, 93

- Sampling, *siehe* Abtastung
- Satz von Rademacher, 102
- Sontag-Formel, 136
- Stabilisierbarkeit, 33, 35
 - Dualität, 43
- Stabilisierungsproblem, 28
 - im Frequenzbereich, 55
 - Lösung, 33, 34
 - mittels optimaler Steuerung, 72
 - mit Ausgang, 45
 - Lösung, 45
 - schematische Darstellung, 35, 151
- Stabilität, 19, 93
 - asymptotisch, 93
 - global, 20
 - lokal, 20
 - Eigenwertkriterium, 20, 22, 120
 - Eingangs-Ausgangs-, 51
 - exponentiell, 20, 93
 - im Sinne von Ljapunov, 20
 - Ljapunov Funktionen Kriterium, 26, 121
- Stabilität unter Linearisierung, 119
- Steuerbarkeit, 11
- Steuerung, 1, 107
- stückweise konstant, 88
- stückweise stetig, 7
- Subgradient, 149
- Supergradient, 149

- Trajektorien unter Linearisierung, 118

- Übertragungsfunktion, 50
- unbeobachtbare Zustände, 38
 - Struktur, 38
- universelle Formel, 136
- Unterscheidbarkeit, 37

- Vektorfeld, 1

- Vergleichsfunktionen, 92
- vorgebbares Polynom, 31
- Vorgebbarkeit und Stabilisierbarkeit, 32

- Zubovs Gleichung, 105
- Zustand, 1
- Zustandsfeedback
 - statisch, 45
- Zustandsschätzung, 81